ESPACES PREHILBERTIENS REELS

Dans ce chapitre, E désignera un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie ou pas.

Table des matières

1 Espaces préhilbertiens réels **2**
1.1 produit scalaire 2
1.2 norme 4

2 Orthogonalité **6**

3 Bases orthonormales, projection orthogonale **9**

4 Cas particulier d'un espace euclidien **14**

5 Distance à un sev de dimension finie **16**

6 Annexe **17**

Dans $\mathbb{R}^2$ *et dans* $\mathbb{R}^3$*, nous employons couramment le produit scalaire défini par* $\vec{x}.\vec{y} = ||\vec{x}||.||\vec{y}||.\cos(\widehat{\vec{x},\vec{y}})$

Il s'agit d'un produit scalaire particulier que l'on appelle LE PRODUIT SCALAIRE USUEL *sur* $\mathbb{R}^2$ *ou* $\mathbb{R}^3$

Dans ce polycopié, nous allons donner une définition de produit scalaire plus générale qui nous permettra d'effectuer des produits scalaires entre des polynômes, entre des matrices ou entre des fonctions, ou également entre des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ *avec* $n \geqslant 4$ *!*

✖ *Attention* ✖
une double somme de même indice $\sum\limits_{i=\dots}^{\dots}\sum\limits_{i=\dots}^{\dots}\dots$ *N'a AUCUN sens!*

1 Espaces préhilbertiens réels

1.1 produit scalaire

définition 1: forme bilinéaire

On appelle FORME BILINÉAIRE SUR E toute application $<.|.>$ définie sur $E^2 \to \mathbb{R}$ telle que :

i) pour tout $\vec{x} \in E$ fixé, l'application $\boxed{\begin{array}{lcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{y} & \longmapsto & <\vec{x},\vec{y}> \end{array}}$ est linéaire.[linéarité à droite]

On note parfois cette application $<\vec{x},.>$

ii) pour tout $\vec{y} \in E$ fixé, l'application $\boxed{\begin{array}{lcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{x} & \longmapsto & <\vec{x},\vec{y}> \end{array}}$ est linéaire.[linéarité à gauche]

On note parfois cette application $<.,\vec{y}>$

rem: on a déjà vu que le déterminant était une application blinéaire sur $\mathbb{R}^2$

remarque 1 (*règle de calcul*)

Par bilinéarité, on peut 'développer':

$$\begin{aligned} <a\vec{x}+b\vec{y}\,,c\vec{z}+d\vec{t}> &= a<\vec{x},c\vec{z}+d\vec{t}> +b<\vec{y},c\vec{z}+d\vec{t}> \\ &= a\left(c<\vec{x},\vec{z}> +d<\vec{x},\vec{t}>\right) + c\left(<\vec{y},\vec{z}> +d<\vec{y},\vec{t}>\right) \\ &= ac<\vec{x},\vec{z}> +ad<\vec{x},\vec{t}> +bc<\vec{y},\vec{z}> +bd<\vec{y},\vec{t}> \end{aligned}$$

et d'une manière plus générale

$$<\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{x}_i,\sum_{j=1}^{m}\mu_j\vec{y}_j>=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\lambda_i\mu_j<\vec{x}_i,\vec{y}_j>$$

On aura aussi

$$\forall\vec{x}\in E,\forall\vec{y}\in E,\ <\vec{x},\vec{0}>=<\vec{0},\vec{y}>=0$$

définition 2: produit scalaire

On dit que $<,>$ est UN PRODUIT SCALAIRE SUR E lorsque :

i) $<,>$ est une forme bilinéaire sur E.

ii) $<,>$ est <u>symétrique</u> : $\forall(\vec{x},\vec{y})\in E^2,\ <\vec{x},\vec{y}>=<\vec{y},\vec{x}>$

iii) $<,>$ est <u>positive</u> : $\forall\vec{x}\in E,\ <\vec{x},\vec{x}>\geqslant 0$

iv) $<,>$ est <u>définie</u> : $\forall\vec{x}\in E, (<\vec{x},\vec{x}>=0 \iff \vec{x}=\vec{0})$

remarques:

- Attention! le terme **définie** n'a ici aucun rapport avec l'ensemble de définition.
- Suivant les ouvrages, le produit scalaire des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sera noté $<\vec{x},\vec{y}>$ ou $\Phi(\vec{x},\vec{y})$ ou $(\vec{x}|\vec{y})$ ou plus simplement $\vec{x}.\vec{y}$
- Les deux équivalences iii) et iv) peuvent encore s'écrire

$$\forall\vec{x}\in E,\ <\vec{x},\vec{x}>\geqslant 0 \text{ avec égalité ssi } \vec{x}=\vec{0}$$

- Suivant les exercices, le produit scalaire est noté $<x,y>$ ou $(x|y)$ ou $\varphi(\vec{x},\vec{y})$ encore $x.y$

théorème 1:

Soit $\varphi : E\times E\to\mathbb{R}$.
Si φ est linéaire à gauche et symétrique alors φ est bilinéaire

définition 3: espace préhilbertien réel, espace euclidien

- On appelle ESPACE PRÉHILBERTIEN RÉEL tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel E muni d'un produit scalaire. On le note $(E, < , >)$.
- On appelle ESPACE EUCLIDIEN tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie muni d'un produit scalaire. On le note $(E, < , >)$.

exemple 1: (IMPORTANT) produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

On définit le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ de la manière suivantes:
pour $\vec{x} = (x_1, \dots ,x_n)$ et $\vec{y} = (y_1, \dots ,y_n)$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on pose

- **expression analytique:** $< \vec{x},\vec{y} >= \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$
- **expression matricielle:** $< \vec{x},\vec{y} >= X^T.Y$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Remarque:

- *il est d'usage d'identifier $\mathbb{R}^n$ et l'espace des matrices unicolonnes correspondant, c'est à dire que l'on identifiera le vecteur $(1,2,3)$ et la matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$*
- *de même il est d'usage d'identifier l'ensemble des matrices mono-coefficient $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}$, c'est à dire que l'on identifiera la matrice (4) avec le réel 4*
- *avec ces usages, on peut alors écrire avec le produit scalaire usuel*

$$< (1,2,3),(2,-1,1) >= 3 = (3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}^T . \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

exemple 2: (IMPORTANT)produit scalaire sur l'ev des fonctions continues sur un segment

