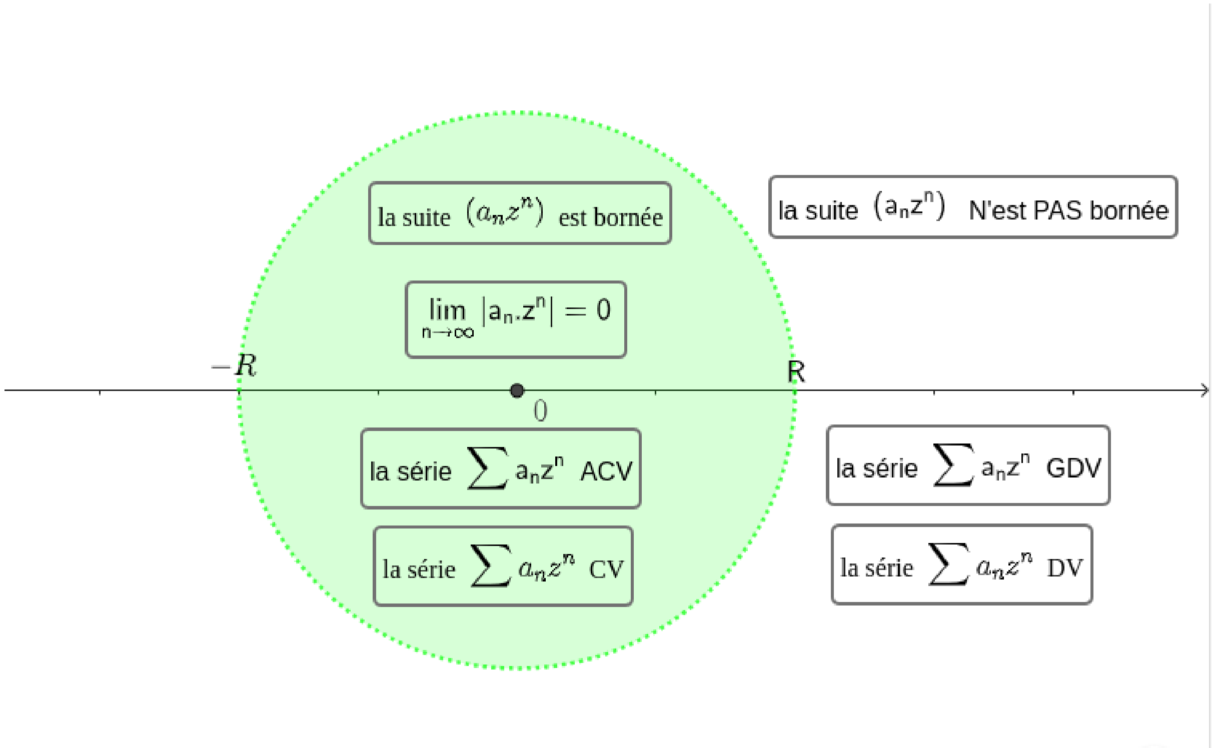
SÉRIES ENTIÈRES

Table des matières



1 Définitions, rayon

1.1 Série entière complexe

définition 1: série entière complexe

On appelle SÉRIE ENTIÈRE COMPLEXE toute série de la forme $\boxed{\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n}$ où les coefficients a_n sont des complexes (indépendants de z) et où z désigne une variable complexe.

exemple 1: savoir reconnaître une série entière

Parmi les séries suivantes, lesquelles sont des séries entières complexes?

- $\sum_{n \geqslant 0} z^n$
- $\sum_{n \geqslant 2} z^n$
- $\sum_{n \geqslant 0} z^{2n}$
- $\sum_{n \geqslant 0} z^{2n-7}$
- $\sum_{n \geqslant 3} 2^{n+1}.z^{4n}$
- $z^3 + 4z + 8$

remarque 1

- *La locution "série entière" vous semble-t-elle bien adaptée à l'objet qu'elle est censée décrire?*
- *Remarquons que tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est une série entière particulière, qui correspond à une suite (a_n) nulle à partir d'un certain rang.*
- *lorsque l'on se fixe z, on est ramené à l'étude d'une série numérique: tous les résultats vus dans ce chapitre-ci sont alors applicables !*
- *une série entière peut s'écrire de différentes manières.*
  Par exemple :
  $\sum_{n \geqslant 0} (n^2+n) z^{2n+1}$, $\sum_{n \geqslant 1} (n^2-n) z^{2n-1}$ *et* $\sum_{n \geqslant 2} (n^2-3n+2) z^{2n-3}$ *désignent la même série entière.*
  On aura donc parfois intérêt à écrire mentalement la série entière sous forme "étendue" :

$$\boxed{\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \dots}$$

1.2 Rayon de convergence

théorème 1: lemme d'Abel

Soit $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ une série entière complexe.
Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n \geqslant 0}$ est bornée.
Alors, pour tout z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

Rappel: dire que la suite $(a_n z_0^n)_{n \geqslant 0}$ est bornée équivaut à dire que la suite $(|a_n z_0^n|)_{n \geqslant 0}$ est majorée

définition 2: rayon de convergence

On appelle RAYON DE CONVERGENCE DE LA SÉRIE ENTIÈRE $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ l'élément, noté R, de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ défini par

$$\boxed{R = \sup\{r \geqslant 0 |\ \text{la suite } (a_n.r^n)_{n\geqslant 0} \text{ soit bornée}\}}$$

càd aussi

$$\boxed{R = \sup\{r \geqslant 0 |\ \text{la suite } (|a_n|.r^n)_{n\geqslant 0} \text{ soit majorée}\}}$$

rem: lorsque l'ensemble précédent n'est pas majoré, on convient de poser $R = +\infty$
rem: l'ensemble précédent n'est jamais vide car 0 y appartient
rem: on montre que l'ensemble précédent est un intervalle
rem: on appelle DISQUE OUVERT DE CONVERGENCE *l'ensemble* $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < R\}$

méthode 1: déterminer le rayon à l'aide de la définition

On détermine les $r \geqslant 0$ tels que la suite $(|a_n|.r^n)_{n\geqslant 0}$ soit majorée.
exemple:
Nous allons déterminer le rayon de $\sum\limits_{n\geqslant 0} z^n$.
Notons $E = \{r \geqslant 0 |\ \textit{la suite } (|a_n|r^n)_{n\geqslant 0} \textit{ soit majorée}\} = \{r \geqslant 0 |\ \textit{la suite } (r^n)_{n\geqslant 0} \textit{ soit majorée}\}$.
Soit $r \geqslant 0$

