Isométries vectorielles

Table des matières

Dans ce polycopié, on se place dans un espace euclidien $(E, < \, , \, >)$

remarque 1 (*intéressant à retenir*)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.

- *f est bijective ssi f envoie une base sur une base.*
- *f est une isométrie vectorielle ssi f envoie une bon sur une bon.*
- *f est une isométrie vectorielle directe ssi f envoie une bond sur une bond.*
- *f est une isométrie vectorielle indirecte ssi f envoie une bond sur une bon indirecte.*

1 Isométries vectorielles

définition 1: isométrie vectorielle

Soit f un endomorphisme de $(E, < , >)$ euclidien.
On dit que f EST UNE ISOMÉTRIE VECTORIELLE DE E lorsque f conserve la norme, c'est à dire lorsque

$$\forall \vec{x} \in E, ||f(\vec{x})|| = ||\vec{x}||$$

rem: on dit aussi que f EST UN ENDOMORPHISME ORTHOGONAL DE E
ou que f EST UN AUTOMORPHISME ORTHOGONAL DE E

théorème 1:

Si f est une isométrie vectorielle alors f est bijective
rem: la réciproque est fausse

exemple 1: symétries orthogonales

Soit F un sev de dimension finie de $(E, < , >)$ euclidien

- On sait que $F \oplus F^{\perp} = E$
- c'est à dire $\forall \vec{x} \in E, \exists ! (\vec{x}_1,\vec{x}_2) \in F \times F^{\perp} \,|\, \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$
- On rappelle que $\boxed{\text{la symétrie othogonale par rapport à } F}$ est l'application

$$\begin{array}{rccl} s_F : & E = F \oplus F^{\perp} & \longrightarrow & E \\ & \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 & \longmapsto & \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \end{array}$$

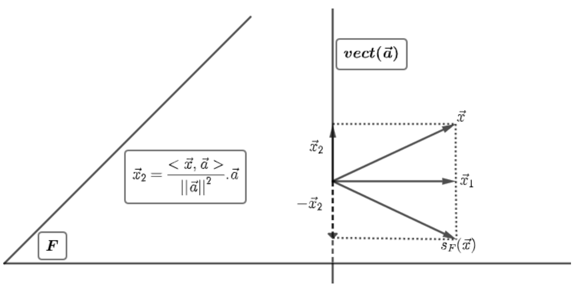
- **une symétrie orthogonale est une isométrie vectorielle**
- *rem: à noter que parmi les symétries, seules les symétries* ORTHOGONALES *sont des isométries vectorielles*

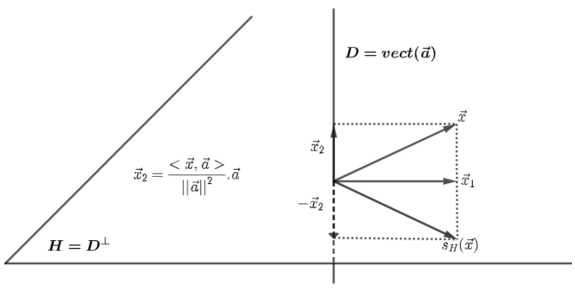
exemple 2: cas particulier des réflexions

Soit $D = \text{vect}(a)$ une droite vectorielle dans $(E, < , >)$ euclidien

- On sait que $H = D^{\perp}$ est un hyperplan de E
- On appelle RÉFLEXION une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.
- Une réflexion est une isométrie vectorielle
- *L'expression explicite* de la réflexion par rapport à $D^{\perp}$ est

$$\begin{array}{rccl} s_H : & E & \longrightarrow & E \\ & \vec{x} & \longmapsto & \vec{x} - 2.\dfrac{< \vec{x},\vec{a} >}{||\vec{a}||^2}.\vec{a} \end{array}$$





exemple 3: homothétie?

Déterminer les homothéties qui sont des isométries vectorielles.

exemple 4:

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire $< P,Q >= \displaystyle\int_0^1 P(t).Q(t).dt$

Vérifier que l'endomorphisme $f : P \mapsto P(1 - X)$ est une isométrie vectorielle.

théorème 2:

Soit f un endomorphisme de $(E, < , >)$ euclidien.
Il y a équivalence entre :

i) f est une isométrie vectorielle

ii) f conserve le produit scalaire : $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2, < f(\vec{x}),f(\vec{y}) >=< \vec{x},\vec{y} >$

iii) l'image d'une base orthonormale de E par f est encore une base orthonormale de E

remarque 2 (***Attention au vocabulaire!***)

Une projection orthogonale est un endomorphisme, mais ce n'est pas un endomorphisme orthogonal!
UNE PROJECTION ORTHOGONALE N'EST PAS UNE ISOMÉTRIE VECTORIELLE

définition 2: groupe orthogonal de E

On appelle GROUPE ORTHOGONAL DE E, et on note $O(E)$, l'ensemble des isométries vectorielles de E

exemple 5:

Décrire $O(E)$ lorsque E est un espace euclidien de dimension un.
Est-ce un sev? Est-il stable par la loi $\circ$?

théorème 3: structure du groupe orthogonal

1. $O(E) \subset GL(E) \subset \mathcal{L}(E)$

2. l'identité est une isométrie vectorielle : $id_E \in O(E)$

3. **stabilité par la composition**
   - la composée de deux isométries vectorielles est encore une isométrie vectorielle
   - si $f \in O(E)$ et $g \in O(E)$ alors $f \circ g \in O(E)$

4. **stabilité par passage à l'inverse**
   - l'inverse d'une isométrie vectorielle est encore une isométrie vectorielle
   - si $f \in O(E)$ alors $f^{-1} \in O(E)$

rem: ces propriétés permettent de dire que $(O(E),\circ)$ *est* UN GROUPE.
rem: le groupe orthogonal $O(E)$ *n'est pas un sev de* $\mathcal{L}(E)$

théorème 4: sev stable

Soit $(E, <\,,\,>)$ un espace euclidien et f une isométrie vectorielle.
Soit F un sev stable par f (càd $f(F) \subset F$).
Alors:

i) $f(F) = F$
ii) $F^{\perp}$ est aussi stable par f
iii) il existe une bon de E tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) =$

théorème 5: caractérisation matricielle des isométries vectorielles

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E, f un endomorphisme de E et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}} f$.
Il y a équivalence entre :

i) f est une isométrie vectorielle de E
ii) A vérifie $A^T.A = I_n$ (c'est à dire A est *une matrice orthogonale*)

Autrement dit :

$$\boxed{f \in O(E) \Longleftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}} f \in O_n(\mathbb{R}) \quad \text{(lorsque } \mathcal{B} \text{ est une bon)}}$$

rem: un endomorphisme est une isométrie vectorielle ssi sa matrice dans une base orthonormée est une matrice orthogonale.

théorème 6: déterminant et valeurs propres d'une isométrie vectorielle

1. le déterminant d'une isométrie vectorielle vaut 1 ou -1.
2. les valeurs propres réelles possibles d'une isométrie vectorielle sont 1 et -1

définition 3: vecteurs invariants/anti-invariants - isométrie directe/indirecte

- Une isométrie vectorielle de déterminant $+1$ est appelé une ISOMÉTRIE VECTORIELLE DIRECTE ou encore UNE ISOMÉTRIE VECTORIELLE POSITIVE
- Une isométrie vectorielle de déterminant -1 est appelé une ISOMÉTRIE VECTORIELLE INDIRECTE ou encore UNE ISOMÉTRIE VECTORIELLE NÉGATIVE
- On appelle VECTEUR INVARIANT de f tout vecteur $\vec{x} \in E$ tel que $f(\vec{x}) = \vec{x}$,
càd tout vecteur élément de $\ker(f - id)$
- On appelle VECTEUR ANTI-INVARIANT de f tout vecteur $\vec{x} \in E$ tel que $f(\vec{x}) = -\vec{x}$,
càd tout vecteur élément de $\ker(f + id)$

remarque 3

- *si* 1 *n'est pas valeur propre alors* $\vec{0}$ *est le seul vecteur invariant.*
- *si* -1 *n'est pas valeur propre alors* $\vec{0}$ *est le seul vecteur anti-invariant.*

exemple 6:

Montrer qu'une réflexion est une isométrie vectorielle indirecte.

remarque 4 (*résultat Hors Programme*)

On montre que tout isométrie vectorielle peut s'écrire comme la composée de réflexions.

exemple 7:

1. Montrer que la composée de deux isométries négatives est une isométrie positive
2. Montrer que la composée d'une isométrie négative et d'une positive est une isométrie négative

