EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES

Dans tout ce chapitre, on adoptera les notations suivantes :
- I désignera un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$
- $\mathbb{K}$ désignera le corps des réels ou des complexes
- a, b, c et d désigneront quatre fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$

Table des matières

---

exemple 1:

Résoudre l'équation différentielle $x.y' + \sin(x).y = 1$ sur $\mathbb{R}$

- *Il s'agit de déterminer toutes les fonctions y, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, qui vérifient $\forall x \in \mathbb{R}, x.y'(x) + \sin(x).y(x) = 1$*
- *On peut remarquer de suite que cette équation différentielle ne possède pas de solution sur $\mathbb{R}$! En effet, si une solution existait elle devrait vérifier en particulier $0.y'(0) + \sin(0).y(0) = 1$, càd $0 = 1$ ce qui est impossible!*
- *En revanche, si on souhaite résoudre cette équa. diff. sur $]0, +\infty[$, un théorème nous permettra d'affimer qu'une infinité de solutions existent!*
- **On retiendra de cet exemple que l'intervalle de résolution de l'équation différentielle est une hypothèse très importante dont il faut tenir compte!**

$\boxed{\textbf{On résout toujours une équation différentielle sur un INTERVALLE}}$

1 Equations différentielles linéaires du premier ordre

1.1 équation homogène

théorème 1: structure de l'ensemble des solutions, solution générale

Soit l'équation $\boxed{y' + a(x)y = 0}$ où $a \in C^0(I,\mathbb{K})$ et I intervalle de $\mathbb{R}$

1. L'ensemble des solutions de cette équation différentielle est un espace vectoriel de dimension 1
2. LA SOLUTION GÉNÉRALE est $\boxed{\begin{array}{rcl} y : I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & K.\exp(-A(x)) \end{array}}$ où A désigne une primitive de a et $K \in \mathbb{K}$ un scalaire quelconque

rem: ceci signifie qu'il y a une infinité de solutions, à savoir toutes les fonctions de la forme $\boxed{\begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & K.\exp(-A(x)) \end{array}}$

rem: ainsi en notant $f_1 : x \mapsto e^{-A(x)}$ et $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions, on a

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \{K.f_1 \,|\, K \in \mathbb{K}\} = \text{vect}(f_1) = \{x \mapsto K.e^{-A(x)} | K \in \mathbb{K}\} = \text{vect}(x \mapsto e^{-A(x)})}$$

démonstration:
Comme sur I la fonction e^A ne s'annule pas, on a les équivalences

$$y' + a.y = 0 \Longleftrightarrow (y' + a.y).e^A = 0 \Longleftrightarrow (y' + A'.y)e^A = 0 \Longleftrightarrow \left(y.e^A\right)' = 0$$

Comme I est un intervalle, ceci équivaut à dire que la fonction $y.e^A$ $\left[\text{càd la fonction } x \mapsto y(x)e^{A(x)}\right]$ est constante sur I. On a ainsi les équivalences

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de l'équation différentielle sur } I &\Longleftrightarrow \exists K \in \mathbb{K}, \forall x \in I, y(x)e^{A(x)} = K \\ &\Longleftrightarrow \exists K \in \mathbb{K}, \forall x \in I, y(x) = Ke^{-A(x)} \end{aligned}$$

méthode 1: résolution d'une EDLH du premier ordre (rédaction type)

La résolution consiste à déterminer une primitive de la fonction a puis à écrire la solution générale.
exemple:
Résoudre l'équation différentielle $y' + \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}y = 0$ sur $]-\infty,1[= I$

- *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre.*
- *La fonction $a : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ est définie et continue sur $]-\infty,1[= I$, elle possède donc des primitives sur cet intervalle.*
- *Une primitive de la fonction a sur I est* $\begin{array}{rcl} A :]-\infty,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -2\sqrt{1-x} \end{array}$
- *La solution générale est ainsi* $\boxed{\begin{array}{rcl} y :]-\infty,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & K.\exp(2\sqrt{1-x}) \end{array}}$ *avec K constante arbitraire.*

exemple 2:

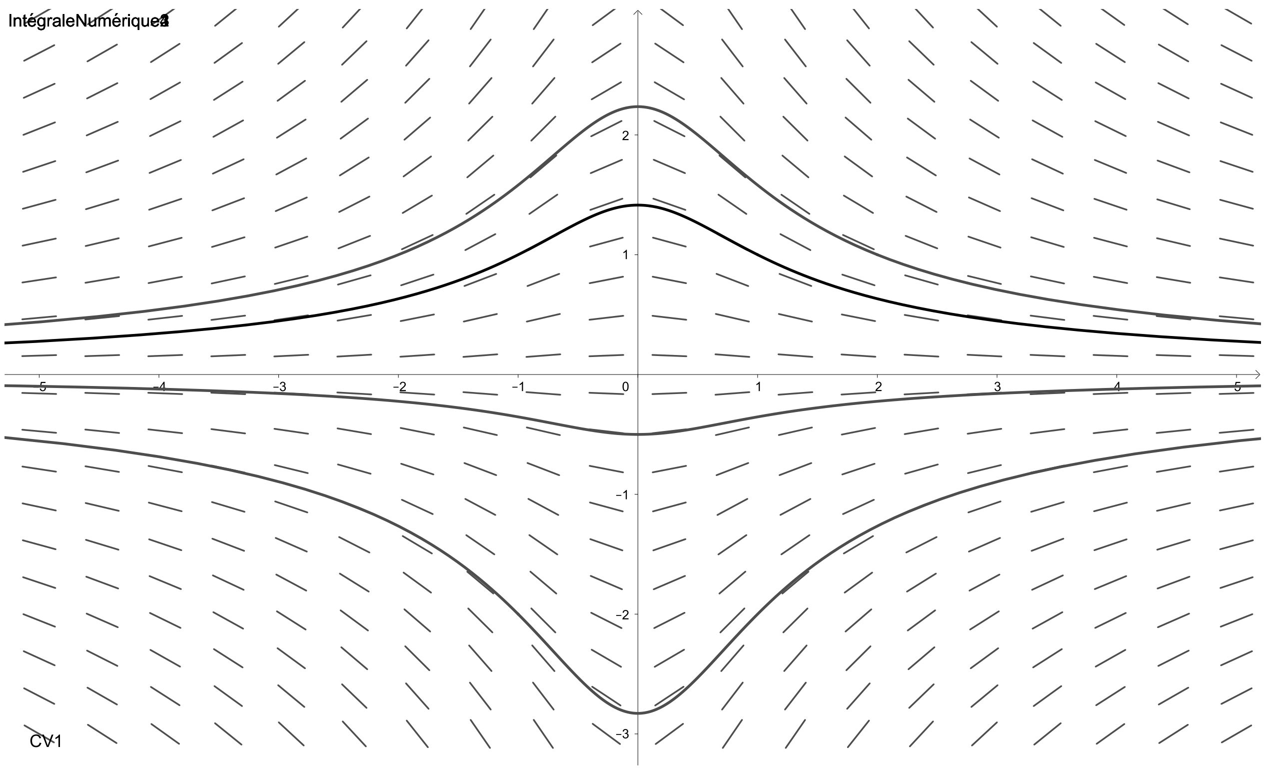
1. Déterminer une fonction $a \in C^0(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ telle que la fonction $x \mapsto x^x$ soit solution de l'équation $(E) : y' + a(x).y = 0$
2. Donner la solution générale de (E)

exemple 3: résolution de $(1+x^2)y'+xy=0$ sur $\mathbb{R}$.

- On commence par remarquer que $\forall x \in \mathbb{R}, 1+x^2 \neq 0$, et donc

$$\text{résoudre } (1+x^2)y'+xy=0 \text{ sur } \mathbb{R} \ \underline{\text{équivaut à}} \text{ résoudre } y'+\frac{x}{1+x^2}y=0 \text{ sur } \mathbb{R}\ .$$

  Cette démarche préalable est indispensable à faire, car elle nous permet de nous placer dans les hypothèses exactes du théorème.
  Si à la place de $1+x^2$ nous avions eu $1-x^2$ la situation aurait été bien différente et beaucoup plus complexe (problème de recollement en $\pm 1 \ldots$ voir l'exemple 18 en particulier)
- Avant de passer à la résolution de cette modeste équation différentielle, donnons-en une interprétation géométrique :



- *On a représenté ci-dessus le champ des tangentes associé à cette équation différentielle (càd au point de coordonnées (x,y) on a tracé un segment de pente $-\dfrac{x}{1+x^2}.y$) ainsi que le graphe de plusieurs solutions*
  Résolvons maintenant l'équation différentielle.
  - La fonction $a : x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ est continue sur $I=\mathbb{R}$ donc possède des primitives sur I
  - Une primitive de la fonction a sur I est $A : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x^2)}{2}$
  - La solution générale est ainsi $\boxed{\begin{array}{rcl} y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{K}{\sqrt{1+x^2}} \end{array}}$

remarque 1 (***définition de courbe intégrale***)