Pour toutes fonctions f et g de $C^0([a,b],\mathbb{R})$, on pose $< f,g >= \int_{[a,b]} f(t)g(t)dt$

1. Montrer que $< , >$ est un produit scalaire sur $C^0([a,b],\mathbb{R})$.
2. $(C^0([a,b],\mathbb{R}), < , >)$ est-il un espace euclidien?

méthode 1: arguments souvent utilisés pour justifier le caractère *défini*

- Une somme de carrés de réels est nulle ssi chaque terme est nul
- Une somme de termes positifs est nulle ssi chaque terme est nul
- Un polynôme est le polynôme nul ssi il possède une infinité de racines
- Un polynôme de degré $n \geqslant 1$ possède n racines comptées avec leurs multiplicités
- Si un polynôme de degré au plus n possèdent $n + 1$ racines distinctes alors c'est le polynôme nul
- Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I. On a l'équivalence

$$\int_I f(t)dt = 0 \iff f \text{ est identiquement nulle sur } I$$

- Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On a l'équivalence

$$\int_I |f(t)|dt = 0 \iff f \text{ est identiquement nulle sur } I$$

exemple 3: produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (Classique, à savoir refaire)

Pour toutes matrices A et B de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\phi(A,B) = \mathrm{tr}(A^T.B)$

1. Montrer que ϕ est bilinéaire et symétrique
2. Montrer que $\phi(A,A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$
3. En déduire que ϕ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

exemple 4: d'autres exemples classiques

1. $E = \mathbb{R}[X]$ et $(P|Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t).Q(t).dt$
2. $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $(P|Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$
3. $E = \mathbb{R}[X]$ et $(P|Q) = \displaystyle\int_0^{\infty} P(t).Q(t).e^{-t}.dt$
4. $E = C^0([a,b],\mathbb{R})$ et $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(t).g(t).e^t.dt$

Faire des exemples de calculs

1.2 norme

définition 4: norme (H.P.)

Soit N une application de E à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
On dit que N est une NORME SUR E lorsque :

i) $\forall \vec{x} \in E, N(\vec{x}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$
ii) $\forall \vec{x} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda\vec{x}) = |\lambda|.N(\vec{x})$
iii) $\forall (\vec{x},\vec{y}) \in E^2, N(\vec{x}+\vec{y}) \leqslant N(\vec{x}) + N(\vec{y})$

remarques:

- *si* $\vec{x} \neq \vec{0}$ *alors* $\dfrac{1}{||\vec{x}||}.\vec{x} = \dfrac{\vec{x}}{||\vec{x}||}$ *est un vecteur unitaire*
- *une norme n'est pas une application linéaire...*
- $||\vec{x} - \vec{y}||$ *s'interprète alors comme la distance entre* $\vec{x}$ *et* $\vec{y}$*,*

théorème 2: à démontrer après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(E, < , >)$ un espace préhilbertien réel.
L'application $\boxed{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \vec{x} & \longmapsto & \sqrt{<\vec{x},\vec{x}>} \end{array}}$ est une norme sur E.

définition 5: norme associée au produit scalaire, norme préhilbertienne

Soit $(E, <\,,\,>)$ un espace préhilbertien réel.
On appelle:

- NORME ASSOCIÉE AU PRODUIT SCALAIRE, et on note $||.||$, l'application définie sur E par

$$\boxed{\forall \vec{x} \in E\,,\, ||\vec{x}|| = \sqrt{<\vec{x},\vec{x}>}}$$

- *DISTANCE ASSOCIÉE AU PRODUIT SCALAIRE $<\,,\,>$ l'application* $\boxed{\begin{array}{llll} d: & E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (\vec{x},\vec{y}) & \longmapsto & ||\vec{x}-\vec{y}|| \end{array}}$

théorème 3: relations entre produit scalaire et norme

$<\,,\,>$ étant un produit scalaire sur E, et $||.||$ désignant la norme associée, on a :

i) $\forall (\vec{x},\vec{y}) \in E^2, ||\vec{x}+\vec{y}||^2 = ||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2 + 2 <\vec{x},\vec{y}>$
ii) $\forall (\vec{x},\vec{y}) \in E^2, ||\vec{x}-\vec{y}||^2 = ||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2 - 2 <\vec{x},\vec{y}>$

A partir de ces formules, on doit savoir retrouver

- $\forall (\vec{x},\vec{y}) \in E^2, ||\vec{x}+\vec{y}||^2 + ||\vec{x}-\vec{y}||^2 = 2(||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2)$ (identité du parallélogramme)
- $\forall (\vec{x},\vec{y}) \in E^2, ||\vec{x}+\vec{y}||^2 - ||\vec{x}-\vec{y}||^2 = 4 <\vec{x},\vec{y}>$ (identité de polarisation)

exemple 5: généralisation

Si $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ désignent n vecteurs, on a

$$||\sum_{i=1}^{n} \vec{x}_i||^2 =$$

théorème 4: Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité

Soit $(E, <\,,\,>)$ un espace préhilbertien réel.
On a alors :

$$\boxed{\forall (\vec{x},\vec{y}) \in E^2, |<\vec{x},\vec{y}>| \leqslant ||\vec{x}||.||\vec{y}|| = \sqrt{<\vec{x},\vec{x}>}.\sqrt{<\vec{y},\vec{y}>}}$$

avec égalité ssi $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont colinèaires.

"la valeur absolue du produit scalaire est majorée par le produit des normes et il y a égalités uniquement lorsque les vecteurs sont colinéaires"

théorème 5: Inégalité triangulaire, cas d'égalité

Soit $(E, <\,,\,>)$ un espace préhilbertien réel.
On a

$$||\vec{x}+\vec{y}|| \leqslant ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||$$

avec égalité ssi $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont colinéaires de même sens.(càd $\vec{x} = \vec{0}$ ou $\exists \lambda \geqslant 0, \vec{y} = \lambda.\vec{x}$)

exemple 6:

On note $E=\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $<P,Q>=\int_0^1 P(t)Q(t)dt$

1. Justifier que l'application ci-dessus définit bien un produit scalaire sur E
2. En déduire que pour tout polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$ on a $\int_0^1 P(t)dt \leqslant \sqrt{\int_0^1 P^2(t)dt}$

exemple 7:

1. Montrer que pour tout $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$, on a donc $|ab-cd|\leqslant\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{b^2+d^2}$
2. Montrer que pour tout $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$, $(x+2y+3z+4t)^2\leqslant 30(x^2+y^2+z^2+t^2)$
3. Montrer que pour toute fonction f continue sur le segment $[a,b]$, on a $|\int_{[a,b]} f|\leqslant\sqrt{b-a}.\sqrt{\int_{[a,b]} f^2}$

   Quand y a-t-il égalité?