- *si* $r > 1$ *on a* $\lim r^n = +\infty$ *donc* $r \neq E$
- *si* $r \leqslant 1$, *on a* $\forall n \in \mathbb{N}, r^n \leqslant 1$ *donc* $r \in E$
- *ainsi* $E = [0,1]$
- *D'où* $\boxed{R = Rayon(\sum z^n) = \sup([0,1]) = 1}$

exemple 2:

Déterminer le rayon de $\sum\limits_{n\geqslant 0} n.z^n$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{z^n}{n!}$ et de $\sum\limits_{n\geqslant 0} 2^{n/2}.z^{2n}$

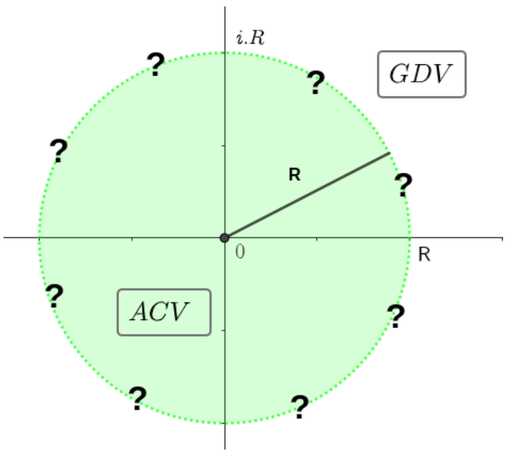
théorème 2: propriétés caractéristiques du rayon de convergence(important)

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. **Alors :**

i) $R = 0 \iff \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ ne converge que pour $z = 0$

ii) $R = +\infty \iff \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$

iii) $R \in \mathbb{R}^+_* \iff \begin{cases} \text{si } |z| < R & \text{alors } \sum a_n z^n \text{ est absolument convergente} \\ \text{si } |z| > R & \text{alors } \sum a_n z^n \text{ est grossièrement divergente} \end{cases}$



1.3 Exemples de référence complexes

Ces résultats ont été établis dans le chapitre "séries numériques"

théorème 3: exemple de référence : la série géométrique

- Le rayon de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ est égal à un.
- La série entière $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ converge [absolument] si et seulement si $|z|<1$.
- Et l'on a $\boxed{\forall |z|<1, \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}}$

théorème 4: exemple de référence : l'exponentielle complexe

- La rayon de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{z^n}{n!}$ est égal à $+\infty$
- La série entière complexe $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{z^n}{n!}$ converge absolument pour tout z complexe
- Et l'on a $\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!} = e^z}$

rem: on dit que la fonction $z \mapsto e^z$ est DÉVELOPPABLE EN SÉRIE ENTIÈRE *sur le $\mathbb{C}$ tout entier*

remarque 2

On rappelle que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a $\exp(x+iy) = \exp(x).\exp(iy) = \exp(x).(\cos(y) + i\sin(y))$

1.4 Série entière réelle

définition 3: série entière réelle

On appelle SÉRIE ENTIÈRE RÉELLE toute série de la forme $\boxed{\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n}$ où les coefficients a_n sont des réels(indépendants de x) et où x désigne une variable réelle.

définition 4: rayon de convergence(bis), intervalle ouvert de convergence

On appelle RAYON DE CONVERGENCE DE LA SÉRIE ENTIÈRE $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ l'élément, noté R, de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ défini par

$$\boxed{R = \sup\{r \geqslant 0 | \text{ la suite } (|a_n|.r^n)_{n\geqslant 0} \text{ soit majorée}\}}$$

On appelle INTERVALLE OUVERT DE CONVERGENCE l'intervalle $]-R,+R[$

remarque 3

- *Une série de rayon R a pour intervalle de convergence soit $[-R,+R]$, soit $[-R,+R[$, soit $]-R,+R]$, soit $]-R,+R[$*
- *Deux séries de même rayon R ont le même intervalle ouvert de convergence* $]-R,+R[$

théorème 5: propriétés caractéristiques du rayon de convergence(bis)

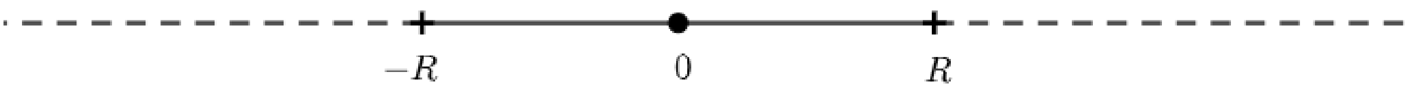
Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

Alors :

i) $R = 0 \iff \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ ne converge que pour $x = 0$

ii) $R = +\infty \iff \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$

iii) $R \in \mathbb{R}_*^+ \iff \begin{cases} \text{si } |x| < R (\text{càd } x \in]-R, +R[\ ) & \text{alors } \sum a_n x^n \text{ est absolument convergente} \\ \text{si } |x| > R & \text{alors } \sum a_n x^n \text{ est grossièrement divergente} \end{cases}$



exemple 3: des interrogations formatrices!

On note R le rayon de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

1. Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n.2^n$ ACV, que peut-on dire de R?
2. Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n.(-2)^n$ CV que peut-on dire de R?
3. Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n.5^n$ GDV que peut-on dire de R?
4. Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n.4^n$ DV que peut-on dire de R?
5. Si pour tout $x \in [0{,}3[$ la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n.x^n$ CV, que peut-on dire de R?
6. Si pour tout $x \geqslant 3$ la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n.x^n$ DV, que peut-on dire de R?
7. Si $\sum a_n$ converge mais n'est pas ACV. Que dire de R?

exemple 4: très important !