On appelle <u>courbe intégrale d'une équation différentielle</u> la courbe représentative d'une solution de cette équation différentielle.
Dans l'exemple ci-dessus, ***les courbes intégrales*** *de l'équation différentielle $(1+x^2)y'+xy=0$ sont les représentations graphiques des fonctions du type $f_K : x \mapsto \dfrac{K}{\sqrt{1+x^2}}$ avec $K \in \mathbb{R}$*

1.2 équations avec second membre

théorème 2: solution générale de l'équation avec second membre

Soit l'équation $\boxed{y' + a(x)y = b(x)}$ (ED1) où a et $b \in C^0(I,\mathbb{K})$ et I intervalle de $\mathbb{R}$.

La solution générale de l'équation avec second membre membre s'écrit comme la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée.

rem: en notant f_p une solution particulière et $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (ED1)

$$\mathcal{S} = \{f_p + K.f_1 \,|\, K \in \mathbb{K}\} = \{x \mapsto f_p(x) + K.e^{-A(x)} | K \in \mathbb{K}\} = f_p + \text{vect}(x \mapsto e^{-A(x)}) = f_p + \mathcal{S}_H$$

démonstration:
Notons f_p une solution particulière de (ED1)
Soit y une fonction dérivable sur I et posons $z = y - f_p$
On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
y \text{ est solution de (ED1)} &\iff y' + a.y = b \\
&\iff y' + a.y = f_p' + a.f_p \\
&\iff y' - f_p' + a.(y - f_p) = 0 \\
&\iff (y - f_p)' + a.(y - f_p) = 0 \\
&\iff z' + a.z = 0 \\
&\iff z \text{ est solution de l'éq.homogène associée}
\end{aligned}$$

théorème 3: Hors-Programme (à démontrer en exercice)

Soit l'équation $\boxed{y' + a(x)y = b(x)}$ (ED1) où a et $b \in C^0(I,\mathbb{K})$ et I intervalle de $\mathbb{R}$.
La solution générale de l'équation différentielle est

$$x \mapsto \left(K + \int^x b(t)e^{A(t)}dt\right).e^{-A(x)} = \underbrace{\left(\int^x b(t)e^{A(t)}dt\right)e^{-A(x)}}_{\text{sol.part.}} + \underbrace{Ke^{-A(x)}}_{\text{sol.géné}}$$

où K désigne une constante arbitraire et $x \mapsto \displaystyle\int^x b(t).e^{A(t)}dt$ une primitive de la fonction $b.e^A$

remarque 2

- *On appelle* <u>*solution de l'équa.diff $y' + a(x)y = b(x)$ sur I*</u> *toute fonction f définie et dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que $\forall x \in I, f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$*
- *Résoudre l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ c'est* <u>*trouver toutes les fonctions f définies et dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ telles que $\forall x \in I, f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$*</u>

remarque 3

- *Si f est solution de (ED1) alors f est nécessairement dérivable (et donc continue)*
- *vu que $f' = b - af$ avec a, b et f fonctions continues,*
  on en déduit que f' est aussi une fonction continue,
  c'est à dire que f est nécessairement de classe C^1 sur I
  Ceci justifie que $\boxed{\textit{l'ensemble des solutions est toujours inclus dans } C^1(I,\mathbb{K})}$

exemple 4: la difficulté réside en la recherche de la primitive...

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' + \exp(x^2).y = 2.\exp(x^2)$

méthode 2: variation de la constante

On détermine souvent (c'est à dire pas toujours...), en l'absence de solution évidente, une solution particulière en utilisant la méthode de la variation de la constante : si f_1 est une solution de l'équation homogène qui ne s'annule pas sur I, alors on cherche une solution particulière sous la forme $f_p : x \mapsto K(x)f_1(x)$ où K est une fonction inconnue dérivable sur I. En remplaçant dans l'équation différentielle (ED1), on obtient l'équation $K'(x) = \dfrac{b(x)}{f_1(x)}$.

Par primitivation, on trouve une fonction K et donc une solution particulière.

démonstration

On a

$$\begin{aligned} y' + a.y = b &\Longleftrightarrow (K.f_1)' + a.K.f_1 = b \\ &\Longleftrightarrow K'.f_1 + K.f_1 + a.K.f_1 = b \\ &\Longleftrightarrow K'.f_1 + K.\underbrace{(f_1' + a.f_1)}_{=0} = b \\ &\Longleftrightarrow K' = \frac{b}{f_1} \end{aligned}$$

exemple 5: variation de la constante (rédaction type)

Résoudre l'équation différentielle $y' - \frac{y}{2x} = \sqrt{x}\ln x$ (E) sur $]0, +\infty[$.

