INTEGRALES GENERALISEES
INTEGRALES IMPROPRES

Table des matières

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ comme d'habitude
- Dans tout ce résumé, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.
- On rappelle qu'un segment est un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$.
- **En intégration, la notion de segment est fondamental.**

- DANS CE POLYCOPIÉ, NOUS ALLONS DONNER UN SENS À DES INTÉGRALES DE FONCTIONS QUI SONT CONTINUES SUR UN INTERVALLE QUELCONQUE.

théorème 1: théorème fondamental du calcul intégral(rappel)

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, et f une fonction définie et continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors:

i) l'intégrale de f sur le segment $[a,b]$ existe, càd $\displaystyle\int_a^b f$ existe.

ii) et l'on a $\displaystyle\int_a^b f = F(b) - F(a)$ où F désigne une primitive quelconque de f sur $[a,b]$

L'intégrale d'une fonction continue sur un segment existe toujours.
Ppur justifier qu'une intégrale NON généralisée existe, on écrit au choix

- **"une fonction CONTINUE sur un SEGMENT est intégrable* sur ce segment"**.
- **"la fonction f est CONTINUE sur le SEGMENT $[a,b]$ donc $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ existe"**

1 Définition, exemples (V072)

définition 1: intégrale généralisée en sa borne supérieure

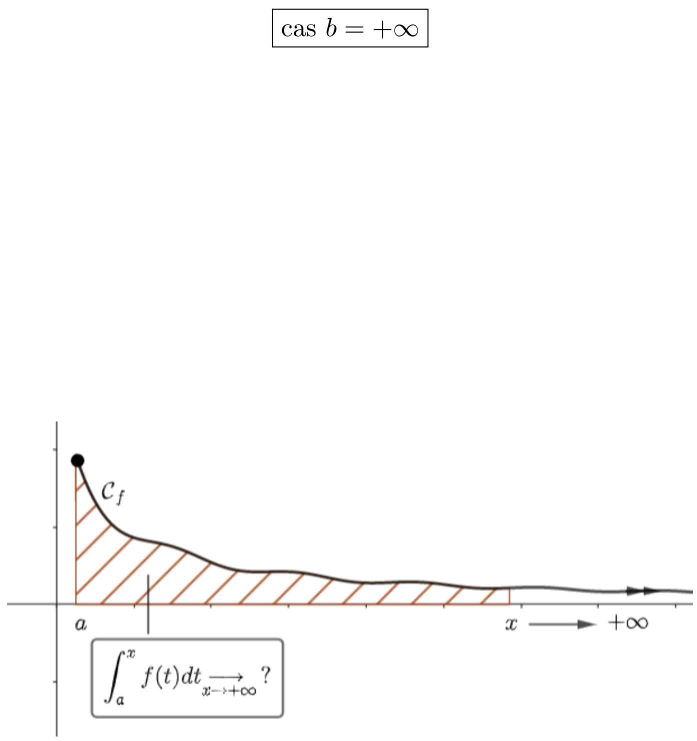
Soit $[a,b[$ un intervalle semi-ouvert avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Soit f une fonction continue de $[a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$

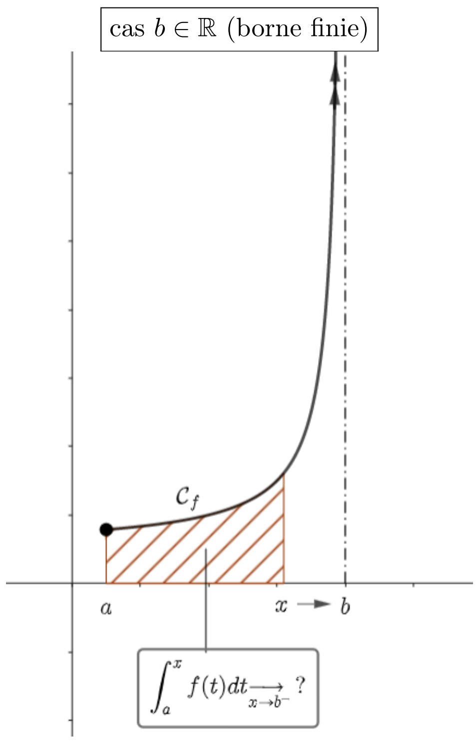
1. On dit que L'INTÉGRALE $\int_a^b f(t)dt$ EST CONVERGENTE (EN b) lorsque la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers b par valeurs inférieures

   Si tel est le cas, on note $\boxed{\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt}$

2. Dans le cas contraire, on dit que $\int_a^b f(t)dt$ est une INTÉGRALE DIVERGENTE (EN b).

remarque: comme pour les séries numériques, la notation $\int_a^b f(t)dt$ *désigne "le problème" et, dans le cas de convergence, la valeur de l'intégrale, c'est à dire un nombre réel ou complexe.*





rem: lorsque l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ *diverge c'est*

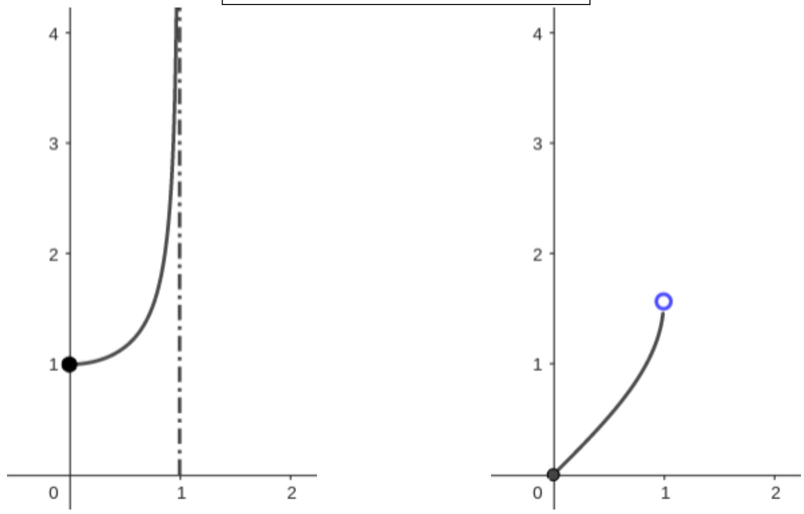
- *soit parce que* $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ *possède une limite infinie quand* $t \to b^-$
- *soit parce que* $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ *NE possède PAS de limite quand* $t \to b^-$

exemple 1:

Déterminer la nature et éventuellement la valeur de

$$I = \int_0^{\pi/2} \tan(t).dt \qquad J = \int_0^{\infty} \cos(t)dt \qquad K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t}} \qquad L = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

intervalle d'intégration $= [0,1[$



graphe de $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ graphe de $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)dt$

On adapte la définition précédente à une intégrale généralisée en sa borne inférieure.