2 Orthogonalité

Dans ce paragraphe, on considérera donné un espace préhilbertien réel $(E,<\,,\,>)$.

définition 6:

i) On dit que LES VECTEURS $\vec{x}$ ET $\vec{y}$ SONT ORTHOGONAUX lorsque $<\vec{x},\vec{y}>=0$

ii) On dit que LES SOUS-ESPACES F ET G DE E SONT ORTHOGONAUX lorsque $\forall(\vec{x},\vec{y})\in F\times G$, $<\vec{x},\vec{y}>=0$

dans le premier cas, on note $\vec{x}\perp\vec{y}$ et dans le second $F\perp G$

exemple 8: un exemple simple dans $\mathbb{R}^3$

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et de sa base canonique $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$
Les plans vect$(\vec{i},\vec{j})$ et vect$(\vec{j},\vec{k})$ sont-ils orthogonaux?

exemple 9:

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, et on considère $\vec{a}=(1,2,-1)$ et $F=\text{vect}\,\vec{a}$

1. Donner des vecteurs orthogonaux à $\vec{a}$
2. Donner des sev orthogonaux à F

exemple 10: avec le produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de l'exemple 3

1. Dans le cas où $n=2$, déterminer les matrices B qui sont orthogonales à $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}$
2. Montrer que $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ sont deux sev orthogonaux.

définition 7: famille orthogonale ou orthonormale

Soit $(\vec{x}_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.

i) On dit que $(\vec{x}_i)_{i\in I}$ est UNE FAMILLE ORTHOGONALE lorsque $\forall i\neq j$, $<\vec{x}_i,\vec{x}_j>=0$

ii) On dit que $(\vec{x}_i)_{i\in I}$ est UNE FAMILLE ORTHONORMALE lorsque $\forall i,j$, $<\vec{x}_i,\vec{x}_j>=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

- *une famille orthogonale est ainsi une famille de vecteurs orthogonaux 2 à 2*
- *une famille orthonormale est une famille orthogonale de vecteurs unitaires*

exemple 11: dans un espace de fonctions, qui formalise les séries de Fourier

Soit $E = C^0([0,2\pi],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $< f,g >= \int_{[0,2\pi]} fg$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : t \mapsto \cos(nt)$
Montrer la famille $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est une famille de vecteurs orthogonaux deux à deux. Sont-ce des vecteurs unitaires?

théorème 6:

Le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à tous les autres

théorème 7: une nouvelle manière de justifier que deux sev sont en somme directe!

Si F et G sont deux sous-espaces orthogonaux **alors** ils sont en somme directe (càd $F \cap G = \{\vec{0}\}$)

En particulier, F et $F^\perp$ sont en somme directe

définition 8: orthogonal d'un sev

Soit F un sev de E.
On appelle SEV ORTHOGONAL DE F ou plus simplement ORTHOGONAL DE F l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tout vecteur de F. On le note $F^\perp$.

$$\boxed{F^\perp = \{\vec{x} \in E \,|\, \forall \vec{a} \in F, < \vec{x},\vec{a} >= 0\}}$$

rem: on l'appelle sev orthogonal de F car c'est effectivement un sev (à démontrer)!
rem: on a $\{\vec{0}\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{\vec{0}\}$

remarque 2 (***précision TRÈS IMPORTANTE***)

- *$F \perp G$ **ne signifie pas** que $G = F^\perp$ ou $F = G^\perp$*
- *en revanche, on a $F \perp G \iff F \subset G^\perp \iff G \subset F^\perp$*

théorème 8:

Soient $F = \text{vect}(\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n})$.
On a l'équivalence

$$\boxed{\vec{y} \in F^\perp \iff \forall i \in [\![1,n]\!],\ < \vec{y},\vec{x}_i >= 0}$$

"un vecteur $\vec{y}$ est orthogonal à tout vecteur de F ssi $\vec{y}$ est orthogonal à une famille génératrice de F"

méthode 2: comment déterminer l'orthogonal d'un sev F

Si $F = \text{vect}(\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n})$, on a $F^\perp = \{\vec{x} \in E | \forall i \in [\![1,n]\!],\ < \vec{x},\vec{x}_i >= 0\}$

C'est toujours la même idée lorsque l'on "est" en dimension finie: il suffit de déterminer les vecteurs qui sont orthogonaux à une famille génératrice de F

1. Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, déterminer l'orthogonal de la droite dirigée par $(1,2,-1)$
2. Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire 1 de l'exemple 4, déterminer l'orthogonal de $F = \vec{(}1,X)$

théorème 9:

Soient $F = \text{vect}(\overrightarrow{x_1},\dots,\overrightarrow{x_n})$ et $G = \text{vect}(\overrightarrow{y_1},\dots,\overrightarrow{y_p})$.
On a l'équivalence:

$$\boxed{F \text{ et } G \text{ sont orthogonaux} \iff \forall i \in [\![1,n]\!], \forall j \in [\![1,p]\!],\ <\vec{x}_i,\vec{y}_j>=0}$$

càd: "deux sev sont orthogonaux ssi leurs familles génératrices sont orthogonales"

exemples:
Pour vérifier que deux droites sont orthogonales, il suffit de vérifier que leurs vecteurs directeurs le sont.
Pour vérifier que la droite $D = \text{vect}(\vec{x}_1)$ *et le plan* $P = \text{vect}(\vec{y}_1,\vec{y}_2)$ *sont orthogonaux, il suffit de vérifier que* $<\vec{x}_1,\vec{y}_1>=<\vec{x}_1,\vec{y}_2>=0$

méthode 3: comment montrer que deux sev sont orthogonaux

Il suffit de vérifier que leurs familles génératrices sont orthogonales.