- On considère les séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^{2n}$. Comparer leur rayon de convergence.
- D'une manière plus générale: soit p un entier strictement positif et q un entier quelconque , si R' désigne le rayon de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^{np+q}$ et R le rayon de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ alors on a

  $\boxed{R' = (R)^{1/p}}$

remarque 4

On a aussi:

i) $R = \sup\{r \geqslant 0|$ *la suite* $(a_n.r^n)_{n\geqslant 0}$ *tende vers* $0\}$

ii) $R = \sup\{r \geqslant 0|$ *la suite* $(a_n.r^n)_{n\geqslant 0}$ *converge*$\}$

iii) $R = \sup\{r \geqslant 0|$ *la série* $\sum a_n r^n$ *converge*$\}$

exemple 5:

Soit $a \in \mathbb{C}^*$.
Déterminer le rayon de la série $\sum a^n z^n$, et celui de la série $\sum a^n z^{2n}$

exemple 6: lien avec les probabilités

Soit (a_n) une suite telle que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge et vaut 1.

Que dire du rayon de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$?

2 Quelques résultats sur le rayon

2.1 Multiplication par un scalaire non nul

théorème 6: multiplier une SE par un scalaire non nul ne modifie pas le rayon

Soit λ un complexe non nul.
Les séries entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \lambda.a_n z^n$ ont le même rayon

Cela découle directement du fait que si λ est un complexe non nul

on a alors l'équivalence

$$\text{la suite } (|a_n|.r^n) \text{ est majorée} \Longleftrightarrow \text{la suite } (|\lambda|.|a_n|.r^n) \text{ est majorée}$$

et donc

$$\{r \geqslant 0|\text{ la suite } (|a_n|.r^n)_{n\geqslant 0} \text{ est majorée}\} = \{r \geqslant 0|\text{ la suite } (|\lambda.a_n|.r^n)_{n\geqslant 0} \text{ est majorée}\}$$

exemple 7:

- la SE $\sum\limits_{n\geqslant 0} 3.z^n$ a même rayon que la SE $\sum\limits_{n\geqslant 0} z^n$ càd $Rayon(\sum\limits_{n\geqslant 0} 3.z^n) = 1$
- la SE $\sum\limits_{n\geqslant 0} 3^n.z^n$ n'a, a priori, pas le même rayon que la SE $\sum\limits_{n\geqslant 0} z.^n$

2.2 Règle de D'Alembert

A $z \neq 0$ fixé, la série $\sum a_n z^n$ est une série numérique. On peut donc étudier sa convergence avec tous les outils vus dans ce dernier chapitre. En particulier, on peut penser à utiliser:

théorème 7: règle de D'Alembert

Soit $\sum u_n$ une série telle que $\lim\limits_{\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ existe.

Alors :

i. si $l > 1$ alors $\sum u_n$ GDV
ii. si $l < 1$ alors $\sum u_n$ ACV (en particulier $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$)
iii. si $l = 1$ alors pas de conclusion quant à la nature de la série

rem: Attention ! Il n'y a pas de réciproque à la règle de D'Alembert...

méthode 2: utilisation de la règle de D'Alembert pour déterminer le rayon

La méthode consiste à poser $u_n = a_n z^n$ pour $z \neq 0$ fixé et à appliquer la règle de D'Alembert à la série numérique $\sum u_n$.
On compare ensuite cette limite avec 1

exemple 8:

Déterminons le rayon de convergence des séries entières $\sum(n^2-\ln n)z^n$, $\sum \dfrac{n^2}{4^n+n}.z^n$

méthode 3: Régle de D'Alembert pour les séries entières (Attention!)

Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$ alors $Rayon(\sum a_n z^n) = \dfrac{1}{l}$

Avec les conventions $\dfrac{1}{0} = +\infty$ et $\dfrac{1}{+\infty} = 0$

Attention: cette méthode est très efficace mais peut être très piégeuse. (je ne la recommande pas) par exemple, elle ne s'applique pas à la SE

2.3 théorèmes de comparaison

théorème 8: théorèmes de comparaison

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b

1. **comparaison avec les inégalités**
   Si $|a_n| \leqslant |b_n|$ à partir d'un certain rang , **alors** $R_a \geqslant R_b$

2. **comparaison avec les équivalents**
   Si $a_n \sim b_n$ **alors** $R_a = R_b$

3. **comparaison avec le o ou le O**
   Si $a_n = O(b_n)$ ou $a_n = o(b_n)$ **alors** $R_a \geqslant R_b$

à noter que pour la comparaison avec l'équivalent il n'y a pas de signe stable à contrôler

méthode 4: utiliser un équivalent et comparer à une série entière connue

On utilise le deuxième point du théorème précédent.

exemple:

Considérons la série entière $\sum(-1)^n.\operatorname{ch} n.z^n$.

- *on sait que* $\operatorname{ch} n = \dfrac{e^n+e^{-n}}{2} \sim \dfrac{e^n}{2}$ *donc* $(-1)^n \operatorname{ch} n \sim \dfrac{(-e)^n}{2}$
- *d'après le théorème ci-dessus on peut affirmer que les séries entières* $\sum(-1)^n.\operatorname{ch} n.z^n$ *et* $\sum \dfrac{(-e)^n}{2} z^n$ *ont le même rayon*
- *or* $\sum \dfrac{(-e)^n}{2} z^n$ *est une série géométrique de raison* $-ez$, *qui converge donc* *si et seulement si* $|ez| < 1$ *c'est à dire* $|z| < 1/e$
- *ci-dessus on a établi que* $\sum \dfrac{(-e)^n}{2} z^n$ *était une série entière de rayon* $1/e$

  Conclusion: $\boxed{\textit{le rayon de } \sum(-1)^n.\operatorname{ch} n.z^n \textit{ est } 1/e}$

Pouvez-vous calculer la fonction somme de cette série entière?

exemple 9:

Déterminer le rayon des deux séries entières suivantes $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}.z^n$ et $\sum \dfrac{n-1}{n}.z^n$

théorème 9: des résultats à retenir

- Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $Rayon(\sum n^\alpha . x^n) = 1$