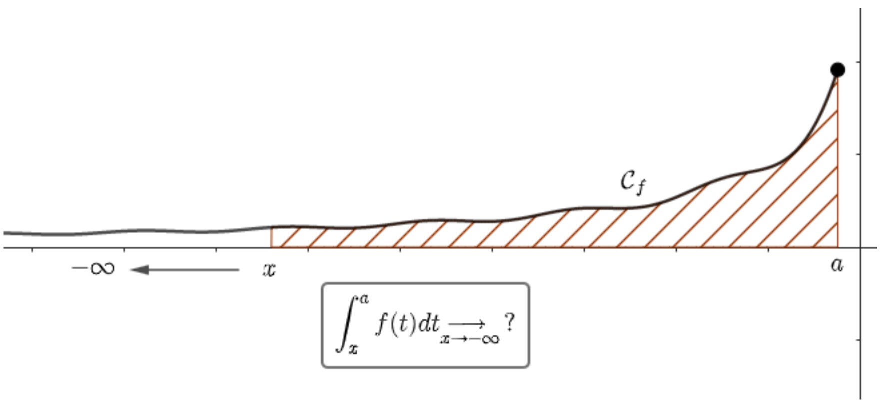
définition 2: intégrale généralisée en sa borne inférieure

Soit $]a,b]$ un intervalle semi-ouvert avec $b \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.
Soit f une fonction continue de $]a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$

1. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente (en a) lorsque la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)dt$ admet une limite <u>finie</u> lorsque x tend vers a par valeurs supérieures

   Si tel est le cas, on note $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)dt}$

2. Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est une intégrale divergente (en a).



exemple 2:

Nature et éventuellement calcul de $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{dt}{t^2-1}$

exemple 3: déterminer la nature d'une intégrale à l'aide de la définition

Nature et éventuellement calcul de $\int_{-\infty}^{0} \cos(t)dt$

- *La fonction* $\cos$ *est continue sur* $]-\infty,0]$

  L'intégrale $\int_{-\infty}^{0} \cos(t)dt$ *est donc généralisée en sa borne inférieure uniquement*

- *Soit* $x \leqslant 0$

  On a $\quad F(x) = \int_{x}^{0} \cos(t)dt = [\sin(t)]_x^0 = -\sin(x)$

  Comme F *ne possède pas de limite en* $-\infty$*, on a montré que* $\int_{-\infty}^{0} \cos(t)dt$ *est une intégrale divergente.*

2 Intégrale faussement généralisée (V073)

définition 3: fonction prolongeable par continuité

Soit I un intervalle, et x_0 un élément de I ou une borne **finie** de I.
Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $I - \{x_0\}$.
On dit que f EST PROLONGEABLE PAR CONTINUITÉ EN x_0 lorsque $\lim_{x \to x_0} f(x)$ **existe et est finie**

La fonction ainsi prolongée est la fonction $\boxed{\begin{array}{rcl} \overline{f} : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) & \text{si } x = x_0 \end{cases} \end{array}}$

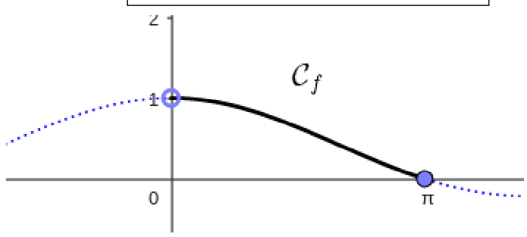
La fonction $\overline{f}$ *est alors une fonction continue sur* I.

rem: Très souvent, l'énoncé dit que "l'on appellera encore f *la fonction ainsi prolongée"*

rem: on ne dit jamais qu'une fonction est prolongeable par continuité en $+\infty$ *ou en* $-\infty$

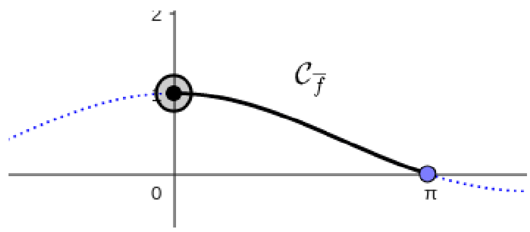
exemple 4: fonction prolongeable en un point intérieur de l'intervalle

- La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}^*$
- On sait $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$ (limite finie)
  On peut donc affirmer que *la fonction* f *est prolongeable par continuité en* 0
- La fonction $\boxed{\begin{array}{rcl} \overline{f} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases} \end{array}}$ est maintenant une fonction continue sur $\mathbb{R}$.



f *est N'est PAS définie en* 1

$\int_0^1 f(t)dt$ EST FAUSSEMENT GÉNÉRALISÉE EN 0



$\overline{f}$ *est définie et continue en* 1

$\int_0^1 \overline{f}(t)dt$ N'EST PAS UNE INTÉGRALE GÉNÉRALISÉE

exemple 5: fonction prolongeable en une borne de l'intervalle

- La fonction $\begin{array}{rcl} f :]0{,}1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t.\ln t \end{array}$ est une fonction dèfinie et continue sur $]0{,}1]$
- On sait que $\lim\limits_{t \to 0^+} t.\ln t = 0$ (limite finie)
  On peut donc affirmer que f *est prolongeable par continuité en* 0
- La fonction $\boxed{\begin{array}{rcl} f : [0{,}1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} t.\ln t & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } = 0 \end{cases} \end{array}}$ est maintenant une fonction continue sur $[0{,}1]$

définition 4: intégrale faussement généralisée en sa borne supérieure

Soit $f \in C^0([a,b[,\mathbb{K})$ avec a et b bornes finies

On dit que L'INTÉGRALE $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ EST FAUSSEMENT GÉNÉRALISÉE EN b lorsque f est prolongeable par continuité en b

rem: une intégrale faussement généralisée est bien sûr convergente. (la réciproque est fausse)

exemple 6:

Nature de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{t}.\ln t.dt$

- *La fonction* $f : t \mapsto \sqrt{t}.\ln t$ *est continue sur* $]0{,}1]$.
  L'intégrale I *est donc généralisée en sa borne inférieure uniquement.*

- *On a* $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t) = 0$ *d'après le théorème des croissances comparées.*
  Comme f *possède une limite* ***finie*** *en* 0^+, *on peut affirmer que* f *est prolongeable par continuité en* 0

- *On a prouvé que l'intégrale* I *était une intégralement faussement généralisée.*

exemple 7:

Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2t} - e^2}{t-1} dt$ est faussement généralisée (par deux méthodes)

définition 5: intégrale faussement généralisée en sa borne inférieure

Soit $f \in C^0(]a,b],\mathbb{K})$ avec a et b bornes finies

On dit que L'INTÉGRALE $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ EST FAUSSEMENT GÉNÉRALISÉE EN a lorsque f est prolongeable par continuité en a

3 Des remarques bien utiles (V074)

théorème 2: évident et très pratique!

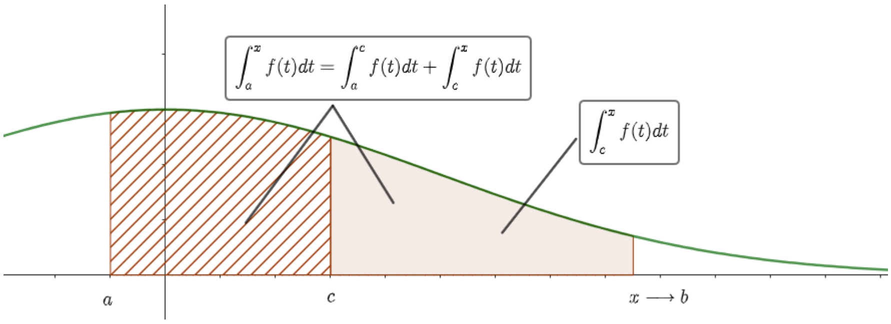
Soit $f \in C^0([a,b[,\mathbb{K})$ et $c \in [a,b[$

Alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)dt$ sont de même nature.

rem: la nature d'une intégrale ne dépend que du comportement de la fonction en la borne généralisée (càd celle qui "pose problème")
rem: l'énoncé de ce théorème n'est pas à retenir

le problème de la convergence d'une intégrale est une propriété locale : c'est le comportement de la fonction au voisinage de b, et uniquement au voisinage de b, qui va déterminer la nature de l'intégrale généralisée. C'est pour cela que l'on peut préciser que "l'intégrale est convergente en b" ou que "l'intégrale est divergente en b"

Cette remarque est à rapprocher de celle vue sur les séries numériques:
"LA NATURE D'UN SÉRIE N'EST PAS CHANGÉE SI ON EN MODIFIE UN NOMBRE FINI DE TERMES"



théorème 3: produit d'une intégrale généralisée par un scalaire non nul

Soit $f \in C^0([a,b[,\mathbb{K})$.
Soit λ un scalaire **non nul** fixé.

1. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge alors $\displaystyle\int_a^b \lambda f(t)dt$ converge, et l'on a

$$\boxed{\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt}$$

2. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ diverge alors $\displaystyle\int_a^b \lambda f(t)dt$ diverge

"multiplier l'intégrande par un scalaire non nul ne change pas la nature de l'intégrale"

démonstration

- Notons $h = \lambda.f$
- Comme les fonctions f et h sont continues sur $[a,b[$, elles admettent des primitives sur cet intervalle.

  Pour tout $x \in [a,b[$ on note $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ et $H(x) = \displaystyle\int_a^x h(t)dt$
- On a par linéarité de l'intégrale (de sup!) pour tout $x \in [a,b[$

$$H(x) = \int_a^x h(t)dt = \int_a^x \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^x f(t)dt = \lambda F(x)$$

- **Supposons que $\int_a^b f(t)dt$ converge**

  Par définition, ceci signifie que la fonction F possède une limite finie l lorsque $x \to b^-$.

  On a donc $\lim\limits_{x\to b^-} H(x) = \lim\limits_{x\to b^-} \lambda.F(x) = \lambda.l$ (limite finie)

  Ceci prouve que $\int_a^b \lambda f(t)dt$ est une intégrale CV, et que l'on a

$$\int_a^b \lambda f(t)dt = \lim_{x\to b^-} H(x) = \lambda.l = \lambda.\int_a^b f(t)dt$$

- **Supposons que $\int_a^b f(t)dt$ diverge**

  Ceci signifie que la fonction F ne posssède pas de limite finie en b^-.

  Comme $H = \lambda.F$ avec $\lambda \neq 0$, les théorèmes généraux sur les limites indiquent que H ne peut posséder de limite finie en b^-.
  Ce qui signifie que $\displaystyle\int_a^b \lambda f(t)dt$ est une intégrale DV.

théorème 4: conséquence directe des théorèmes généraux sur les limites

Soient $f,g \in C^0([a,b[,\mathbb{K})$.

1. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge et si $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ diverge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)+g(t)dt$ diverge
2. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge et si $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)+g(t)dt$ converge,
   et l'on a
$$\boxed{\int_a^b f(t)+g(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt}$$
3. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ diverge et si $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ diverge alors on ne peut conclure quant à la nature de $\displaystyle\int_a^b f(t)+g(t)dt$

démonstration du théorème 3

- Notons $h = f + g$
- Comme les fonctions f, g et h sont continues sur $[a,b[$,
  elles admettent des primitives sur cet intervalle.

  Pour tout $x \in [a,b[$ on note

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad G(x) = \int_a^x g(t)dt \qquad H(x) = \int_a^x h(t)dt$$

- On a par linéarité de l'intégrale (de sup!) pour tout $x \in [a,b[$

$$H(x) = \int_a^x f(t)+g(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_a^x g(t)dt = F(x) + G(x)$$

- Les théorèmes généraux sur les limites donnent alors directement les résultats du théorème.