définition 4: Groupe Spécial Orthogonal

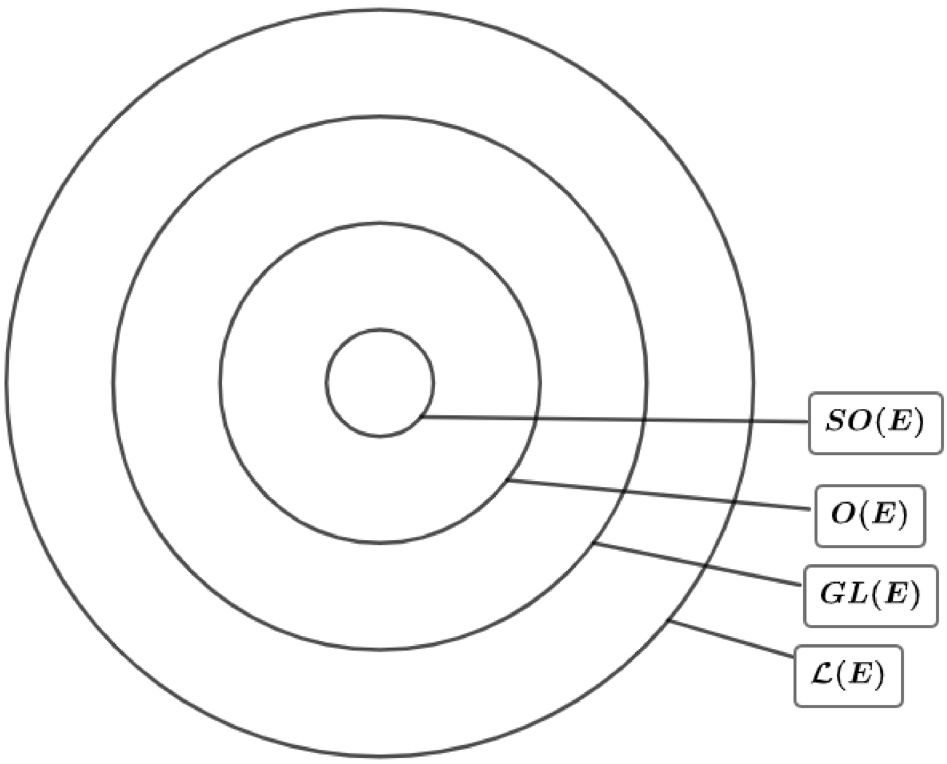
L'ensemble des isométries vectorielles directes de E s'appelle le GROUPE SPÉCIAL ORTHOGONAL DE E. On le note $SO(E)$.

$$\boxed{SO(E) = \{f \in O(E) \mid \det(f) = +1\}}$$

théorème 7: structure du Groupe Spécial Orthogonal

1. $SO(E) \subset O(E) \subset GL(E) \subset \mathcal{L}(E)$
2. l'endomorphisme identité id_E appartient à $SO(E)$
3. **stabilité par composition**
   - la composée de deux isométries vectorielles directes est encore une isométrie vectorielle directe.
   - si $f \in SO(E)$ et $g \in SO(E)$ alors $f \circ g \in SO(E)$
4. **stabilité par passage à l'inverse**
   - l'inverse d'une isométrie vectorielle directe est encore une isométrie vectorielle directe.
   - si $f \in SO(E)$ alors $f^{-1} \in SO(E)$

rem: ces propriétés permettent de dire que $(SO(E), \circ)$ *est* UN GROUPE.
rem: $SO(E)$ *n'est pas un sev...*



2 Matrices orthogonales

définition 5: matrice orthogonale

On dit que LA MATRICE $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ EST UNE MATRICE ORTHOGONALE lorsque

$$\boxed{A^T.A = I_n}$$

Autrement dit, une matrice est orthogonale si et seulement si elle est inversible et que son inverse est égale à sa transposée: $A^{-1} = A^T$

exemple 8:

- la matrice nulle O_n n'est pas une matrice orthogonale
- les matrices I_n et $-I_n$ sont des matrices orthogonales, mais pas la matrice $2.I_n$

théorème 8: caractérisation d'une matrice orthogonale à l'aide de ses vecteurs colonnes ou lignes

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Notons $C_1, C_2, \dots, C_n$ ses colonnes.

Il y a équivalence entre :

i) A est une matrice orthogonale
ii) A^T est une matrice orthogonale
iii) $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \sum\limits_{k=1}^{k=n} a_{ki}.a_{kj} = \delta_{ij} =< C_i,C_j >$
iv) Les vecteurs colonnes de A forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ (pour le produit scalaire usuel)
v) Les vecteurs lignes de A forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ (pour le p.s.u.)
vi) Les vecteurs colonnes de A forment une famille orthonormale de $\mathbb{R}^n$ (pour le p.s.u.)
vii) Les vecteurs lignes de A forment une famille orthonormale de $\mathbb{R}^n$ (pour le p.s.u.)

rem: à cette occasion, on remarque que la formule du produit matricielle peut être interprétée comme le produit scalaire d'un vecteur ligne de la première matrice par un vecteur colonne de la seconde.

exemple 9:

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice orthogonale.
Montrer que $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 = n$

exemple 10:

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & \alpha & -\beta \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & \beta \\ 0 & \gamma & 2\beta \end{pmatrix}$.
Pour quelle(s) valeur(s) de α, β et γ cette matrice est-elle orthogonale?

définition 6: Groupe Orthogonal d'ordre n

On appelle GROUPE ORTHOGONAL D'ORDRE n, et on note $O(n)$ ou $O_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices orthogonales carrées d'ordre n.

remarque 5

- *$O(n)$ n'a pas une structure d'espace vectoriel car la matrice nulle n'est pas une matrice orthogonale.*
- *$O(n)$ n'est pas vide car la matrice I_n est une matrice orthogonale*

exemple 11:

Soit A une matrice antisymétrique d'ordre n. On pose $B = (I_n + A)(I_n - A)^{-1}$.
Montrer que B est une matrice orthogonale.
(On pourra commencer par remarquer que les matrices $I_n - A$ et $I_n + A$ commutent)

théorème 9: structure du Groupe Orthogonal

i) $O_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

ii) la matrice I_n est une matrice orthogonale

iii) **stabilité par le produit matriciel**
- le produit de deux matrices orthogonales est encore une matrice orthogonale
- Si $A \in O_n(\mathbb{R})$ et $B \in O_n(\mathbb{R})$ alors $A.B \in O_n(\mathbb{R})$

iv) **stabilité par passage à l'inverse**
- l'inverse d'une matrice orthogonale est encore une matrice orthogonale
- si $A \in O_n(\mathbb{R})$ alors $A^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$

rem: $O_n(\mathbb{R})$ n'est pas un sev... mais est stable par le produit matriciel et le passage à l'inverse

théorème 10: déterminant et valeurs propres d'une matrice orthogonale

1. le déterminant d'une matrice orthogonale vaut 1 ou -1.
2. les seules valeurs propres **réelles possibles** d'une matrice orthogonale sont 1 et -1

remarque 6

En revanche, une matrice orthogonale peut possèder des valeurs propres complexes (si l'on s'autorise des vecteurs propres complexes) autres que -1 et 1 ; et, on peut affirmer que le module de ces valeurs propres complexes vaut toujours un.

exemple 12: si $\det A = \pm 1$ alors A n'est pas forcément une matrice orthogonale

Donner un exemple de matrice de déterminant égal à un mais qui ne soit pas orthogonale.

définition 7: Groupe Spécial Orthogonal

L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant égal à un est noté $SO(n)$ ou $SO_n(\mathbb{R})$.
On l'appelle LE GROUPE SPÉCIAL ORTHOGONAL.

$$\boxed{SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) | \det A = +1\}}$$

théorème 11: structure du Groupe Spécial Orthogonal

1. $SO_n(\mathbb{R}) \subset O_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

2. la matrice I_n appartient à $SO_n(\mathbb{R})$

3. **stabilité par le produit matriciel**
   - Si $A \in SO_n(\mathbb{R})$ et $B \in SO_n(\mathbb{R})$ alors $AB \in SO_n(\mathbb{R})$

4. **stabilité par passage à l'inverse**
   - Si $A \in SO_n(\mathbb{R})$ alors $A^{-1} \in SO_n(\mathbb{R})$

rem: $SO_n(\mathbb{R})$ n'est pas un sev... mais est stable par le produit matriciel et le passage à l'inverse.

3 Espace euclidien orienté

théorème 12: bases orthonormées et matrice orthogonale

Soit $(E, < , >)$ un espace euclidien donné, et $\mathcal{B}_0$ une base orthonormée de E.
Il y a équivalence entre:
i) $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E
ii) la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ est une matrice orthogonale

théorème 13: bases orthonormées directes et matrice du groupe spécial orthogonal

Soit $(E, < , >)$ un espace euclidien donné, et $\mathcal{B}_0$ une base orthonormée directe de E.
Il y a équivalence entre:
i) $\mathcal{B}$ est une base orthonormée directe de E
ii) la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ est une matrice du groupe spécial orthogonal.

remarque 7 (*précision sur le théorème précédent*)

- *la matrice de passage d'une bon directe à une bon indirecte est une matrice orthogonale de determinant* -1

- Orienter un espace c'est privilégier une base $\mathcal{B}_0$ de cet espace et la déclarer comme directe.
- On dira ensuite qu'une autre base $\mathcal{B}$ est directe [resp. indirecte] lorsque la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}$ a un déterminant positif [resp. négatif]
- Orienter une droite vectorielle revient donc à choisir un vecteur directeur de cette droite
- Pour $E = \mathbb{R}^2$, on a décidé que la base canonique $\mathcal{B}_0 = (\vec{i},\vec{j}) = ((1,0),(0,1))$ était directe
- Pour $E = \mathbb{R}^3$, on a décidé que la base canonique $\mathcal{B}_0 = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ était directe

remarque 8 (*orientation d'un plan dans espace de dimension 3*)

Soit $(E, < , >)$ un espace euclidien orienté de dimension 3.
Soit P un plan vectoriel inclus dans E.
On sait que $P^{\perp} = D$ est une droite.
Notons $\vec{e}_1$ un vecteur unitaire de D. (la droite D est maintenant orientée par le vecteur $\vec{e}_1$)
Soit $(\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ une bon de P
On dira que $(\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ est une base directe de P lorsque $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ est une base directe de E.