2.4 rayon de la somme de 2 séries entières

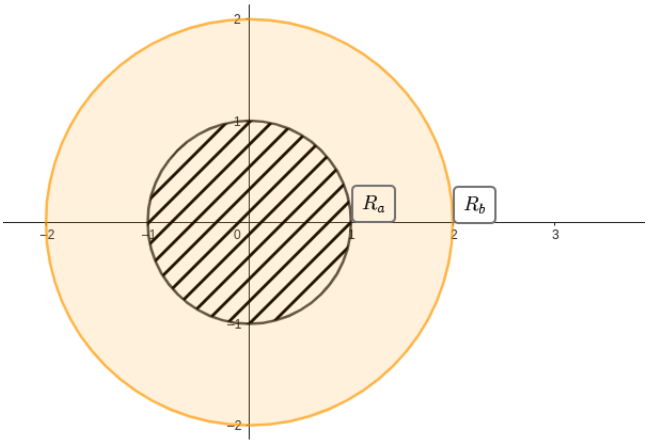
théorème 10: rayon de la somme de deux séries entières

Soit $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n \geqslant 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b. **Alors :**

i) la série entière somme $\sum\limits_{n \geqslant 0} (a_n + b_n) z^n$ possède un rayon $R \geqslant \min(R_a, R_b)$

ii) dans le cas où $R_a \neq R_b$ alors le rayon de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} (a_n + b_n) z^n$ est égal à $\min(R_a, R_b)$

par exemple:
si $R_a = 1$ et $R_b = 2$ alors on peut affirmer que $R = 1$
si $R_a = 1$ et $R_b = 1$ alors on peut affirmer que $R \geqslant 1$



démonstration

- Soit z tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$

  Ceci signifie que $|z| < R_a$ et $|z| < R_b$
  et donc que $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont deux séries absolument convergentes
  on sait alors que la somme des deux séries, càd $\sum (a_n + b_n).z^n$ est encore une série ACV
  Comme pour tout z tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$ on a $\sum (a_n + b_n).z^n$ ACV

  on en déduit que $Rayon(\sum (a_n + b_n).z^n) \geqslant \min(R_a, R_b)$

- Plaçons nous dans le cas $R_a < R_b$.

  Notons $R = Rayon(\sum (a_n + b_n).z^n)$

  On sait d'après ce qui précède que $R \geqslant R_a$
  Soit z tel que $R_a < |z| < R_b$
  On sait alors que $\sum a_n.z^n$ est GDV et que $\sum b_n.z^n$ est ACV
  On peut alors affirmer que $\sum (a_n + b_n).z^n$ est GDV
  Comme pour tout z tel que $R_a < |z| < R_b$ on a $\sum (a_n + b_n).z^n$ GDV
  On en déduit que $R = Rayon(\sum (a_b + b_n).z^n) \leqslant R_a$.

  Au final on a bien montré que $R = Rayon(\sum (a_n + b_n).z^n) = R_a$

3 Produit de Cauchy

remarque 5 (*rappel: produit de Cauchy de deux* séries numériques)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques.

- *On appelle* PRODUIT DE CAUCHY *de ces deux séries la série $\sum w_n$ avec pour tout entier $n \geqslant 0, w_n = \sum_{j=0}^{n} u_j v_{n-j} = \sum_{j=0}^{n} u_{n-j} v_j$*
- *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont ACV alors $\sum w_n$ est ACV et l'on a $\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n$*

théorème 11: rayon du produit de deux séries entières

1. Le produit de Cauchy des deux séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ est la série entière $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ avec $\boxed{c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j.b_{n-j}}$ pour tout $n \geqslant 0$
2. Notons $R_a = Rayon(\sum_{n\geq 0} a_n z^n)$, $R_b = Rayon(\sum_{n\geq 0} b_n z^n)$, et R_p le rayon de la série produit alors
   - pour $|z| < \min(R_a,R_b)$, les trois séries sont ACV et $\boxed{(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n}$
   - la série produit est de rayon $R_p \geqslant \min(R_a,R_b)$

rem: lorsque $R_a \neq R_b$ cette fois on ne peut rien dire (contrairement à la somme de deux SE)

démonstration:

Soit z tel que $|z| < \min(R_a,R_b)$

Notons $u_n = a_n.z^n$ et $v_n = b_n.z^n$

Comme $|z| < R_a$ on sait que $\sum u_n$ est ACV

et comme $|z| < R_b$ on sait que $\sum v_n$ est ACV.

Notons $\sum w_n$ la série numérique produit de Cauchy des sériens numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Par définition, on sait que pour tout $n \geqslant 0$

$w_n = \sum_{j=0}^{n} u_j.v_{n-j} = \sum_{j=0}^{n} a_j.z^j.b_{n-j}.z^{n-j} = (\sum_{j=0}^{n} a_j.b_{n-j}).z^n = c_n.z^n$

Par théorème, comme $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont ACV on sait que

$\sum w_n$ est ACV et que $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right)$

On a donc montré que $\sum c_n z^n$ est ACV et que $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$

On a montré que pour tout $|z| < \min(R_a,R_b)$ la série $\sum c_n z^n$ est ACV,

ce qui permet d'affirmer que $Rayon(\sum c_n z^n) \geqslant \min(R_a,R_b)$

exemple 10:

A l'aide d'un produit de Cauchy, écrire $\dfrac{1}{(1-z)^2}$ puis $\dfrac{1}{(1-z)^3}$ sous la forme d'une somme de série entière

- Notons $\sum c_n z^n$ le produit de Cauchy des SE $\sum a_n.z^n$ et $\sum b_n.z^n$ avec $\forall n \geqslant 0, a_n = b_n = 1$.