  Plus précisément dans le cas où F et G possèdent des limites finies en b^-
  On a alors H qui admet une limite finie en b^-
  (et ceci prouve déjà que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b h(t)dt$ est convergente)
  et l'on a

$$\int_a^b h(t)dt = \lim_{x\to b^-} H(x) = \lim_{x\to b^-} F(x)+G(x) = \lim_{x\to b^-} F(x) + \lim_{x\to b^-} G(x) = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$

théorème 5: linéarité en cas de convergence

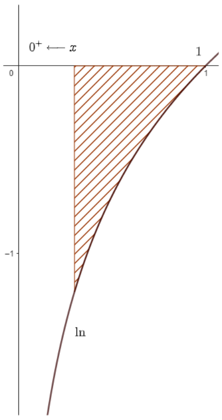
Soient $f,g \in C^0([a,b[,\mathbb{K})$ telles que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ convergent.
On a pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$

1. $\displaystyle\int_a^b \lambda.f(t) + g(t)dt$ converge
2. **linéarité:** $\displaystyle\int_a^b \lambda.f(t) + g(t)dt = \lambda\int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$

4 Intégrales de référence (V075)

théorème 6: une intégrale de référence

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$ est une intégrale convergente (en 0)



démonstration

- La fonction ln est continue sur $]0,1]$, l'intégrale est généralisée en 0.

- Soit $x > 0$.
  On a
  $$F(x) = \int_x^1 \ln(t)dt = [t.\ln t]_x^1 - \int_x^1 dt = -x\ln x - 1 + x$$
  D'après le théorème des croissances comparées, on sait que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x.\ln x = 0$

  On a ainsi $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} F(x) = -1$ (limite finie).

  On a prouvé que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$ converge (et vaut -1)

- remarque: en prouvant ceci, on a aussi prouvé que la convergence des intégrales suivantes:
  $\displaystyle\int_0^1 3\ln(t)dt$, $\displaystyle\int_0^2 \ln(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^{10^{10}} 3\ln(t)dt$ mais évidemment pas celle-ci $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)dt$

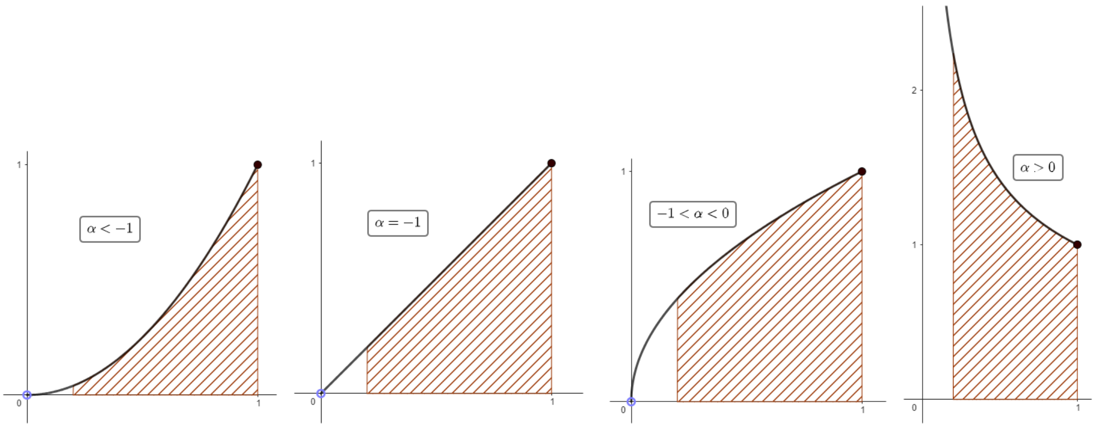
théorème 7: une intégrale de référence (identique à celle-ci-dessus)

Soit $b > 0$ et $k \neq 0$
L'intégrale $\displaystyle\int_0^b k.\ln(t)dt$ est une intégrale convergente (en 0)
rem: ce théorème n'est pas à retenir

théorème 8: intégrale de Riemann en 0

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

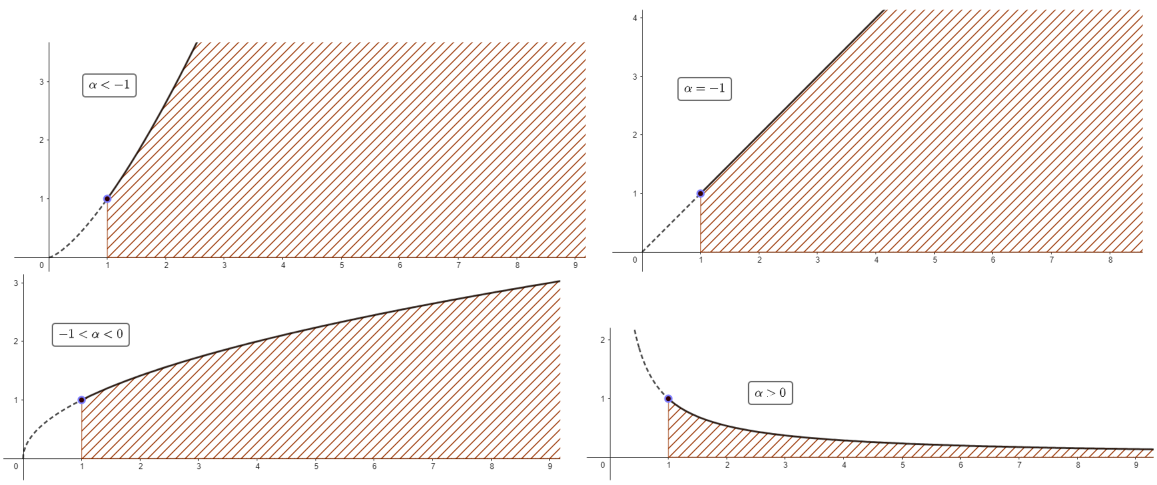
L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente (en 0) ssi $\alpha < 1$



théorème 9: intégrale de Riemann en $+\infty$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

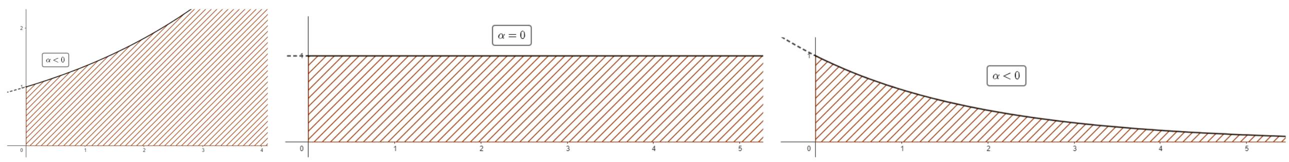
L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente (en $+\infty$) ssi $\alpha > 1$



théorème 10: une quatrième intégrale de référence

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge (en $+\infty$) ssi $\alpha > 0$