- *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre*
- *On commence par résoudre l'équation homogène associée, càd $y' - \dfrac{y}{2x} = 0$.*

  La fonction $\boxed{\begin{array}{rcl} a : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{2x} \end{array}}$ *est continue sur $]0, +\infty[= I$*

  Une primitive de cette fonction sur I est $\boxed{\begin{array}{rcl} A : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{2}\ln x \end{array}}$

  La solution générale de l'équation homogène est donc $\boxed{\begin{array}{rcl} y :]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & K.\sqrt{x} \end{array}}$ *avec K constante réelle arbitraire*
- *En l'absence de solution évidente, on utilise la méthode de la variation de la constante.*
  On cherche une solution particulière sous la forme $f_p : x \mapsto K(x).\sqrt{x}$ avec K fonction dérivable sur I.
  En reportant dans (E), on obtient pour tout $x \in I$

  $$f_p' - \frac{1}{2x}.f_p = \sqrt{x}.\ln x \Longleftrightarrow K'(x).\sqrt{x} + K(x).0 = \sqrt{x}.\ln x \Longleftrightarrow K'(x) = \ln x$$

  Ainsi $K : x \mapsto x\ln x - x$ par exemple.
  donc $f_p : x \mapsto \sqrt{x}(x\ln x - x)$ est une solution particulière

- *La solution générale de l'équation avec second membre étant égale à la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène,*
  on trouve ici comme solution générale de (E)

  $\boxed{\begin{array}{rcl} y :]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x}(x\ln x - x) + K.\sqrt{x} \end{array}}$ *avec K constante réelle arbitraire*

exemple 6:

Résoudre $y' - \dfrac{y}{2x} = -\dfrac{1}{x} + e^x - \dfrac{e^x}{2x}$ sur $]0, +\infty[$, puis sur $]-\infty,0[$

remarque 4 (*principe de superposition*)

On peut déterminer une solution particulière grâce au PRINCIPE DE SUPERPOSITION *lorsque le second membre s'écrit comme une somme:*

$$\textbf{si} \begin{cases} y_1 \text{ est sol.part. de } y' + a(x)y = b_1(x) \\ y_2 \text{ est sol.part. de } y' + a(x)y = b_2(x) \\ \lambda \text{ une constante scalaire} \end{cases} \quad \textbf{alors} \quad \lambda.y_1 + y_2 \text{ est sol.part. de } y' + a(x)y = \lambda.b_1(x) + b_2(x)$$

démonstration:
On a

$$\begin{aligned} (\lambda.y_1 + y_2)' + a.(\lambda.y_1 + y_2) &= (\lambda.y'1 + y_2') + \lambda.a.y_1 + a.y_2 \\ &= \lambda.\underbrace{(y_1' + a.y_1)}_{=b_1} + \underbrace{y_2' + a.y_2}_{=b_2} \\ &= \lambda.b_1 + b_2 \end{aligned}$$

remarque 5

Dans le cas d'une équation du type : $y' + ay = P(x)e^{mx}$ où a et m sont des CONSTANTES *réelles ou complexes, et P un polynôme, par la méthode des coefficients indéterminés, on peut chercher une solution particulière sous la forme $y(x) = Q(x)e^{mx}$ avec Q polynôme tel que*

- *si* $m = -a$, $\deg(Q) = \deg(P) + 1$
- *si* $m \neq -a$, $\deg(Q) = \deg(P)$

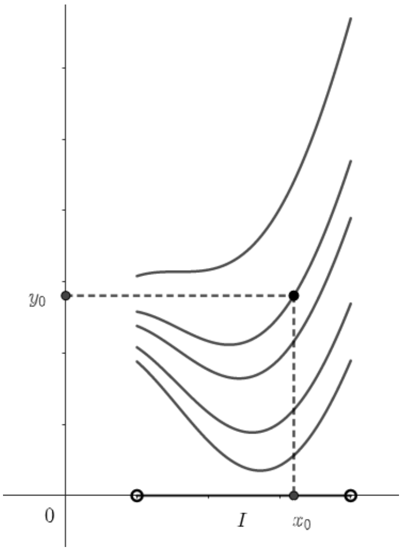
théorème 4: problème de Cauchy et théorème de Cauchy-Lipschitz I