Exemple:
Dans $\mathbb{R}^4$ *muni du produit scalaire usuel, on considère les deux sev*

$$F = \text{vect}((-2,1,0,0),(-3,-1,-1,1)) \text{ et } G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | \begin{cases} -2x+y & =0 \\ x+z-t & =0 \end{cases}\}$$

1. Montrer qu'ils sont orthogonaux.
2. Définir G *… d'une autre manière mais identique*

théorème 10: une nouvelle manière de justifier qu'une famille est libre

i) Une famille orthogonale <u>ne contenant pas le vecteur nul</u> est une famille libre.
ii) Une famille orthonormale est une famille libre.

exemple 12: exemples IMPORTANTS de bases orthonormales

i) La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une famille orthonormale pour le produit scalaire usuel

ii) La base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une famille orthonormale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de l'exemple 3

démonstration de ii)
Notons E_{ij} la matrice élémentaire d'indice (i,j)

- On a vu que $E_{ji}.E_{kl} =$

exemple 13:

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.
On note $F = \text{vect}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ avec $\vec{x}_1 = (1,1,-1)$ et $\vec{x}_2 = (1,2,0)$

1. Déterminer une base orthonormée de F
2. La compléter en une BON de $\mathbb{R}^3$

théorème 11: théorème de Pythagore

Si $(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n})$ est une famille orthogonale **alors** $\begin{cases} ||\vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n||^2 = ||x_1||^2 + \cdots + ||x_n||^2 \\ \text{càd} \\ ||\sum\limits_{i=1}^{n} \vec{x}_i||^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} ||\vec{x}_i||^2 \end{cases}$

Dans le cas particulier où $n = 2$ on a le résultat plus précis:

$$\boxed{\vec{x}_1 \text{ et } \vec{x}_2 \text{ sont orthogonaux } \iff ||\vec{x}_1 + \vec{x}_2||^2 = ||\vec{x}_1||^2 + ||\vec{x}_2||^2}$$

théorème 12:

Soient F et G deux sev d'un espace préhilbertien $(E, < , >)$.

i) Si $F \subset G$ alors $G^\perp \subset F^\perp$

ii) $F \subset (F^\perp)^\perp$

exemple 14:

Soient F_1 et F_2 deux sev.
Montrer que:

1. $(F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp$
2. $F_1^\perp + F_2^\perp \subset (F_1 \cap F_2)^\perp$

3 Bases orthonormales, projection orthogonale

exemple 15: dans $\mathbb{R}^2$ muni du ps usuel

Sans calcul, dessiner et donner la famille
orthonormale issue du procédé de Schmidt
à partir de la famille libre $(\vec{i} + \vec{j}, 2\vec{i})$

exemple 16: dans $\mathbb{R}^3$ muni du ps usuel

Sans calcul, dessiner et donner la famille
orthonormale issue du procédé de Schmidt
à partir de la famille libre $(\vec{i} + \vec{j}, 2\vec{i}, \vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k})$

exemple 17: géométrie dans l'espace

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, appliquer le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = (\vec{i} + \vec{k}, -2\vec{i} + 3\vec{k}, \vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$

théorème 13: BON=base orthonormée

Si E est un espace euclidien (autre que $\{\vec{0}\}$) alors E possède une BON.

Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt permet de calculer des familles orthonormées.

théorème 14: procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $(\overrightarrow{x_1},\dots,\overrightarrow{x_p})$ une famille libre de p vecteurs de E.

- *on pose* $\boxed{\vec{e}_1 = \dfrac{\vec{x}_1}{||\vec{x}_1||}}$ *(on norme tout simplement le vecteur $\vec{x}_1$)*
- *et l'on construit de proche en proche $\vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots \vec{e}_n$ avec la formule*
  - $\vec{\varepsilon}_k = \vec{x}_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1} < \vec{x}_k,\vec{e}_i > \vec{e}_i$
  - $\vec{e}_k = \dfrac{\vec{\varepsilon}_k}{||\vec{\varepsilon}_k||}$

  La famille $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_p)$ est alors une bon de $\mathrm{vect}(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_p)$
- L'idée du procédé est la suivante:
  - on norme $\vec{x}_1$ pour obtenir un vecteur unitaire $\vec{e}_1$
  - on retranche à $\vec{x}_2$ sa composante suivant $\vec{e}_1$ puis on norme le vecteur ainsi obtenu.
  - on retranche à $\vec{x}_3$ sa composante suivant $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ puis on norme le vecteur ainsi obtenu.
- On a au final la formule ci-dessous

$$\boxed{\vec{e}_k = \frac{\vec{x}_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1} < \vec{x}_k,\vec{e}_i > \vec{e}_i}{||\vec{x}_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1} < \vec{x}_k,\vec{e}_i > \vec{e}_i||} = \frac{\vec{x}_k - p_{F_{k-1}}(\vec{x}_k)}{||\vec{x}_k - p_{F_{k-1}}(\vec{x}_k)||}}$$

où $F_k = \mathrm{vect}(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_k}) = \mathrm{vect}(\overrightarrow{x_1},\dots,\overrightarrow{x_k})$ et p_{F_k} désigne la projection orthogonale sur F_k

théorème 15: expression des coordonnées dans une bon

Soit $(E, < , >)$ un espace euclidien et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})$ une base orthonormale de E.

i) Pour tout vecteur $\vec{x} \in E$ on a

$$\boxed{\vec{x} =< \vec{x},\vec{e}_1 > \vec{e}_1 + \cdots + < \vec{x},\vec{e}_n > \vec{e}_n = \sum_{i=1}^{n} < \vec{x},\vec{e}_i > \vec{e}_i}$$

ce qui revient à dire que $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} < \vec{x},\vec{e}_1 > \\ \vdots \\ < \vec{x},\vec{e}_n > \end{pmatrix}}$

ii) Pour tout $\vec{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i.\vec{e}_i \in E$ et $\vec{y} = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i.\vec{e}_i \in E$ on a

- (expression analytique) : $\boxed{< \vec{x},\vec{y} >= \sum\limits_{i=1}^{n} x_i.y_i}$ et donc $\boxed{||\vec{x}|| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}}$
- (expression matricielle) : $\boxed{< \vec{x},\vec{y} >= X^T.Y}$ et $\boxed{||\vec{x}|| = \sqrt{X^T.X}}$

en notant $X = Mat_{\mathcal{B}}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} < \vec{x},\vec{e}_1 > \\ \vdots \\ < \vec{x},\vec{e}_n > \end{pmatrix}$ *et* $Y = Mat_{\mathcal{B}}(\vec{y}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} < \vec{y},\vec{e}_1 > \\ \vdots \\ < \vec{y},\vec{e}_n > \end{pmatrix}$

rem:
"Dans une bon, les coordonées sont données par un produit scalaire"
"Dans une bon, la formule du produit scalaire est identique à celle du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$!"