4 Description du groupe orthogonal en dimension 2

Dans ce paragraphe, E désigne un espace euclidien orienté par une bond.

théorème 14: classification des matrices orthogonales d'ordre deux

Soit $M \in O_2(\mathbb{R})$

1. Si $\det(M) = 1$ (càd $M \in SO_2(\mathbb{R})$) alors $\exists \theta \in \mathbb{R}, M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
2. Si $\det(M) = -1$ (càd $M \in O_2(\mathbb{R}) - SO_2(\mathbb{R})$ alors $\exists \theta \in \mathbb{R}, M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

démonstration: Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

- on rappelle que pour deux réels fixés x et y on a l'équivalence

$$\boxed{x^2 + y^2 = 1 \iff |x + iy| = 1 \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, \begin{cases} x & = \cos\theta \\ y & = \sin\theta \end{cases}}$$

- Le calcul donne ${}^tAA = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}$
- On a ainsi

$$A^T.A = I_2 \iff \exists (\theta,\theta_1) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} a = \cos\theta \text{ et } c = \sin\theta \\ b = \cos\theta_1 \text{ et } d = \sin\theta_1 \\ \cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1 = 0 \end{cases}$$

C'est à dire $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \cos\theta_1 \\ \sin\theta & \sin\theta_1 \end{pmatrix}$ avec $\cos(\theta_1 - \theta) = 0$

Or

$$\cos(\theta_1 - \theta) = 0 \iff \theta_1 - \theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta_1 = \theta + \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Et dans ce cas

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \cos(\theta + \frac{\pi}{2} + k\pi) = (-1)^k \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -(-1)^k \sin(\theta) \\ \sin\theta_1 = \sin(\theta + \frac{\pi}{2} + k\pi) = (-1)^k \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = (-1)^k \cos(\theta) \end{cases}$$

On trouve bien les deux formes annoncées dans le théorème

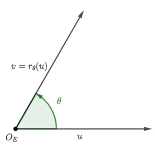
définition 8: définition d'une rotation dans le plan

Soit $(E, < , >)$ un plan euclidien orienté et $\theta \in \mathbb{R}$.
On appelle ROTATION DE E D'ANGLE θ l'endomorphisme, noté r_θ, dont la matrice dans une bond est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

rem: θ est appelé l'angle de la rotation

remarque 9 (***différentes expressions pour une rotation plane dans $\mathbb{R}^2$***)

Soit r_θ la rotation d'angle θ dans le plan $E = \mathbb{R}^2$ muni de la bond $(\vec{i},\vec{j})$.
On note $u = (x,y)$ et $v = (x',y')$

- *expression matricielle:* $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- *expression complexe:* $z_v = e^{i\theta}.z_u$
- *relation géométrique:* $||u|| = ||v||$ *et* $(\widehat{u,v}) = \theta$ 

théorème 15: propriétés des matrices de $SO_2(\mathbb{R})$

Soit $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

1. On a $\det(R_\theta) = 1$
2. si $\theta = 0$ alors $R_\theta = I_2$ et 1 est l'unique valeur propre
3. si $\theta = \pi$ alors $R_\theta = -I_2$ est -1 est l'unique valeur propre
4. si $\theta \not\equiv 0[\pi]$ alors $sp_{\mathbb{R}}(R_\theta) = \{\}$ et $sp_{\mathbb{C}}(R_\theta) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$

théorème 16: propriétés des matrices de $O_2(\mathbb{R}) - SO_2(\mathbb{R})$

Soit $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

1. On a $\det(M) = -1$
2. Les valeurs propres de M sont 1 et -1
3. M est diagonalisable à l'aide d'une matrice de passage orthogonale
4. M est semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

rem: autrement dit, les matrices de $O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$ sont associées à des réflexions

théorème 17: classification des isométries vectorielles en dim 2

Dans un espace euclidien de dimension deux,
il existe deux et seulement deux types d'isométries vectorielles:

1. les rotations
2. les réflexions (=symétrie orthogonale par rapport à une droite)

exemple 13:

Donner la nature et les éléments de l'endomorphisme canoniquement associé à M dans les cas suivants:

$$a)\ M = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad b)\ M = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

théorème 18: propriétés d'une rotation

Soit f une rotation d'angle NON nul. Alors:

1. l'ensemble des vecteurs invariants de f est réduit à $\{\vec{0}\}$
2. $\det f = 1$ (càd f est une isométrie positive)
3. Dans toute bond de E, f a pour matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ où θ est l'angle de la rotation

rem: La matrice d'une rotation est donc indépendante de la bond choisie
rem: l'endomorphisme identité correspond à la rotation d'angle nul

théorème 19: propriétés des réflexions

Soit f la réflexion d'axe $D = \vec{u}$. Alors:

1. L'ensemble des vecteurs invariants(E_1) est de dimension 1, c'est la droite D
2. $\det f = -1$ (càd f est une isométrie négative)
3. Il existe une bond de E dans laquelle f a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

rem: pour une réflexion, la matrice dépend de la bond choisie

théorème 20: composée de rotations dans le plan

Soient θ et θ' deux réels.