5 Des théorèmes que l'on semble déjà connaître (V076)

théorème 11:

Soit $f \in C^0([a,b[,\mathbb{K})$ **positive**. On a l'équivalence:

$$\text{l'intégrale } \int_a^b f(t)dt \text{ converge (en } b\text{) ssi la fonction } x \mapsto \int_a^x f(t)dt \text{ est majorée}$$

rem: dans le chapitre sur les séries numériques, nous avions vu un théorème similaire: si le terme général est positif alors la suite des sommes partielles est croissante et donc elle converge ssi elle est majorée

démo: Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b[$.
Notons pour tout $x \in [a,b[, F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$.
D'après le théorème fondamental de l'analyse, on sait que F est l'unique primitive de la fonction f qui s'annule en a.
On a donc $F' = f \geqslant 0$. Ce qui prouve que la fonction F est une fonction croissante.
D'après le théorème de la limite monotone, on sait que F possèdera une limite finie en b ssi F est majoré

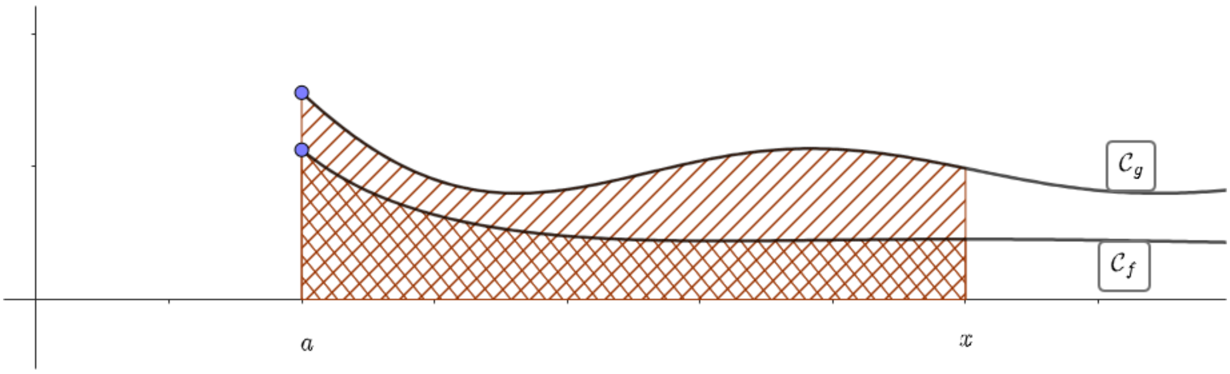
théorème 12: théorème de comparaison des fonctions positives

Soient $f,g \in C^0([a,b[,\mathbb{K})$ telles que $\forall t \in [a,b[, 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$

i) Si $\displaystyle\int_a^b g$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f$ converge.

ii) Si $\displaystyle\int_a^b f$ diverge alors $\displaystyle\int_a^b g$ diverge.

rem: on pourrait dire aussi "si l'integrale de g converge en b alors l'intégrale de f converge en b"
rem: il suffit d'avoir l'inégalité $0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$ sur un voisinage de b^- pour avoir les mêmes implications



exemple 8:

Déterminer la nature de $I = \displaystyle\int_1^\infty \frac{dt}{t^{3+\cos t}}$

- *Soit* $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^{3+\cos t}} = \exp(-(3+\cos t).\ln t)$.
  La fonction f *est continue sur* $[1,+\infty[$ *comme composée de fonctions continues.*
- *Soit* $g : t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$.
  La fonction g *est continue sur* $[1,+\infty[$.
- *On a* $\forall t \in [1,+\infty[, 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$ *(preuve en classe)*
- *Comme* $\displaystyle\int_1^\infty g(t)dt$ *est une intégrale de référence convergente, on peut affirmer par théorème de comparaison que l'intégrale* I *est convergente*

exemple 9:

Déterminer la nature de $I = \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^{\cos t}}$

théorème 13: règle des équivalents

Soient $f,g \in C^0([a,b[,\mathbb{R})$.
Si $f \underset{b^-}{\sim} g$ et **si** g est de signe stable au voisinage de b^- **alors** :

$$\text{les intégrales } \int_a^b f \text{ et } \int_a^b g \text{ sont de même nature.}$$

.
rem: comme pour les séries numériques on précisera bien que le signe est stable (quand c 'est effectivement le cas!)

exemple 10:

Nature des intégrales $I = \int_1^{\infty} \frac{5t+4}{t^3+t^2+1} dt$, $J = \int_0^3 \frac{dt}{\sin t}$ et $K = \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^3+1}$

théorème 14: analogue du théorème 11

Soient $f,g \in C^0(]a,b],\mathbb{K})$ telles que $\forall t \in]a,b], 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$

i) Si $\int_a^b g$ converge alors $\int_a^b f$ converge.

ii) Si $\int_a^b f$ diverge alors $\int_a^b g$ diverge.

rem: on pourrait dire aussi "si l'integrale de g converge en a alors l'intégrale de f converge en a"
rem: il suffit d'avoir l'inégalité $0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$ sur un voisinage de a^+ pour avoir les mêmes implications

théorème 15: analogue du théorème 12

Soient $f,g \in C^0(]a,b],\mathbb{R})$.
Si $f \underset{a^+}{\sim} g$ et **si** g est de signe stable au voisinage de a^+ **alors** :

$$\text{les intégrales } \int_a^b f \text{ et } \int_a^b g \text{ sont de même nature.}$$

.
rem: comme pour les séries numériques on précisera bien que le signe est stable (quand c 'est effectivement le cas!)

théorème 16: croissance, positivité

Soient $f,g \in C^0([a,b[,\mathbb{R})$ telles que $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b$ convergent.