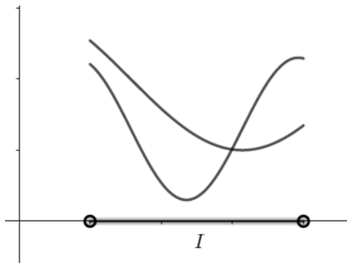
Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, et a et b deux fonctions de $C^0(I,\mathbb{K})$
Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$fixé.
Alors :

IL EXISTE UNE UNIQUE fonction f définie sur I telle que $\begin{cases} \forall x \in I, f'(x) + a(x)f(x) = b(x) \\ \textbf{et } f(x_0) = y_0 \end{cases}$

autrement dit
IL EXISTE UNE UNIQUE SOLUTION sur I de l'équation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$ tel que $y(x_0) = y_0$

rem: On dit qu'il y a existence et unicité à un problème de Cauchy linéaire du premier ordre





exemple 7: sans aucun calcul!

Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $y' - \dfrac{y}{2x} = -\dfrac{1}{x}$ avec la condition $y(\pi) = 2$

remarque 6 (*important*)

Dans le théorème précédent, la condition initiale est du type $f(x_0) = y_0$. Si l'on considère une condition initiale du type $f'(x_0) = y_0$ ou encore $\lim\limits_{\infty} f = y_0$, il n'y a aucune raison pour qu'il y ait existence et unicité de la solution.

remarque 7 (*A savoir retrouver*)

Il est facile de montrer que la fonction f définie sur I par $\boxed{x \mapsto \left(y_0.e^{A(x_0)} + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}dt\right) e^{-A(x)}}$ *est l'unique solution du problème de Cauchy cité en théorème*

1.3 cas des équations différentielles avec un coefficient en facteur de y'

définition 1: à ne pas retenir forcément

α, β et γ désignant 3 fonctions continues sur un intervalle I

1. on appelle ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE toute équation du type

$$\boxed{\alpha(x).y' + \beta(x).y = \gamma(x)}$$

2. on appelle ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE HOMOGÈNE ou sans second membre toute équation du type $\boxed{\alpha(x).y' + \beta(x).y = 0}$
3. lorsque la fonction α est la fonction constante égale à un, on dit parfois que c'est UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE *résolue*.

remarque 8

1. *Une équations différentielles linéaires du premier ordre homogène possède toujours au moins une solution définie sur I, à savoir la fonction constante nulle. (l'ensemble des solutions n'est jamais vide)*
2. *Une équations différentielles linéaires du premier ordre non résolue avec second membre peut ne pas posséder de solution sur I. (cf. exemple de la première page)*
3. ***L'ensemble des solutions d'une équations différentielles linéaires du premier ordre homogène est un espace vectoriel (démonstration facile), mais on ne peut prédire sa dimension (contrairement aux équations différentielles linéaires résolues)** comme le montre l'exemple 16*
   Notons $\mathcal{S}_H = \{y \in C^1(I,\mathbb{K}) \,|\, a.y' + b.y = 0\}$
   - $\mathcal{S}_H \subset C^1(I,\mathbb{K})$
   - *$\mathcal{S}_H$ est non vide car contient la fonction constante nulle*
   - *$\mathcal{S}_H$ est stable par combinaison linéaire.*
     Soient $y_1 \in \mathcal{S}_H$, $y_2 \in \mathcal{S}_H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
     On a

$$\begin{aligned} a.(\lambda y_1 + y_2)' + b.(\lambda y_1 + y_2) &= a.(\lambda y_1' + y_2') + b.(\lambda y_1 + y_2) \\ &= \lambda \underbrace{(a.y_1' + b.y_1)}_{=0 \text{ car } y_1 \in \mathcal{S}_H} + \underbrace{(a.y_2' + b.y_2)}_{=0 \text{ car } y_2 \in \mathcal{S}_H} = 0 \end{aligned}$$

     ce qui prouve que $\lambda.y_1 + y_2 \in \mathcal{S}_H$
4. ***Lorsque la fonction a ne s'annule pas sur** I, résoudre l'équation $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ sur I équivaut à résoudre l'équation $y' + \dfrac{b(x)}{a(x)}y = \dfrac{c(x)}{a(x)}$ sur I. (et donc tous les résultats des paragraphes précédents s'appliquent)*
5. *Dans la pratique, on détermine les valeurs où a s'annule, on résout sur chacun des intervalles ne contenant pas les racines précédentes, puis on traite les recollements(=raccordements)*