  Par définition, on a $\forall n \geqslant 0, c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k.b_{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} 1.1 = (n+1)$

  Comme $Rayon(\sum z^n) = 1$, on peut affirmer par théorème que $Rayon(\sum (n+1).z^n) \geqslant 1$

  et que pour $|z| < 1$ on a

  $$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1).z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right).\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) = \frac{1}{1-z}.\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-z)^2}$$

  rem: comme pour $z = 1$ la série $\sum (n+1).z^n$ est GDV, on a $Rayon(\sum (n+1).z^n) \leqslant 1$

  Au final, on a $Rayon(\sum (n+1).z^n) = 1$

- Notons $\sum d_n z^n$ le produit de Cauchy des SE $\sum c_n.z^n$ et $\sum a_n.z^n$

  Par définition, on a $\forall n \geqslant 0, d_n = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k.a_{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} k+1 = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

  Comme $Rayon(\sum a_n z^n) = Rayon(c_n z^n) = 1$, on peut affirmer par théorème que $Rayon(\sum d_n z^n) \geqslant 1$

  et que pour $|z| < 1$ on a

  $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n\right).\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) = \frac{1}{(1-z)^2}.\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-z)^3}$$

exemple 11:

On considère la suite (c_n) définie par $\forall n \geqslant 0, c_n = \sum\limits_{j=0}^{n} \dfrac{1}{j!}$

Déterminer le rayon et la fonction somme de $\sum\limits_{n \geqslant 0} c_n z^n$

4 Fonction somme d'une série entière complexe

définition 5: fonction somme d'une série entière

Lorsque la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge, on note $S(z)$ sa somme.

La fonction S ainsi définie est appelée LA FONCTION SOMME DE LA SÉRIE ENTIÈRE.

On a donc : $\boxed{S(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n}$

remarque 6

- $\boxed{\textit{pour } z = 0, \textit{ la série converge toujours, et l'on a } S(0) = a_0}$
- *la fonction S est définie à l'aide d'une série : pour nous, c'est une nouvelle manière de définir une fonction.*
- *l'ensemble de définition de la fonction somme S est l'ensemble des complexes z pour lequelles la série $\sum a_n z^n$ est convergente. Il s'agit donc des z qui sont à l'intérieur du cercle de centre 0 et de rayon R ainsi que, éventuellement, certains z situés sur le "cercle d'incertitude".*

remarque 7 (***avec les séries entières complexes de référence***)

1. - *On a vu que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{z^n}{n!}$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$.*
   - *Sa fonction somme est* $\boxed{\begin{array}{rcl} S:\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!} = \exp(z) \end{array}}$
2. - *On a vu que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} z^n$ converge pour tout $|z| < 1$ uniquement*
   - *Sa fonction somme est* $\boxed{\begin{array}{rcl} S:B_O(0,1) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z} \end{array}}$ *où* $B_O(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$.
   - *La fonction somme S est définie uniquement sur l'ensemble des nombres complexes de module strictement inférieur à un: la fonction somme S est donc **la restriction** de la fonction $z \mapsto \dfrac{1}{1-z}$ à $B_O(0,1)$*

théorème 12: fonction complexe développable en série entière

Soit f une fonction définie sur $D_f \subset \mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$

On dit que f est DÉVELOPPABLE EN SÉRIE ENTIÈRE sur un disque ouvert de centre 0 lorsqu'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon non nul et un réel $\alpha > 0$ telles que

$$\forall |z| < \alpha, f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n . z^n$$

exemple 12:

Montrer que la fonction $f : z \mapsto \dfrac{z^2}{2-z}$ est développable en série entière

5 Fonction somme d'une série entière réelle

définition 6: fonction somme d'une série entière

Lorsque la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge, on note $S(x)$ sa somme.

La fonction S ainsi définie est appelée LA FONCTION SOMME DE LA SÉRIE ENTIÈRE.

On a donc: $\boxed{S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ pour tout } x \text{ tels que } \sum a_n x^n \text{ CV}}$

rem: l'ensemble de définition de S est égal à l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la série est convergente

rem: on sait que 0 est toujours dans l'ensemble de définition de S

exemple 13: Les trois séries suivantes ont même rayon mais...

- La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$ a pour intervalle de convergence $]-1,+1[$

  L'ensemble de définition de sa fonction somme est donc $]-1,+1[$
- La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n}$ a pour intervalle de convergence est $[-1,+1[$

  L'ensemble de définition de sa fonction somme est donc $[-1,+1[$
- La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n^2}$ a pour intervalle de convergence $[-1,+1]$

  L'ensemble de définition de sa fonction somme est donc $[-1,+1]$

et elles ont le même intervalle ouvert de convergence, à savoir $]-1,+1[$

définition 7: intervalle de convergence, intervalle ouvert de convergence

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière réelle, de rayon R.

1. On appelle INTERVALLE DE CONVERGENCE l'ensemble de définition de la fonction S, c'est-à-dire:
   (a) Si $R = 0$, l'intervalle de convergence est $\{0\}$
   (b) Si $R = \infty$, l'intervalle de convergence est $\mathbb{R}$
   (c) Si R est un réel strictement positif, l'intervalle de convergence sera ou $]-R,+R[$, ou $]-R,+R]$, ou $[-R,+R[$, ou $[-R,+R]$
   (c'est l'étude en $\pm R$ qui permet de déterminer en quel cas on se trouve)
2. On appelle intervalle ouvert de convergence l'intervalle $]-R,+R[$ (lorsque $R \neq 0$)

rem: l'intervalle ouvert de convergence est particulièrement important pour une série entière, car les théorèmes de dérivation et de primitivation terme à terme (voir plus loin) ne s'applique que sur cet intervalle!

5.1 Séries entières réelles de référence

exemple 14: classique

Vérifier que $\forall x \in]-1,+1[, \sqrt{1+x} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{4^n(2n-1)} \dbinom{2n}{n} x^n$ et $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{4^n} \dbinom{2n}{n} x^n$

Dans le tableau ci-dessous, α désigne un élément de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ (réel non entier)

série entière	rayon	somme sur l'intervalle ouvert de convergence
$\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$	∞	$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$
$\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	∞	$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$
$\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	∞	$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x$
$\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	∞	$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch} x$
$\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	∞	$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{sh} x$
$\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n x^n$	1	$\forall x \in]-1,+1[, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$
$\sum_{n\geqslant 0} x^n$	1	$\forall x \in]-1,+1[, \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$
$1 + \sum_{n\geqslant 1} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	1	$\forall x \in]-1,+1[, (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$
$\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$	1	$\forall x \in]-1,+1[, \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x)$
$\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$	1	$\forall x \in]-1,+1[, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$
$\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1	$\forall x \in]-1,+1[, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x$

remarque 8 (*précisions sur le tableau ci-dessus*)

Les formules sont à mémoriser sur l'intervalle ouvert de convergence.
On montrera cependant qu'elles sont vraies également pour $x = R$ et/ou pour $x = -R$ lorsque les séries convergent en ces points.