1. **positivité:** si $\forall t \in [a,b[, 0 \leqslant f(t)$ alors $0 \leqslant \int_a^b f(t)dt$
2. **croissance:** si $\forall t \in [a,b[, f(t) \leqslant g(t)$ alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$

6 Intégrale généralisée en ses deux bornes

définition 6: intégrale généralisée sur un intervalle ouvert

Soit $f \in C^0(]a,b[)$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

1. On dit que L'INTÉGRALE (DOUBLEMENT GÉNÉRALISÉE) $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ EST CONVERGENTE s'il existe $c \in]a,b[$ tel que <u>les deux intégrales</u> $\displaystyle\int_a^c f(t)dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)dt$ convergent.

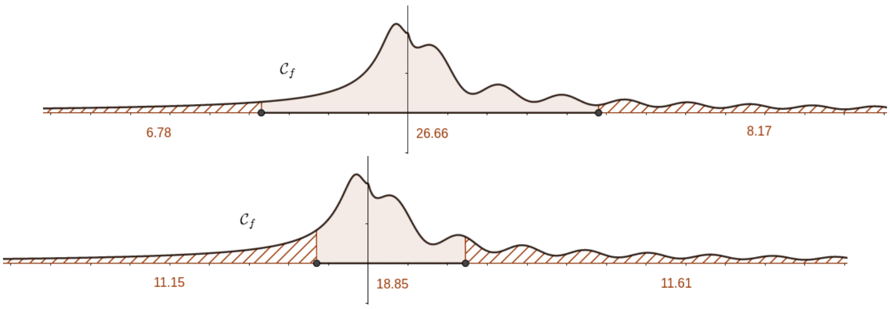
   On pose alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$

2. Dans le cas contraire, on dit que L'INTÉGRALE $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ DIVERGE.

rem: en cas de convrgence, la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *ne dépend pas du réel c*

rem: "une intégrale généralisée en ses 2 bornes est convergente ssi elle converge en ses 2 bornes"

rem: grâce à cette définition, on pourra utiliser la relation de Chasles et la linéarité pour les intégrales impropres convergentes.



exemple 11:

Nature de $I_\alpha = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et de $J = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln t}{1 + t^3.\ln(t+2)} dt$

remarque 1 (***cas où l'intervalle d'intégration est*** $\mathbb{R}$)

Pour étudier la convergence d'une intégrale généralisée du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$*, il faut et il suffit donc d'étudier séparément la convergence en* $+\infty$ *et en* ∞*. Si l'une des deux diverge, on peut directement affirmer que* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ *est divergente.*

Attention! Il ne faut surtout pas s'intéresser à $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \int_{-x}^{x} f(t)dt$ ***!***

En revanche, on peut s'intéresser à la limite de $\displaystyle\int_x^y f(t)dt$ *lorsque* $x \to -\infty$ *et* $y \to +\infty$

(l'idée est de "séparer" les 2 problèmes de convergence)

exemple 12:

Nature de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t.dt$

- On sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t.dt$ est une intégrale divergente, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t.dt$ DV
- Il n'en est pas moins clair que $\lim\limits_{x \to \infty} \int_{-x}^{x} t.dt = \lim\limits_{x \to \infty} \left[t^2/2\right]_{-x}^{x} = \lim\limits_{x \to \infty} 0 = 0$

7 Des théorèmes pas vraiment indispensables

théorème 17: changement de variable strictement croissant

Soit $]a,b[$ et $]\alpha,\beta[$ deux intervalles de $\mathbb{R}$
Soit f une fonction continue de $]a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Soit φ une fonction de classe C^1, strictement croissante et bijective de $]\alpha,\beta[$ sur $]a,b[$.
Alors :
les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u)).\varphi'(u)du$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

dans la pratique, cela revient

- *à poser $t = \varphi(u)$ et ainsi à remplacer dt par $\varphi'(u)du$*
- *à préciser que φ est C^1 et bijective de $]\alpha,\beta[$ sur $]a,b[$*
- *puis à dire que $t \to a$ [resp. $t \to b$] équivaut à $u \to \alpha$ [resp. $u \to \beta$] par croissance de φ*

rem: l'énoncé de ce théorème n'est pas à retenir

théorème 18: changement de variable strictement décroissant

Soit $]a,b[$ et $]\alpha,\beta[$ deux intervalles de $\mathbb{R}$
Soit f une fonction continue de $]a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Soit φ une fonction de classe C^1, strictement décroissante et bijective de $]\alpha,\beta[$ sur $]a,b[$.
Alors :
les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_\beta^\alpha f(\varphi(u)).\varphi'(u)du$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

dans la pratique, cela revient

- *à poser $t = \varphi(u)$ et ainsi à remplacer dt par $\varphi'(u)du$*
- *à préciser que φ est C^1 et bijective de $]\alpha,\beta[$ sur $]a,b[$*
- *puis à dire que $t \to a$ [resp. $t \to b$] équivaut à $u \to \beta$ [resp. $u \to \alpha$] par décroissance de φ*

rem: l'énoncé de ce théorème n'est pas à retenir

Le programme précise qu'on appliquera ces résultats sans vérifier les hypothèses dans les cas de changements de variables classiques (càd la plupart du temps affines)

exemple 13:

Convergence et valeur de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^2}$ (on posera $t = \tan\theta$)

exemple 14: intégrale généralisée en $-\infty$

Nature de $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{dt}{t^3}$

- L'intégrale est généralisée en sa borne inférieure uniquement.
- *On effectue le changement de variable affine $t = -u$.*
  Ce changement de variable est C^1, strictement monotone et bijectif.

  On peut donc affirmer que *les intégrales I et* $\displaystyle\int_{+\infty}^{1} \frac{-du}{(-u)^3} = -\int_1^\infty \frac{du}{u^3}$ *sont de même nature, et égales en cas de convergence.*
- Comme $\displaystyle\int_1^\infty \frac{du}{u^3}$ est une intégrale de référence convergente,

  on peut en déduire que I converge, et l'on a $I = -\displaystyle\int_1^\infty \frac{du}{u^3}$

exemple 15: intégrale généralisée en une borne finie autre que zéro

Nature de $I=\displaystyle\int_2^4 \frac{dt}{(4-t)^\alpha}dt$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$
rem: on verra plus tard un théorème qui donne directement ce résultat

- L'intégrale est généralisée en sa borne supérieure

- *On effectue le changement de variable affine $u=4-t$.*
  Ce changement de variable est C^1, strictement monotone et bijectif.