exemple 18: bases orthonormées classiques

- La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une BON pour le ps usuel (on dit encore produit scalaire canonique)
- La base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une BON pour le ps $<\ ,\ >$: $(A,B) \mapsto \text{tr}(A^T.B)$

théorème 16:

Soit $(E, <\ ,\ >)$ un espace préhilbertien et soit F un sev de dimension finie de E.
Alors $F \oplus F^\perp = E$

démonstration:
Soit F un sev de dimension finie de E
Notons $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une bon de F
Nous allons montrer par Analyse-Synthèse que $\forall \vec{x} \in E, \exists!(\vec{y},\vec{z}) \in F \times F^\perp, \vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$
Partie Analyse:
Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in F \times F^\perp, \vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$
Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ on a

$$< \vec{x},\vec{e}_i >=< \vec{y}+\vec{z},\vec{e}_i >=< \vec{y},\vec{e}_i > + < \underbrace{\vec{z}}_{F^\perp}, \underbrace{\vec{e}_i}_{F} >=< \vec{y},\vec{e}_i > +0 =< \vec{y},\vec{e}_i >$$

Comme $\mathcal{B}$ est une bon de F, on sait d'après le théorème précédent que $\vec{y} = \sum\limits_{i=1}^{p} < \vec{y},\vec{e}_i > \vec{e}_i$, on en déduit que

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^{p} < \vec{x},\vec{e}_i > \vec{e}_i \quad \text{et} \quad \vec{z} = \vec{x} - \sum_{i=1}^{p} < \vec{x},\vec{e}_i > \vec{e}_i$$

Partie Synthèse:
Nous allons vérifier que:

i) $\vec{y} = \sum\limits_{i=1}^{p} < \vec{x},\vec{e}_i > \vec{e}_i$ est un élément de F
ii) $\vec{z} = \vec{x} - \sum\limits_{i=1}^{p} < \vec{x},\vec{e}_i > \vec{e}_i$ est un élément de $F^\perp$
iii) $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$

i) $\vec{y}$ s'écrit comme une combinaison linéaire de $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p$. Ainsi $\vec{y} \in \text{vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p) = F$
ii) Pour vérifier que $\vec{z} \in F^\perp$ nous allons vérifier que $\vec{z}$ est orthogonal à une famille génératrice de F, en l'occurrence ici la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$.
Soit $k \in [\![1,p]\!]$. On a

$$< \vec{z},\vec{e}_k >=< \vec{x} - \sum_{i=1}^{p} < \vec{x},\vec{e}_i > \vec{e}_i,\vec{e}_k >=< \vec{x},\vec{e}_k > - \sum_{i=1}^{p} < \vec{x},\vec{e}_i >< \vec{e}_i,\vec{e}_k >$$

Or $< \vec{e}_i,\vec{e}_k >= \delta_{ik}$ et donc dans la somme ci-dessus ne reste que le terme d'indice k, d'òu

$$< \vec{z},\vec{e}_k >=< \vec{x},\vec{e}_k > - < \vec{x},\vec{e}_k > \underbrace{< \vec{e}_k,\vec{e}_k >}_{=1} = 0$$

iii) trivial!

théorème 17: ...et définition

Soit $(E, < , >)$ un espace préhilbertien, F un sev de dimension finie de E

1. On appelle PROJECTION ORTHOGONALE SUR F, et on note p_F, la projection sur F parallèlement à $F^\perp$
   C'est à dire l'endomorphisme de E qui à $\vec{x} \in E = F \oplus F^\perp$ associe $\vec{x}_1 \in F$ tel que $\vec{x} - \vec{x}_1 = \vec{x}_2 \in F^\perp$

2. Si $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ est une bon de F, on a

$$\forall \vec{x} \in E\,, p_F(\vec{x}) =< \vec{x},\vec{e}_1 > \vec{e}_1 + \dots + < \vec{x},\vec{e}_p > \vec{e}_p = \sum_{i=1}^{p} < \vec{x},\vec{e}_i > \vec{e}_i$$

rem: son noyau est $F^\perp$ et son image est F

remarque 3 (***FORMULE DU PROJETÉ ORTHOGONAL***)

Le projeté orthogonal d'un vecteur $\vec{x}$ sur F est donné par les formules :

i) lorsque $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ est une base orthonormale de F.

$$\boxed{p_F(\vec{x}) =< \vec{x},\vec{e}_1 > \vec{e}_1 + \dots + < \vec{x},\vec{e}_p > \vec{e}_p = \sum_{k=1}^{p} < \vec{x},\vec{e}_k > \vec{e}_k}$$

ii) lorsque $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ est une base orthogonale de F.

$$\boxed{p_F(\vec{x}) = \frac{< \vec{x},\vec{e}_1 >}{||\vec{e}_1||^2}\vec{e}_1 + \dots + \frac{< \vec{x},\vec{e}_p >}{||\vec{e}_p||^2}\vec{e}_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{< \vec{x},\vec{e}_k >}{||\vec{e}_k||^2}\vec{e}_k}$$

En particulier, la projection orthogonale sur la droite $F = \text{vect}\,\vec{e}_1$ est $\boxed{p_F : \vec{x} \mapsto \frac{< \vec{x},\vec{e}_1 >}{||\vec{e}_1||^2}.\vec{e}_1}$

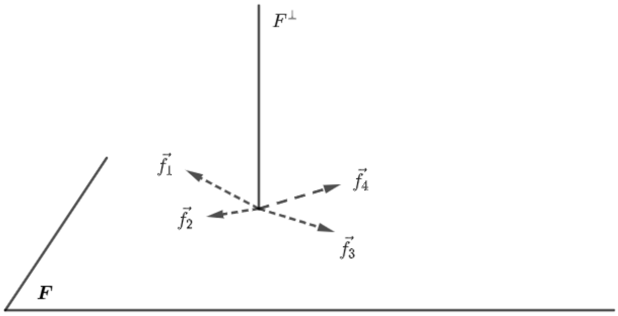
exemple 19: Dans $\mathbb{R}^3$ muni du psu