Plus précisément:

- $\forall x \in]-1,+1], \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x)$
- $\forall x \in [-1,+1[, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$
- $\forall x \in [-1,+1], \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x$

5.2 Propriétés (admises) de la fonction somme d'une série entière réelle

théorème 13: continuité sur l'intervalle de convergence(admis)

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R \neq 0$ et de fonction somme S
Sa fonction somme S est continue sur son intervalle de définition(*càd sur l'intervalle de convergence de la série entière)*
rem: ceci signifie que:

- si $x_0 \in]-R,+R[$ on a $\lim_{x_0} S = S(x_0)$
- si $\sum_{n\geqslant 0} a_n R^n$ CV alors $S(R) = \lim_{x\to R^-} S(x)$
- si $\sum_{n\geqslant 0} a_n (-R)^n$ CV alors $S(-R) = \lim_{x\to -R^+} S(x)$

remarque 9 (***interprétation du théorème comme double limite***)

- *Soit $x_0 \in]-R,+R[$. Dire que la fonction S est continue en x_0 revient à dire que $\lim\limits_{x \to x_0} S(x) = S(x_0)$,*

  soit encore que $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} \left(\lim\limits_{N \to \infty} \sum\limits_{n=0}^{N} a_n x^n \right) = \lim\limits_{N \to \infty} \left(\sum\limits_{n=0}^{N} a_n x_0^n \right) = \lim\limits_{N \to \infty} \left(\lim\limits_{x \to x_0} \sum\limits_{n=0}^{N} a_n x^n \right)}$
- *Ainsi la démonstration du théorème consiste à montrer que* $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{N \to \infty} (\dots) = \lim\limits_{N \to \infty} \lim\limits_{x \to x_0} (\dots)$

  Il s'agit d'une démonstration (HP) très compliquée qui nécessite la maitrise de la notion de convergence uniforme

théorème 14: classe C^∞ et dérivation terme à terme (admis)

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R \neq 0$ et de fonction somme notée S.
Alors:

i) la fonction S est de classe C^∞ sur l'intervalle OUVERT de convergence $]-R,+R[$

ii) la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n x^n$ et la série dérivée $\sum\limits_{n \geqslant 0} (n+1) a_{n+1} x^n$ ont même rayon.

iii) sur l'intervalle ouvert $]-R,+R[$, S' est obtenue en dérivant terme à terme, on a donc

$$\forall x \in]-R,+R[, S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n.a_n.x^{n-1}$$

remarque:

- le résultat est établi sur l'intervalle ouvert de convergence uniquement!
- La série dérivée de $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n.x^n = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + a_3.x^3 + a_4.x^4 \dots$

  est la série $a_1 + 2.a_2.x + 3.a_3.x^2 + 4.a_4.x^3 + \dots = \sum\limits_{n \geqslant 0} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum\limits_{n \geqslant 1} n.a_n.x^{n-1}$

exemple 15: Très classique! A retenir!

Déterminer le rayon et la fonction somme de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n.x^n$ et de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^2.x^n$

exemple 16: démonstration de cours

1. Montrer que $\forall x \in]-1,+1]$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n} = \ln(1+x)$
2. Montrer que $\forall x \in [-1,+1]$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x$

théorème 15: formule de la dérivée p-ième

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R \neq 0$ et de fonction somme notée S.
Alors:

i) la fonction S est de classe C^∞ sur l'intervalle OUVERT de convergence $]-R,+R[$

ii) pour tout $p \geqslant 1$ et tout $x \in]-R,+R[$ on a

$$\boxed{S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\dots(n-p+1) a_n x^{n-p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n}$$

iii) on a $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ a_n = \dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}}$

exemple 17:

1. Donner la valeur de la dérivée $n-$ième en 0 de la fonction arctan
2. Donner la valeur de la dérivée $n-$ième en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1+2x)$

théorème 16: primitivation terme à terme

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R \neq 0$ et de fonction somme S.
Soit F une primitive de la fonction S sur $]-R,+R[$
Alors

i) $\forall x \in]-R,+R[, F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n . \frac{x^{n+1}}{n+1}$

ii) et $Rayon\left(\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_{n+1}}{n+1} x^{n+1}\right) = R = Rayon\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n . x^n\right)$

remarque:

- *On dit encore que sur* L'INTERVALLE OUVERT DE CONVERGENCE, UNE PRIMITIVE EST OBTENUE PAR PRIMITIVATION TERME À TERME.
- *et que* LA SÉRIE ENTIÈRE ET SA SÉRIE PRIMITIVÉE ONT MÊME RAYON
- *moyen mnémotechnique pour se rappeler la formule i)*

$$F(x) - F(0) = \int_0^x F'(t)dt = \int_0^x S(t)dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n.t^n.dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n.t^n.dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n . \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

exemple 18:

1. Justifier que la fonction arctan possède des primitives sur $\mathbb{R}$
2. Déterminer un expression explicite des primitives de arctan
3. Ecrire la primitive de arctan qui vaut 1 en 0 comme la somme d'une série entière