  On peut donc affirmer que *les intégrales I et $\displaystyle\int_2^0 \frac{-du}{u^\alpha}=\int_0^2 \frac{du}{u^\alpha}$ sont de même nature,et égales en cas de convergence.*
- Or on sait que $\displaystyle\int_0^2 \frac{du}{u^\alpha}$ CV ssi $\alpha<1$
- Conclusion: $\boxed{I \text{ converge ssi } \alpha<1}$

exemple 16:

A l'aide du changement de variable $u=t-2$ étudier la convergence $I_\alpha=\displaystyle\int_2^4 \frac{dt}{(t^2-4)^\alpha}$

théorème 19: intégration par parties

Soient f et g deux fonctions de classe C^1 de $]a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
telles que le produit $f.g$ possède une limite finie en a^+ et en b^-.
Alors:
i) Les intégrales $\int_a^b f.g'$ et $\int_a^b f'.g$ sont de même nature.
ii) En cas de convergence, on a de plus

$$\boxed{\int_a^b f.g' = \lim_{t\to b^-} f(t)g(t) - \lim_{t\to a^+} f(t)g(t) - \int_a^b f'.g = [f.g]_a^b - \int_a^b f'.g}$$

rem: il est toujours possible de se passer de ce théorème en effectuant une ipp sur un segment $[x,y]\subset]a,b[$ puis faire tendre x vers a^+ et y vers b^-
rem: l'énoncé de ce théorème n'est pas à mémoriser

exemple 17:

Convergence et éventuellement valeur de $I=\displaystyle\int_0^\infty t.e^{-t}.dt$ et $J=\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{(1+t)^2}dt$

exemple 18:

Montrer que les intégrales $I=\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos t}{t}dt$ et $J=\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^2}dt$ sont de même nature

8 Absolue convergence, fonction intégrable sur un intervalle

Dans cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.
On note $a = \inf(I) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b = \sup(I) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est alors aussi notée $\displaystyle\int_I f(t)$ ou $\displaystyle\int_I f$

définition 7: intégrale absolument convergente

Soit $f \in C^0(I,\mathbb{K})$
On dit que L'INTÉGRALE $\displaystyle\int_I f$ EST ABSOLUMENT CONVERGENTE lorsque l'intégrale $\displaystyle\int_I |f|$ converge.

définition 8: fonction intégrable sur un intervalle

Soit $f \in C^0(I,\mathbb{K})$
On dit que LA FONCTION f EST INTÉGRABLE SUR L'INTERVALLE I lorsque l'intégrale $\displaystyle\int_I f$ est absolument convergente.

On note $L^1(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues et intégrables sur I

remarque 2 (***vocabulaire***)

- *une fonction intégrable sur $[a,b[$ est dite* INTÉGRABLE EN b
- *une fonction intégrable sur $]a,b]$ est dite* INTÉGRABLE EN a

remarque 3

- *pour une fonction positive sur I il n'y a pas de différence entre CV et ACV*
- *pour une fonction négative sur I il n'y a pas de différence entre CV et ACV*
- *de manière plus générale, si la fonction est de signe constant au voisinage de la borne qui pose problème, il n'y a pas de différence entre CV et ACV*
- *la notion d'ACV n'est intéressante que pour les fonctions à valeurs complexes ou de signe non stable au voisinage de la borne qui pose problème*
- *une fonction continue sur un segment est intégrable sur ce segment.*
  En effet:
  Soit $f \in C^0([a,b],\mathbb{K})$.
  On sait alors que $|f|$ est une fonction continue sur le segment $[a,b]$ et donc que par théorème (voir rappel première page) l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f|$ existe.
- *si f est intégrable sur I alors f est intégrable sur tout intervalle inclus dans I*

méthode 1: comment justifier de l'intégrabilité d'une fonction sur un intervalle

1. cas où f est continue sur un segment.
   Il suffit de dire "la fonction f est continue sur le segment $[a,b]$ donc f est intégrable sur $[a,b]$"
2. cas où f est continue sur un intervalle I quelconque.
   Il suffit de montrer que $\displaystyle\int_I f$ est ACV

théorème 20:

$L^1(I,\mathbb{K})$ est un sev de $C^0(I,\mathbb{K})$

"toute combinaison linéaire de fonctions intégrables sur I est encore une fonction intégrable sur I"

théorème 21: l'absolue convergence implique la convergence

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $f \in C^0(I,\mathbb{K})$

Si f est intégrable sur I **alors** $\displaystyle\int_I f = \int_I f(t)dt$ est convergente, et

$$\boxed{\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f| \qquad \text{(inégalité triangulaire)}}$$

rem: comme pour les séries, on a ACV $\Longrightarrow$ CV mais la réciproque est fausse

exemple 19:

On montrera en exercice que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt$ est convergente mais pas absolument convergente.
Autrement dit, la fonction $f : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$ mais l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt$ converge

théorème 22: exemples de référence énoncés en terme d'intégrabilité

1. la fonction ln est intégrable sur $]0,1]$ (en 0)
2. la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur l'intervalle $[1, +\infty[$ (en $+\infty$) ssi $\alpha > 1$
3. la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,1]$ (en 0) ssi $\alpha < 1$
4. la fonction $t \mapsto \exp(-\alpha t)$ est intégrable sur l'intervalle $[0, +\infty[$ (en $+\infty$) ssi $\alpha > 0$

rem: il est également précisé au programme que l'on pourra utiliser directement le résultat suivant (a réel fixé)

$$\textit{la fonction } t \mapsto \frac{1}{|t-a|^\alpha} \textit{ est intégrable en } a \quad \textit{ssi} \quad \alpha < 1$$

exemple 20:

α étant un réel fixé, donner la nature de $I_\alpha = \displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{(t-1)^\alpha}$ et de $J_\alpha = \displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{(2-t)^\alpha}$

remarque 4 (***rappel de définitions***)

- *On dit que* $f =_{b^-} o(g)$ *lorsque* $\displaystyle\lim_{b^-} \frac{f}{g} = 0$

  càd lorsqu'il existe une fonction h telle que $f = h.g$ avec $\displaystyle\lim_{b^-} h = 0$