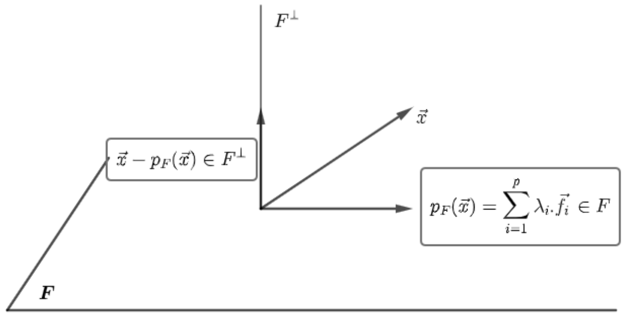
Dans $\mathbb{R}^3$ muni du psu, on considère le plan $F = \text{vect}(\vec{i} - \vec{j}, \vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$.
Donner l'expression de la projection orthogonale sur F pour tout $\vec{x} = (x_1,x_2,x_3)$

méthode 4: comment déterminer un projeté orthogonal

1. textitou bien on cherche une base orthonormée de F et on applique $\boxed{\text{la formule du projeté orthogonal}}$ (rem 3)
2. *ou bien on écrit $p_F(\vec{x})$ comme une combinaison linéaire d'une base (pas forcément orthonormée) de F puis on caractérise le fait que $\vec{x} - p_F(\vec{x})$ est orthogonal à F*
   - Soit $\vec{x} \in E$
   - Si $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p)$ est une base de F.
     On pose $p_F(\vec{x})$ sous la forme $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i.\vec{f}_i$ avec les λ_i inconnues scalaires
   - On écrit ensuite que

$$\begin{aligned} \vec{x} - p_F(\vec{x}) \in F^\perp &\iff \forall k \in [\![1,p]\!],\ < \vec{x} - p_F(\vec{x}),\vec{f}_k >= 0 \\ &\iff \forall k \in [\![1,p]\!],\ < \vec{x} - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i.\vec{f}_i,\vec{f}_k >= 0 \\ &\iff \forall k \in [\![1,p]\!],\ < \vec{x},\vec{f}_k > - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i. < \vec{f}_i,\vec{f}_k >= 0 \end{aligned}$$





exemple 20:

Soit $E = C^0([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\phi(f,g) = \int_{[-\pi,\pi]} fg$.

On note F le sev de E constitué des fonctions polynomiales de degré au plus 2.

Pour tout $i \in \{0,1,2\}$, on note $\boxed{\begin{array}{rcl} f_i : [-\pi,+\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^i \end{array}}$.

La famille (f_0,f_1,f_2) est une base de F

Déterminer le projeté orthogonal de $\boxed{\begin{array}{rcl} g : [-\pi,+\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sin(t) \end{array}}$ sur F.

- notons $p_F(g) = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$.
- On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
g - p_F(g) \in F^\perp &\iff \forall k \in \{0,1,2\},\ < g - p_F(g), f_k >= 0 \\
&\iff \forall k \in \{0,1,2\}, < g - \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, f_k >= 0 \\
&\iff \begin{cases} < g,f_0 > -\lambda_0 < f_0,f_0 > -\lambda_1 < f_1,f_0 > -\lambda_2 < f_2,f_0 > & = 0 \\ < g,f_1 > -\lambda_0 < f_0,f_1 > -\lambda_1 < f_1,f_1 > -\lambda_2 < f_2,f_1 > & = 0 \\ < g,f_2 > -\lambda_0 < f_0,f_2 > -\lambda_1 < f_1,f_2 > -\lambda_2 < f_2,f_2 > & = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 0 = & 2\pi\lambda_0 + \dfrac{2\pi^3}{3}\lambda_2 \\ 2\pi = & \dfrac{2\pi^3}{3}\lambda_1 \\ 0 = & \dfrac{2\pi^3}{3}\lambda_0 + \dfrac{2\pi^5}{5}\lambda_2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \lambda_0 & = 0 \\ \lambda_1 & = \dfrac{3}{\pi^2} \\ \lambda_2 & = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

- Conclusion : $\boxed{p_F(g) = \dfrac{3}{\pi^2} . f_1}$

4 Cas particulier d'un espace euclidien

théorème 18: cas particulier d'un espace euclidien

Soit $(E, < , >)$ un espace euclidien et F un sev de E.
On a :

i) $F \oplus F^\perp = E$

ii) $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$

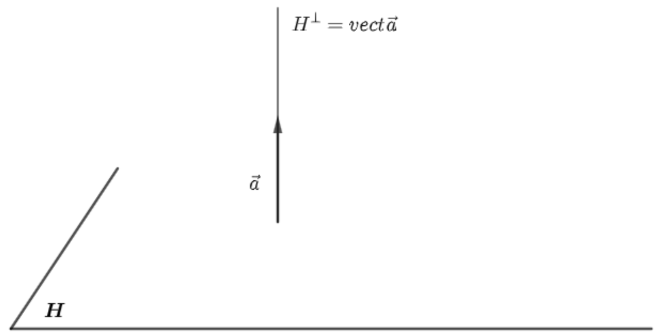
iii) $(F^\perp)^\perp = F$

dans $\mathbb{R}^2$, l'orthogonal d'une droite est un droite
dans $\mathbb{R}^3$, l'orthogonal d'une droite est un plan, et réciproquement

théorème 19: vecteur normal à un hyperplan

Soit $(E, < , >)$ un espace euclidien, et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une base de E.
Soit H un hyperplan de E, d'équation $a_1.x_1 + \cdots + a_n.x_n = 0$ dans la base $\mathcal{B}$

Si $\mathcal{B}$ est une bon, le vecteur $\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i.\vec{e}_i$ est un vecteur normal à H, et donc $\mathrm{vect}(\vec{a}) = H^\perp$ et $H = (\mathrm{vect}\,\vec{a})^\perp$



exemple 21:

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et de la base canonique $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, et F le plan d'équation $x - y + z = 0$
Déterminer la matrice, dans la base canonique de E, de la projection orthogonale sur F. (on pourra s'intéresser à la projection sur $F^\perp$)

remarque 4 (***projection orthogonale, symétrie orthogonale***)