5.3 Développement en série entière

définition 8: fonction développable en série entière

Soit I une intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in I$, et f une fonction de $I \to \mathbb{R}$.
On dit que LA FONCTION f EST DÉVELOPPABLE EN SÉRIE ENTIÈRE (DSE) AU VOISINAGE DE 0 lorsqu' il existe un réel $\alpha > 0$ et une série entière $\sum a_n x^n$ de <u>rayon non nul</u> tels que $\forall x \in]-\alpha,+\alpha[, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

rem: il est implicite que $(Rayon(\sum a_n.x^n) \geqslant \alpha)$

remarque 10

- *On rappelle qu'<u>un voisinage du réel x_0</u> est une partie de $\mathbb{R}$ (i.e. sous-ensemble de $\mathbb{R}$) qui contient un intervalle <u>ouvert</u> centré en x_0. Par exemple, $]-2,-1] \cup [0,+\infty[$ est un voisinage de 3 mais n'est pas un voisinage de 0*
- *La définition précédente est encore équivalente à : la fonction f est développable en série entière au voisinage de 0 lorsqu' il existe un <u>voisinage</u> V de 0 et une série entière $\sum a_n x^n$ de <u>rayon non nul</u> tels que $\forall x \in V, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$*
- *D'après cette définition, il n'est pas nécessaire qu'une fonction soit égale à une série entière sur tout son ensemble de définition. La fonction* arctan *est définie sur $\mathbb{R}$ mais elle n' est égale à sa série entière que sur $[-1,1]$. Comme il s'agit d'un voisinage de 0, on dit que la fonction* arctan *est DSE. (même remarque avec la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$)*
- *Si on veut développer en série entière une fonction f en un point x_0 autre que 0, on développe la fonction $h \mapsto f(x_0+h)$ en 0*

exemple 19:

Expliquer pourquoi la fonction partie entière et la fonction valeur absolue ne sont pas développables en série entière au voisinage de 0.

méthode 5: comment trouver un DSE I

On utilise les séries entières de référence et on effectue des changements de variable et/ou des combinaisons linéaires.

$$f_1 : x \mapsto \ln(1+3x^2) \qquad f_2 : x \mapsto \ln(2+3x^2) \qquad f_3 : x \mapsto \cos^2 x \qquad f_4 : x \mapsto \cos^3 x$$

$$f_5 : x \mapsto e^{x^2} \qquad f_6 : x \mapsto \frac{1}{2-x} \qquad f_7 : x \mapsto \frac{1}{(1+x)(2-x)} \qquad f_8 : x \mapsto \ln(3-x^2+2x) \quad , \quad f_9 : x \mapsto e^x . \sin x$$

méthode 6: comment trouver un DSE II

On utilise les séries entières de référence que l'on dérive.

méthode 7: comment trouver un DSE III

On utilise les séries entières de référence que l'on primitive.
exemple: $\arctan, \ \arcsin, \ \ln(1+x), \ \dots$

exemple 20:

Démontrer que $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{t^2} dt$ est DSE et donner son développement

- Notons $f : t \mapsto e^{t^2}$
  Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, on sait que F est la primitive de f qui s'annule en 0.
- On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

  On a donc $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = e^{t^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(t^2)^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!}$

  Comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{t^{2n}}{n!}$ converge pour tout t réel, ceci prouve que $Rayon(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!}) = R = +\infty$

  rem: à ce niveau on a montré que $Rayon(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!}) = R = +\infty$ *et que sa fonction somme est la fonction* f
- D'après le théorème de primitivation terme à terme on peut affirmer que pour $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{t^{2n}}{n!} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{t^{2n+1}}{n!(2n+1)} \right]_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{n!(2n+1)}$$

rem: il est à bien noter ici que ce n'est pas la linéarité de l'intégrale qui permet d'écrire la ligne ci-dessus, mais bien le théorème d'intégration terme à terme vu plus haut!

méthode 8: utiliser une équation différentielle pour trouver un DSE

Soit f une fonction définie sur un voisinage de 0

1. Analyse
   - On commence par déterminer une équation différentielle linéaire satisfaite f
   - On suppose que f est DSE et on cherche une série entière inconnue de rayon non nul qui vérifie l'équation différentielle. On s'aide des conditions initiales.
2. Synthèse
   - On vérifie que le rayon de la série trouvée est non nul
   - On applique le théorème d'existence et d'unicité de la solution à un problème de Cauchy

exemple 21:

Soit $p \in \mathbb{N}$. On note $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{n+p}{p} x^n$

1. Déterminer le rayon de cette série entière.
2. Justifier que f vérifie sur $]-1,+1[$ l'équation différentielle $(1-x)y' - (p+1)y = 0$
3. En déduire une expression simple de f

définition 9: série de Taylor

f étant une fonction de classe C^∞ sur un intervalle contenant 0,

On appelle SÉRIE DE TAYLOR DE f la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

théorème 17: unicité du DSE

Soit f une fonction définie au voisinage de 0. :

i) Si f est DSE sur $]-\alpha,+\alpha[$ alors f est C^∞ sur $]-\alpha,+\alpha[$

ii) Si f est DSE sur $]-\alpha,+\alpha[$ alors son DSE est sa série de Taylor, càd

$$\forall x \in]-\alpha,+\alpha[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

rem:

- *Attention, i) est juste une implication! f $C^\infty \not\Rightarrow f$ DSE*
- ***le DSE est unique:** si f est dse alors c'est la série de Taylor qui donne le dse*

En effet, si $\forall x \in]-\alpha,+\alpha[, f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ alors f coïncide avec la fonction somme S de la série entière sur cet intervalle et l'on a d'après le théorème 15 $\boxed{a_n = \dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}}$. *cqfd*

théorème 18: parité. . . là aussi!

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon $\underline{R \neq 0}$

i) $\forall x \in]-R,R[, S(-x) = S(x)$ **si et seulement si** pour tout entier n impair $a_n = 0$

ii) $\forall x \in]-R,R[, S(-x) = -S(x)$ **si et seulement si** pour tout entier n pair $a_n = 0$

Pour démontrer cette proposition on utilise les résultats connus suivants:

- *si f est paire alors f' est impaire*
- *si f est impaire alors f' est paire*

Et on en déduit immédiatement que

- *si f est paire alors $f', f^{(3)}, f^{(5)}, \dots$ (les dérivées d'ordre impair) sont impaires et donc s'annulent en 0*
- *si f est impaire alors $f'', f^{(4)}, f^{(6)}, \dots$ (les dérivées d'ordre pair) sont impaires et donc s'annulent en 0*

théorème 19: formule de Taylor avec reste intégral (rappel)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de classe C^{n+1} sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors:

$$\boxed{\text{pour tous } a \text{ et } b \text{ éléments de } I, \text{ on a } f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{1}{n!} \int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t) dt}$$

Dans le cas où $n = 0$, la formule donne $\boxed{\text{si } f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \text{ alors on a } f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)dt}$

exemple 22:

Dans le poly "Intégration I", à la page 10, on a utilisé cette formule pour justifier que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

exemple 23: comment justifier qu'une fonction prolongée est C^∞!