1. $r_\theta \circ r_{\theta'} = r_{\theta'} \circ r_\theta = r_{\theta+\theta'}$
2. r_θ est bijective, et $r_\theta^{-1} = r_{-\theta}$

exemple 14:

Montrer les résultats suivants:

1. la composée de deux réflexions est une rotation
2. la composée d'une réflexion et d'une rotation est une réflexion
3. toute rotation peut s'écrire comme la composée de deux réflexions, l'une d'elle étant choisie arbitrairement

exemple 15:

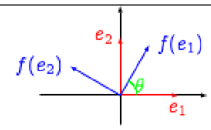
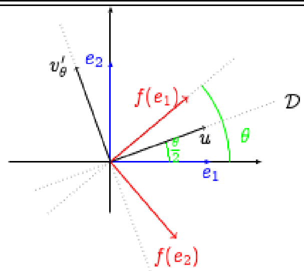
On se place dans $E = \mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne usuelle.
Donner la matrice de:

1. la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ dans une bond.
2. la symétrie orthogonale par rapport à $\Delta = Vect((1,1))$

remarque 10 (*A mémoriser*)

Soit f une isométrie vectorielle de E, avec $\dim E = 2$.

- *f est une rotation d'angle NON nul ssi le seul vecteur invariant est $\vec{0}$*
- *f est une réflexion ssi l'ensemble des vecteurs invariants est une droite*
- *f estl'identité (rotation d'angle nul) ssi tout vecteur de E est invariant*

Nature de l'isométrie	$Sp_{\mathbb{R}}(f)$	s.e. propre	Matrice BOND quelconque	Schéma
Identité	$\{1\}$	$E_1(f) = \mathbb{R}^2$	$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	
-Identité	$\{-1\}$	$E_{-1}(f) = \mathbb{R}^2$	$I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	
Rotation d'angle $\theta \neq 0, \pi[2\pi]$	$\emptyset$		$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$	
Réflexion d'axe Vect(u)	$\{-1, 1\}$	$E_1(f) = \text{Vect}(u)$ $E_{-1}(f) = (\text{Vect}(u))^{\perp}$	$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$	

5 Description du groupe orthogonal en dimension 3

Dans ce paragraphe, $(E, < , >)$ désigne un espace euclidien de dimension 3.

définition 9: rotation dans l'espace

Soit θ un réel, $\vec{w}$ un vecteur unitaire et $D = \text{vect}(\vec{w})$ une droite(orientée) de E.
On appelle ROTATION D'AXE D ET D'ANGLE θ, et on note $r_{D,\theta}$, l'unique endomorphisme de E dont la matrice dans une bond $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

rem:

1. $r_{D,\theta}(\vec{w}) = \vec{w}$ *(la restriction de $r_{D,\theta}$ à la droite D est l'identité)*
2. *la restriction de $r_{D,\theta}$ au plan $D^{\perp}$ est la rotation d'angle θ*

remarque 11 (***une définition équivalente***)

Soit θ un réel, $\vec{w}$ un vecteur unitaire et $D = \mathrm{vect}(\vec{w})$ une droite(orientée) de E.
On appelle ROTATION D'AXE D ET D'ANGLE θ, *et on note $r_{D,\theta}$, l'unique endomorphisme de E dont la matrice dans une bond $\mathcal{B} = (\vec{w},\vec{u},\vec{v})$ est* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

remarque 12

- *L'identité est une rotation particulière, c'est la rotation d'angle nul.*
- *La rotation d'axe (D) et d'angle π est encore appelé retournement d'axe (D)*
- *La rotation d'axe $\mathrm{vect}(\vec{w})$ et d'angle θ est aussi la rotation d'axe $\mathrm{vect}(-\vec{w})$ et d'angle $-\theta$*

théorème 21: description de $SO_3(\mathbb{R})$ (HP)

Il y a équivalence entre:

i) M est une matrice de $SO_3(\mathbb{R})$

ii) il existe une matrice $P \in SO_3(\mathbb{R})$ et un réel θ tels que $M = P.\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.P^{-1}$

rem: à noter que la description de $O_3(\mathbb{R})$ est hors-programme

théorème 22: isométries vectorielles positives en dim.3

Lorsque $\dim E = 3$, $SO(E)$ est tout simplement l'ensemble des rotations de E

rem: en dimension quelconque, on appelle ROTATIONS *les isométries vectorielles positives*

théorème 23: propriétés d'une rotation dans un espace euclidien de dim. 3

Soit $r_{D,\theta}$ une rotation d'axe $D = \mathrm{vect}\,\vec{w}$ et d'angle θ.

1. $\det r_{D,\theta} = 1$
2. 1 est valeur propre de $r_{D,\theta}$
3. si $\theta = 0$ alors $r_{D,\theta} = id_E$
4. si $\theta \neq 0$ alors 1 est l'unique valeur propre réelle et E_1 (l'ensemble des vecteurs invariants) est une droite vectorielle, qui n'est autre que l'axe de la rotation D
5. si $\theta = \pi$ alors il existe une bond dans laquelle la matrice de $r_{D,\theta}$ est $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

exemple 16:

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du psu,
on considère $\vec{\omega}$ un vecteur unitaire et l'application $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3, f(\vec{x}) = \vec{\omega} \wedge \vec{x} + < \vec{\omega}, \vec{x} > \vec{\omega}$

1. Montrer que f est un endomorphisme orthogonal
2. Ecrire la matrice de f dans une bond bien choisie, et en déduire la nature de f

théorème 24: propriétés d'une réflexion dans l'espace

Soit f une réflexion. Alors:

1. L'ensemble des vecteurs invariants ($E_1(f)$) est de dimension 2, c'est le plan par rapport auquel se fait la symétrie orthogonale
2. $\det f = -1$
3. Il existe une bond $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ de E dans laquelle la réflexion a pour matrice $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

   où $(\vec{u},\vec{v})$ est une bon du plan $E_1(f)$ et $\vec{w}$ est un vecteur directeur de la droite orthogonale à ce plan, c'est à dire un vecteur directeur de $E_{-1}(f)$

exemple 17:

Ecrire la matrice dans la base
canonique de $\mathbb{R}^3$,
de la réflexion par
rapport au plan d'éq. $x + 2y - z = 0$

théorème 25: classification des isométries vectorielles en dimension trois(HP)

Dans un espace de dimension trois, il existe 3 et seulement 3 types d'isométries vectorielles:

1. les rotations (ce sont les isométries positives)
2. les réflexions
3. les anti-rotations: les composées d'une réflexion et d'une rotation, l'axe de la rotation (d'angle non nul) étant orthogonale au plan de la réflexion

rem: les types 2 et 3 (qui constituent les isométries négatives) pourraient être regroupés dans un unique type (à savoir composée d'une réflexion et d'une rotation avec axe de la rotation orthogonal au plan de la réflexion) si l'on considère une rotation d'angle éventuellement nul.

exemple 18: rotation=produit de deux réflexions

On considère $\mathcal{B} = (\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ une bond de E.
On note :

- $\vec{n}_1 = \vec{e}_1$
- $\vec{n}_2 = \cos\alpha.\vec{e}_1 + \sin\alpha.\vec{e}_2$ où α est un réel fixé.
- P_1 [resp. P_2] le plan de vecteur normal $\vec{n}_1$ [resp. $\vec{n}_2$]
- s_1 [resp. s_2] la réflexion par rapport au plan P_1 [resp. P_2]

1. Ecrire les matrices dans la base $\mathcal{B}$ de s_1, s_2 et $s_2 \circ s_1$
2. Reconnaitre l'isométrie vectorielle $s_2 \circ s_1$

exemple 19:

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et de sa base canonique $\mathcal{C} = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On considère f, la rotation d'angle $\theta = \frac{\pi}{4}$ et d'axe la droite dirigée par $\vec{i} + \vec{k}$

1. Donner la matrice de f dans une base bien adaptée. Préciser cette base bien adaptée.
2. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$

exemple 20:

reconnaître la nature et les éléments de l'application linéaire f canoniquement associée aux matrices

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

méthode 1: détermination des éléments d'une rotation

Soit E un espace euclidien dimension 3.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et M la matrice de f dans une bond.

1. On vérifie que M est une matrice orthogonale
   (ce qui permet d'affirmer que f est une isométrie vectorielle)
   - soit en vérifiant que $M^T.M = I_3$
   - soit en vérifiant que les vecteurs colonnes de M forment une famille orthonormée de $\mathbb{R}^3$ pour le ps canonique
2. On vérifie que f est une isométrie vectorielle directe
   - soit en vérifiant que $\det(M) = 1$
   - soit en calculant le premier terme de $C_1 \wedge C_2$ afin de vérifier que $C_1 \wedge C_2 = C_3$
3. Pour déterminer l'axe D de la rotation, on détermine les vecteurs invariants. On calcule un vecteur invariant unitaire $\vec{w}$ tel que $D = \text{vect}\,\vec{w}$
4. pour déterminer l'angle θ, on commence par écrire que $\text{tr}(f) = \text{tr}(M) = 1 + 2\cos\theta$ ce qui permet de déterminer θ au signe près.
   Pour déterminer le signe, on choisit un vecteur $\vec{u}$ unitaire orthogonal à $\vec{w}$, et ensuite
   - soit on calcule $\vec{u} \wedge f(\vec{u})$ ce qui permet de connaître le signe du sinus, donc de θ car $\vec{u} \wedge f(\vec{u}) = ||\vec{u}||^2.\sin\theta.\vec{w}$
   - soit on calcule $\det(\vec{u}, f(\vec{u}), \vec{w})$ ce qui permet de connaître le signe du sinus, donc de θ, car $\det(\vec{u}, f(\vec{u}), \vec{w}) = \sin\theta$

méthode 2: détermination des éléments d'une réflexion

Soit E un espace euclidien dimension 3.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et M la matrice de f dans une bond.