On sait que l'on a les propriétés suivantes:

1. *si $\mathcal{B}$ est une base de F et $\mathcal{B}'$ est une base de $F^\perp$ alors la concaténation $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ est une base de E*
2. *si $\mathcal{B}$ est une bon de F et $\mathcal{B}'$ est une bon de $F^\perp$ alors la concaténation $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ est une bon de E*
3. *la projection orthogonale sur F est l'application* $\boxed{\begin{array}{rcl} p : E = F \oplus F^\perp & \longrightarrow & E \\ \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 & \longmapsto & \vec{x}_1 \end{array}}$

   sa matrice dans la base adaptée $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ est la matrice diagonale $diag(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$

4. *la symétrie orthogonale par rapport à F est l'application* $\boxed{\begin{array}{rcl} s : E = F \oplus F^\perp & \longrightarrow & E \\ \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 & \longmapsto & \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \end{array}}$

   sa matrice dans la base adaptée $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ est la matrice diagonale $diag(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$

exemple 22: important

Montrer que si $F \oplus G = E$ et $F \perp G$ alors $F^\perp = G$

méthode 5: expression intrinsèque d'une réflexion

Par définition, une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.
(Elles sont particulièrement importantes en mathématiques.)

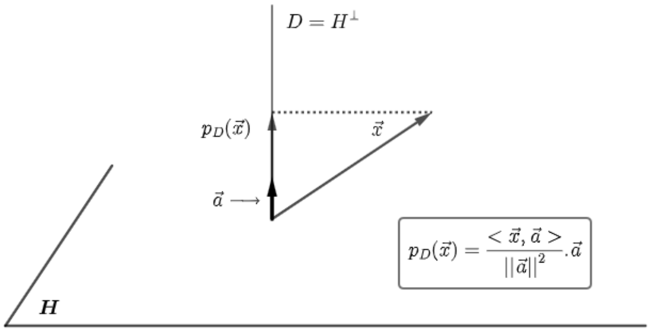
Soit H **un hyperplan** de E. On note $D = \text{vect}\,\overrightarrow{a} = H^\perp$

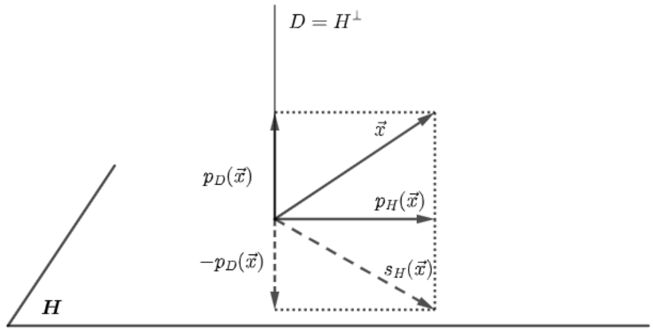
i) la projection orthogonale sur D a pour expression $\boxed{p_D(\vec{x}) = \dfrac{<\vec{x},\vec{a}>}{||\vec{a}||^2}\vec{a}}$

ii) la projection orthogonale sur H a pour expression $\boxed{p_H(\vec{x}) = \vec{x} - \dfrac{<\vec{x},\vec{a}>}{||\vec{a}||^2}\vec{a}}$

iii) la symétrie orthogonale par rapport à H a pour expression $\boxed{s_H(\vec{x}) = \vec{x} - 2\dfrac{<\vec{x},\vec{a}>}{||\vec{a}||^2}\vec{a}}$

lorsque l'on fait un dessin pour exprimer ces résultats on choisit quasiment toujours de se placer dans $\mathbb{R}^3$ *avec une droite et un plan*





exemple 23:

Soit $(E, < , >)$ un espace euclidien et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une bon.
On considère un vecteur non nul $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + \cdots + a_n\vec{e}_n$.
On note D la droite dirigée par $\vec{a}$ et f la projection orthogonale sur D.

1. Calculer $f(\vec{e}_j)$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$
2. En déduire la matrice $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

   Comment pourrait-on simplement l'écrire à l'aide de la matrice unicolonne $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$?

exemple 24: et si la base n'est pas bon(ne)...

Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une base QUELCONQUE de E.
On note H l'hyperplan d'équation $a_1.x_1 + \cdots + a_n.x_n = 0$ dans la base $\mathcal{B}$

1. Montrer qu'il existe un unique vecteur $\vec{a}$ tel que $\forall i \in [\![1,n]\!], a_i = <\vec{a},\vec{e}_i>$
   (On pourra s'intéresser à une application judicieuse et montrer sa bijectivité...)
2. Montrer que $H = (\text{vect}\,\vec{a})^\perp$

5 Distance à un sev de dimension finie

définition 9: distance entre un vecteur et un sev

Soit $\vec{x}$ un vecteur de E.
On appelle DISTANCE DE $\vec{x}$ À F, et on note $d(\vec{x},F)$, le nombre réel positif suivant :

$$\boxed{d(\vec{x},F) = \inf_{\vec{y}\in F} d(\vec{x},\vec{y}) = \inf_{\vec{y}\in F} ||\vec{x}-\vec{y}|| = \inf\{d(\vec{x},\vec{y})\,|\,\vec{y}\in F\}}$$

L'ensemble $\{d(\vec{x},\vec{y})\,|\,\vec{y}\in F\}$ est un ensemble de nombres positifs ou nuls; c'est ainsi un sous-ensemble de $\mathbb{R}^+$. Il est forcément minorée(par zéro déjà) et possède une borne inférieure
On rappelle que la borne inférieure d'un ensemble est le plus grand des minorants

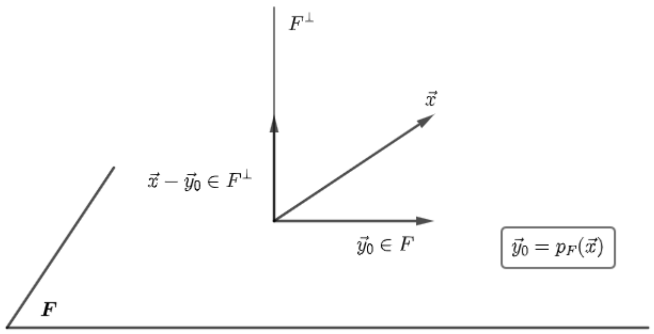
théorème 20: très important: distance à un sev de dimension finie