- *On dit que* $f = O_{b^-}(g)$ *lorsque la fonction* $\dfrac{f}{g}$ *est bornée au voisinage de* b^-

  càd lorsqu'il existe une fonction h telle que $f = h.g$ avec h bornée au voisinage de b^-

théorème 23: théorèmes de comparaison

Soient $f,g \in C^0([a,b[,\mathbb{K})$

1. **comparaison avec les inégalités:**

   Si $\begin{cases} |f| \leqslant |g| \\ g \text{ intégrable sur } [a,b[\text{ (en } b) \end{cases}$ alors f est intégrable sur $[a,b[$ (en b)

2. **comparaison avec les O:**

   Si $\begin{cases} f(t) =_{b^-} O(g(t)) \\ g \text{ intégrable sur } [a,b[\text{ (en } b) \end{cases}$ alors f est intégrable sur $[a,b[$ (en b)

3. **comparaison avec les o:**

   Si $\begin{cases} f(t) =_{b^-} o(g(t)) \\ g \text{ intégrable sur } [a,b[\text{ (en } b) \end{cases}$ alors f est intégrable sur $[a,b[$ (en b)

4. **comparaison avec les équivalents:**

   Si $f \underset{b^-}{\sim} g$ alors l'intégrabilité de f sur $[a,b[$ équivaut à celle de g

rem: on ne l'écrit pas, mais il y aurait un théorème analogue pour l'intervalle $]a,b]$

exemple 21: très classique

Montrer que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}$ est une intégrale convergente.

exemple 22: un exemple d'intégrale de Bertrand

Montrer que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln t}{t^3} dt$ est une intégrale convergente.

exemple 23: très classique aussi

Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$

exemple 24:

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{t}.\ln t}$ est convergente.

exemple 25: surprising, isn't it ?

Montrons que la fonction $t \mapsto \cos(\frac{1}{t})dt$ est intégrable sur $]0,1]$

remarque 5 (***utile pour comparer à des intégrales de Riemann***)

- *si* $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^\alpha.f(t) = l \in \mathbb{R}$ *alors* $f(t) = O_{+\infty}\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$
- *si* $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^\alpha.f(t) = +\infty$ *alors* $\dfrac{1}{t^\alpha} = o_{+\infty}(f(t))$

théorème 24: théorème de l'intégrale nulle

Si f est continue, positive, intégrable sur I et si $\displaystyle\int_I f = 0$ alors f est nulle sur I

exemple 26:

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\displaystyle\int_0^{\infty} |P(t)|.e^{-t}dt = \int_{[0,+\infty[} |P(t)|.e^{-t} = 0$.
Montrer que P est le polynôme constant nul.

9 Fonctions à valeurs complexes

Lorsque $f \in C^0(I,\mathbb{C})$ la plupart du temps on étudie l'ACV, cependant le résultat suivant est à connaître.

théorème 25: fonctions à valeurs complexes

Soit $f \in C^0(]a,b[,\mathbb{C})$

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge ssi $\displaystyle\int_a^b Re(f(t))dt$ et $\displaystyle\int_a^b Im(f(t))dt$ convergent.

et dans ce cas $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^b Re(f(t))dt + \int_a^b Im(f(t))dt$

Le théorème résulte directement de la proposition ci-dessous

proposition 1 (*limite d'une fonction à valeurs complexes*)

Soit $\boxed{\begin{array}{rcl} f : I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & f(t) = f_1(t) + i.f_2(t) \end{array}}$ et $t_0 \in \overline{I}$.

On a l'équivalence:

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = a + ib \in \mathbb{C} \Longleftrightarrow \lim_{t \to t_0} f_1(t) = a \text{ et } \lim_{t \to t_0} f_2(t) = b$$

tout se passe comme si $\mathbb{C}$ était identifié à $\mathbb{R}^2$, on sait alors que la limite de la fonction vectorielle est à considérer composante par composante

pour la démonstration de ce résultat, on utilise l'égalité $|f(t) - (a+ib)| = \sqrt{(f_1(t)-a)^2 + (f_2(t)-b)^2}$

exemple 27:

Nature et valeur de $I_n = \int_0^{\infty} e^{-t}.\cos(nt)$

10 Comparaison série-intégrale

théorème 26:

Soit n_0 un entier positif.
Soit f une fonction continue et DÉCROISSANTE sur $[n_0, +\infty[$.

La série de terme général $u_n = f(n)$ et l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature.

remarque 6 (*à savoir retrouver impérativement*)

- *on a pour tout $k > n_0$,* $\displaystyle\int_{k}^{k+1} f(t)dt \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)dt$ *et aussi* $\displaystyle\int_{n_0}^{n_0+1} f(t)dt \leqslant f(n_0)$
- *par sommation et la relation de Chasles*

$$\boxed{\forall n \geqslant n_0,\ \int_{n_0}^{n+1} f(t)dt \leqslant S_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \leqslant f(n_0) + \int_{n_0}^{n} f(t)dt}$$

- *en cas de convergence, par sommation et la relation de Chasles*

$$\forall n \geqslant n_0,\ \int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leqslant R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leqslant \int_{n}^{+\infty} f(t)dt$$

exemple 28: La preuve des séries de Riemann: enfin!

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$

exemple 29:

Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{1}{n.(\ln n)^\alpha}$ dans le cas $\alpha = 1$ puis dans le cas général

11 Annexe

théorème 27: théorème de la limite monotone (rappel)

Soit $]a,b[$ un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$ (éventuellement $]a,b[= \mathbb{R}$ tout entier)
Soit F une fonction **croissante** sur $]a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Alors:

i) F **possède une limite finie en** b^- **ssi** F **est majorée sur** $]a,b[$.
Plus précisément:
- si F est majorée sur $]a,b[$ alors $\lim\limits_{b^-} F = \sup\limits_{]a,b[}(F) \in \mathbb{R}$
- si F n'est pas majorée sur $]a,b[$ alors $\lim\limits_{b^-} F = +\infty$

ii) F **possède une limite finie en** a^+ **ssi** F **est minorée sur** $]a,b[$.
Plus précisément:
- si F est minorée sur $]a,b[$ alors $\lim\limits_{a^+} F = \inf\limits_{]a,b[}(F) \in \mathbb{R}$
- si F n'est pas minorée sur $]a,b[$ alors $\lim\limits_{a^+} F = -\infty$