1. On vérifie que M est une matrice orthogonale
   (ce qui permet d'affirmer que f est une isométrie vectorielle)
   - soit en vérifiant que $M^T.M = I_3$
   - soit en vérifiant que les vecteurs colonnes de M forment une famille orthonormée de $\mathbb{R}^3$ pour le ps canonique
2. On vérifie que f est une réflexion
   - soit en vérifiant que E_1 est de dimension deux
   - soit en constatant que M est une matrice symétrique réel et en utilisant alors le théorème spectral(voir plus loin)
   - ATTENTION! Il ne suffit pas de vérifier que $\det f = -1$
3. f est alors la réflexion par rapport au plan E_1 (càd l'ensemble des vecteurs invariants)

remarque 13 (*Attention!*)

Lorsque $f \in O(E)$ avec $\dim E = 3$, on a les implications suivantes:

$$f \text{ est une rotation d'angle } \theta \neq 0 \iff \dim E_1 = 1 \iff \det f = 1$$
$$f \text{ est une réflexion} \iff \dim E_1 = 2 \implies \det f = -1$$

6 Matrices symétriques réelles

On rappelle que:

- une matrice M est dite SYMÉTRIQUE lorsque $M^T = M$
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices symétriques à coefficients réels d'ordre n
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sev (de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$)

théorème 26: théorème spectral

Soit M une matrice symétrique réelle.(càd $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$) . :

1. les valeurs propres de M sont toutes réelles.
2. les sous-espaces propres de M sont orthogonaux deux à deux.
3. M est diagonalisable à l'aide d'une matrice de passage orthogonale.
   C'est à dire : $\boxed{\exists P \in O_n(\mathbb{R}), \exists D \text{ diagonale}, M = PDP^{-1}}$

rem: lorsqu'une matrice est diagonalisable à l'aide d'une matrice de passage orthogonale on dit que la matrice es ORTHOGONALEMENT DIAGONALISABLE

rem: les matrices symétriques complexes ne vérifient pas cette propriété

exemple 21:

Démontrer le théorème ci-dessus dans le cas où $n = 2$

exemple 22:

Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 3+i & 5 & 4 \\ 5 & 1+i & -1 \\ 4 & -1 & -2+i \end{pmatrix}$ est inversible.

exemple 23:

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^n = 1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n = 1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
3. Soit M une matrice symétrique réelle telle que $M^{2032} = I_n$. Que dire de M^2 ?
4. Soit M une matrice symétrique réelle telle que $M^{2033} = I_n$. Que dire de M ?

exemple 24:

Soit $A = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 23 & 2 & -4 \\ 2 & 26 & 2 \\ -4 & 2 & 23 \end{pmatrix}$. (On trouve $\chi_A(X) = X^3 - 8X^2 + 21X - 18 = (X-2)(X-3)^2$.)

Diagonaliser A en utilisant une matrice orthogonale de déterminant positif.

(Sera-ce plus simple de déterminer déjà E_3 ou E_2 ?)

7 Annexe

démonstration du théorème 9

i) trivial par définition de ces 3 ensembles

ii) $I_n^T.I_n = I_n.I_n = I_n$ donc $I_n \in O_n(\mathbb{R})$

iii) Soient $(A,B) \in O_n(\mathbb{R})^2$.

- **première démo: en utilisant le théo 5.**
  On note
  - $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$: on sait que c'est une B.O.N. pour le p.s.u
  - f l'endo. cano. asso. à A
  - g l'endo. cano. asso. à B

  On sait alors d'après le théo 5 que f et g sont des isométres vectorielles de $\mathbb{R}^n$, càd $(f,g) \in O(\mathbb{R}^n)^2$
  On sait aussi que $O(\mathbb{R}^n)$ est stable par la loi de composition $\circ$, on a donc $f \circ g \in O(\mathbb{R}^n)$.
  Le théorème 5 nous dit alors que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f \circ g) \in O_n(\mathbb{R})$.
  Or $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f \circ g) = AB$.
  On a bien montré que $AB \in O_n(\mathbb{R})$

- **seconde démo: en restant avec les matrices**
  Notons $C = AB$.
  On a
  $$C^T.C = (AB)^T.(AB) = (B^TA^T)AB = B^T(A^TA)B$$
  Comme A est une matrice orthogonale on a $A^TA = I_n$ d'où
  $$C^T.C = B^T.I_n.B = B^T.B = I_n \qquad \text{car } B \text{ matrice orthogonale}$$
  On a bien prouvé que $C = AB \in O_n(\mathbb{R})$

iv) Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$

- **première démo: en utilisant la théo 5.**
  On note
  - $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$: on sait que c'est une B.O.N. pour le p.s.u
  - f l'endo. cano. asso. à A

  On sait d'après le théo 5 que f est une isométrie vectorielle.
  On sait alors d'après le théo 3 que f est f^{-1} est encore une isométrie vectorielle.
  Le théorème 5 nous dit alors que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) \in O_n(\mathbb{R})$.
  Or $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^{-1} = A^{-1}$.
  On a bien montré que $A^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$

- **seconde démo: en restant avec les matrices**
  Notons $C = A^{-1}$.
  On sait que
  $$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$
  On a
  $$C^T.C = (A^{-1})^T.A^{-1} = (A^T)^{-1}.A^{-1} = (A.A^T)^{-1}$$
  Comme A est une matrice orthogonale, on a $A.A^T = I_n$, et ainsi
  $$C^T.C = I_n^T = I_n$$
  On a bien prouvé que $C = A^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$