Soit F un sev de dimension finie de E.
Alors :

i) $\forall \vec{x}\in E$, $\exists\,!\ \vec{y}_0 \in F, d(\vec{x},\vec{y}_0) = d(\vec{x},F)$

ii) et de plus, ce vecteur $\vec{y}_0$ n'est autre que le projeté orthogonal de $\vec{x}$ sur F, càd $p_F(\vec{x})$

- *"la distance entre un vecteur $\vec{x}$ et un sev de dim. finie F est obtenue pour le projeté orthogonal de $\vec{x}$ sur F, et uniquement pour celui-ci "*
- *le projeté orthogonal de $\vec{x}$ sur F est l'unique élément de F qui minimise la distance de $\vec{x}$ à un vecteur de F*
- *on a* $\boxed{d(\vec{x},F) = d(\vec{x},\vec{y}_0) = ||\vec{x}-\vec{y}_0||}$ *et* $\boxed{||\vec{x}-\vec{y}_0||^2 = ||\vec{x}||^2 - ||\vec{y}_0||^2}$



exemple 25:

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du psu, le projeté orthogonal
du vecteur $\vec{x} = (4,2,1)$ sur le plan F d'équation $x+y=0$
est le vecteur $\vec{y}_0 = (1,-1,1)$.

On en déduit que la distance entre le
vecteur $(4,2,1)$ et le plan P
vaut $||(4,2,1)-(1,-1,1)|| = ||(3,3,0)|| = 3\sqrt{2}$

exemple 26: deux questions semblables mais très différentes

1. Déterminer $\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \left((2-x-y)^2 + (3-2x-y)^2\right)^{1/2}$
2. Déterminer $\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \left((1-x+y)^2 + (2-y)^2 + (3-2x-y)^2\right)^{1/2}$

6 Annexe

démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

1. **Dans** $\boxed{\textbf{le cas où } \vec{y} = \vec{0}}$**,**
   justifier que pour tout vecteur $\vec{x}$ **on a** $| < \vec{x},\vec{y} > | = ||\vec{x}||.||\vec{y}||$
   Si $\vec{y} = \vec{0}$ et si $\vec{x}$ est un vecteur de E, on sait que $||\vec{y}|| = 0$ et que $< \vec{x},\vec{y} >= 0$.
   On a donc bien l'égalité indiquée.
   (et la famille $(\vec{x},\vec{y})$ est liée car une famille qui contient le vecteur nul est toujours liée)
2. **On se place dans** $\boxed{\textbf{le cas où } \vec{y} \neq \vec{0}}$ **et** $\vec{x} \in E$ **quelconque fixés**
   On considère pout tout $\lambda \in \mathbb{R}, P(\lambda) = ||\vec{x} + \lambda\vec{y}||^2$
   (a) **Montrer que** P **est un polynôme de degré exactement deux à coefficients réels**
   En utilisant le bilinéarité du produit scalaire,
   pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $P(\lambda) = ||\vec{y}||^2.\lambda^2 + 2 < \vec{x},\vec{y} > .\lambda + ||\vec{x}||^2$
   Comme $\vec{y} \neq 0$, on a $||\vec{y}|| \neq 0$, et donc P est bien un polynôme de degré exactement deux à coefficients réels.

   (b) **Justifier que le discriminant de** P **est inférieur ou égal à zéro,**
   et en déduire que $| < \vec{x},\vec{y} > | \leqslant ||\vec{x}||.||\vec{y}||$
   On a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}, ||\vec{x} + \lambda\vec{y}||^2 \geqslant 0$, c'est à dire que le polynôme P ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$: on sait que cela signifie que $\Delta \leqslant 0$.
   Or $\Delta = 4(< \vec{x},\vec{y} >^2 - ||\vec{x}||^2.||\vec{y}||^2)$ (!)
   On a donc prouvé que $< \vec{x},\vec{y} >^2 \leqslant ||\vec{x}||^2.||\vec{y}||^2$,
   ce qui équivaut en composant par la fonction racine carrée qui est croissante à

$$\boxed{| < \vec{x},\vec{y} > | \leqslant ||\vec{x}||.||\vec{y}||}$$

   (c) **Montrer que** $| < \vec{x},\vec{y} > | = ||\vec{x}||.||\vec{y}||$ **ssi** $(\vec{x},\vec{y})$ **est une famille liée**
   En utilisant la question précédente, on peut écrire les équivalences suivantes:

$$\begin{aligned} | < \vec{x},\vec{y} > | = ||\vec{x}||.||\vec{y}|| &\iff \Delta = 0 \\ &\iff \exists\,!\lambda \in \mathbb{R}, P(\lambda) = 0 \\ &\iff \exists\,!\lambda \in \mathbb{R}, ||\vec{x} + \lambda.\vec{y}|| = \vec{0} \\ &\iff \exists\,!\lambda \in \mathbb{R}, \vec{x} + \lambda.\vec{y} = \vec{0} \\ &\iff (\vec{x},\vec{y}) \text{ est une famille liée} \end{aligned}$$

remarque:
On a vu dans le chapitre "Algèbre liénaire" que l'on avait l'équivalence

$$(\vec{x},\vec{y}) \text{ est une famille liée } \iff (\vec{y} = \vec{0} \text{ ou } \exists\lambda \in \mathbb{K}, \vec{x} = \lambda.\vec{y})$$

démonstration du théorème 2

Soient $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux éléments de E, et λ un réel.

i) $||\vec{x}|| = 0 \iff < \vec{x},\vec{x} >= 0 \iff \vec{x} = 0$

ii) $||\lambda\vec{x}|| = \sqrt{< \lambda\vec{x},\lambda\vec{x} >} = \sqrt{\lambda^2 < \vec{x},\vec{x} >} = |\lambda|\sqrt{< \vec{x},\vec{x} >} = |\lambda|.||\vec{x}||$

iii)

$$\begin{aligned} ||\vec{x} + \vec{y}||^2 &= ||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2 + 2 < \vec{x},\vec{y} > \\ &\leqslant ||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2 + 2||\vec{x}||.||\vec{y}|| = (||\vec{x}|| + ||\vec{y}||)^2 \end{aligned}$$

et comme la fonction $\sqrt{\ }$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ cela donne bien $||\vec{x} + \vec{y}|| \leqslant ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||$