Soit la fonction $\boxed{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}}$

Justifier que la fonction f est C^∞ sur $\mathbb{R}$!

- Soit $x \neq 0$.
  On a
  $$f(x) = \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}.\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n.x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n.x^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} + \dots$$
  Comme la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n.x^{2n}}{(2n+1)!}$ converge pour tout $x \neq 0$ on sait que son rayon R est infini.
- Notons S sa fonction somme.
  On sait par théorème que S est une fonction C^∞ sur $]-R, +R[= \mathbb{R}$.

  Or $S(0) = 1 = f(0)$ et $\forall x \neq 0, S(x) = f(x)$!

  Ainsi $S = f$ et l'on a bien montré que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$!

exemple 24: DSE de $x \mapsto (1+x)^\alpha$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout x réel on note $f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$

1. Lorsque $\alpha \in \mathbb{N}$, donner le DSE de f_α et son rayon.
   Dans la suite on supposera que $\alpha \notin \mathbb{N}$
2. Déterminer la série de Taylor de f. Quel est le rayon de cette série entière?
3. Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre satisfaite par f_α et montrer que sa série de Taylor vérifie la même équation différentielle. (on précisera sur quel intervalle)
4. Justifier que f_α est DSE et retrouver le résultat de cours

exemple 25:

A l'aide de leurs développements en série entière,
retrouver la dérivée de la fonction exp et de la fonction sh

6 Annexe

démonstration 1 (***prélude à la démonstration du théorème 2***)

Montrons que l'ensemble $E = \{r \geqslant 0 |$ *la suite* $(|a_n|.r^n)_{n\geqslant 0}$ *soit majorée*$\}$ *est un intervalle.*

- *Il est clair que* $0 \in E$ *et que c'est son plus petit élément.*
- *Pour montrer que* E *est un intervalle (c'est à dire d'un seul tenant) nous allons montrer que pour tout* $b \in E$ *fixé et tout* c *fixé dans le segment* $[0,b]$ *on a* $c \in E$
- *Soit* $b \in E$ *fixé.*
  Par définition de E *ceci signifie qu'il existe un* $M > 0$ *tel que* $\forall n \geqslant 0, |a_n|.b^n \leqslant M$
  Considérons maintenant un c *quelconque dans le segment* $[0,b]$.
  Comme $0 \leqslant c \leqslant b$, *on a* $\forall n \geqslant 0, 0 \leqslant c^n \leqslant b^n$ *et donc* $\forall n \geqslant 0, 0 \leqslant |a_n|.c^n \leqslant |a_n|.b^n$
  On vient de prouver que $\forall n \geqslant 0, 0 \leqslant |a_n|.c^n \leqslant M$,
  c'est à dire que la suite $(|a_n|.c^n)$ *était majorée. C'est la définition de* $c \in E$ *! cqfd*

Nous venons de prouver que E *est un intervalle du type* $[0,R[$ *ou* $[0,R]$ *(avec* $R \geqslant 0$*) ou bien* $[0,+\infty[$

démonstration 2 (***démonstration du théorème 2***)

1. $\boxed{R = +\infty \iff \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n \text{ converge absolument pour tout } z \in \mathbb{C}}$

   (a) *On suppose que* $R = +\infty$
   On est ainsi dans le cas où $E = [0,+\infty[$, *c'est à dire pour tout réel* $r \geqslant 0$ *la suite* $(a_n r^n)$ *est majorée.*
   Soit z *un complexe quelconque.*
   En choisissant $r = |z|+1$ *et en appliquant le lemme d'Abel on justifie que* $\sum a_n z^n$ *est absolument convergente.*

   (b) *On suppose que* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *converge absolument pour tout* $z \in \mathbb{C}$.
   On sait donc que pour tout $z \in \mathbb{C}$ *le terme général tend vers* 0. *Or une suite convergente étant forcément bornée, on peut affirmer que la suite* $(a_n z^n)$ *est une suite bornée.*
   On vient bien de prouver que pour $r \geqslant 0$ *la suite* $(|a_n|r^n)$ *était majorée, c'est à dire que* $E = [0,+\infty[$.
   Or $R = \sup E$ *donc* $R = +\infty$

2. $\boxed{R = 0 \iff \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n \text{ ne converge que pour } z = 0}$

   (a) *On suppose que* $R = 0$
   On est ainsi dans le cas où $E = \{0\}$, *c'est à dire que pour tout* $r > 0$ *la suite* $(|a_n|r^n)$ *n'est pas majorée.*
   Soit z *un complexe non nul.*
   On peut affirmer que la suite $(|a_n z^n|) = (|a_n|.|z|^n)$ *n'est pas majorée.*
   De cela on en déduit que l'on ne peut avoir $\lim a_n z^n = 0$ *et donc* $\sum a_n z^n$ *est grossièrement divergente*

   (b) *On suppose que* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *ne converge que pour* $z = 0$
   Nous allons montrer que $E = \{0\}$. *Pour cela on va tenir un raisonnement par l'absurde.*
   On suppose qu'il existe un $r > 0$ *tel que la suite* $(a_n.r^n)$ *soit majorée.*
   D'après le lemme d'Abel, comme $0 < \frac{r}{2} < r$, *on peut affirmer que la série* $\sum a_n z^n$ *est absolument convergente pour* $z = \frac{r}{2}$.
   On aboutit à une contradiction car la série entière ne converge que pour 0 *par hypothèse. cqfd!*

3. $\boxed{R \in \mathbb{R}_*^+ \iff \begin{cases} \text{si } |z| < R & \text{alors } \sum a_n z^n \text{ est absolument convergente} \\ \text{si } |z| > R & \text{alors } \sum a_n z^n \text{ est grossièrement divergente} \end{cases}}$

   démonstration en classe