2 Equations différentielles linéaires du second ordre

2.1 au programme de spé : seulement deux théorèmes et une méthode

théorème 5: admis

a, b et c désignent trois fonctions continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$

1. L'ensemble des solutions de l'équation $\boxed{y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \text{ (EDH2)}}$ est un espace vectoriel de dimension 2
2. La solution générale de l'équation $\boxed{y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x) \text{ (ED2)}}$ s'écrit comme la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée (EDH2).

ceci signifie que:

- *La solution générale de (EDH2) est de la forme* $y = A.f_1 + B.f_2$
- *La solution générale de (ED2) est de la forme* $y = f_p + A.f_1 + B.f_2$

où

- f_1 *et* f_2 *sont deux fonctions linéairement indépendantes*
- A *et* B *sont deux constantes scalaires quelconques.*

On écrit encore:

$$\mathcal{S}_H = \text{vect}(f_1,f_2) \text{ et } \mathcal{S} = \{f_p + A.f_1 + B.f_2 \,|\, (A,B) \in \mathbb{K}^2\} = f_p + \text{vect}(f_1,f_2)$$

remarque 9

1. *On appelle* solution de $(ED2)$ sur I *toute fonction f définie et deux fois dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que $\forall x \in I, f''(x) + a(x)f'(x) + b(x)f(x) = c(x)$*
2. *Si f est solution alors f est nécessairement deux fois dérivable ce qui implique que f' et f sont continues.*
   Vu que $f'' = c - af' - bf$ avec a, b, c, f et f' fonctions continues
   on en déduit que f'' est aussi une fonction continue,
   c'est à dire que f est nécessairement de classe C^2 sur I
   Ceci justifie que $\boxed{\textit{l'ensemble des solutions est toujours inclus dans } C^2(I,\mathbb{K})}$
3. *Le* PRINCIPE DE SUPERPOSITION *est également applicable pour ce type d'équations.*
4. ATTENTION!!! LA TECHNIQUE DE L'ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE VUE POUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES À COEFFICIENTS CONSTANTS NE MARCHE PAS POUR LES ÉQUA.DIFF. À COEFFS. NON CONSTANTS!

méthode 3: si l'on dispose d'un point de départ...

On considère l'équation $y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$ et
on suppose que l'on connait une solution, notée f_1, de l'équation homogène associée, et que de plus f_1 ne s'annule pas sur l'intervalle I.

La méthode consiste à chercher les solutions de l'équation complète sous la forme $y : x \mapsto f_1(x).z(x)$.
On est alors ramené à une équation différentielle linéaire du premier ordre en z'.
En effet

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by = c &\iff (f_1z)'' + a(f_1z)' + b(f_1z) = c \\ &\iff (f_1''z + 2f_1'z' + f_1z'') + a(f_1'z + f_1z') + bf_1z = c \\ &\iff f_1z'' + (2f_1' + af_1)z' + \underbrace{(f_1'' + af_1' + bf_1)}_{=0}z = c \\ &\iff z'' + \frac{2f_1' + af_1}{f_1}z' = \frac{c}{f_1} \end{aligned}$$

On résout alors cette équation différentielle puis, par primitivation, on détermine z, et en multipliant par f_1 on a y !

Cette méthode consiste à faire un changement de fonction inconnue

exemple 8:

Soit $(E) : (x^2-6x-1)y''-2(x-3)y'+2y=0$

1. Déterminer les polynômes de degré inférieur ou égal à deux solutions sur $\mathbb{R}$.
2. Soit I un intervalle sur lequel x^2-6x-1 ne s'annule pas. Résoudre (E) sur I…sans calcul!

exemple 9: dans cet exemple, il y a abondance de "f_1"

résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y''+6y'+9y=\dfrac{e^{-3x}}{x^2+1}$ (ED2).

- *l'équation homogène a pour solution générale* $\boxed{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & A.e^{-3x}+B.x.e^{-3x} \end{array}}$
- *Pour appliquer la méthode ci-dessus, il nous suffit de prendre une solution particulière (si possible qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$) de l'équation homogène ci-dessus.*
  Par exemple, on prend la fonction $f_1 : x \mapsto e^{-3x}$.
  Et pour résoudre (ED2), on pose $y : x \mapsto e^{-3x}.z(x)$ avec z fonction inconnue dérivable sur I
  On a donc pour tout x réel:
  $$y'(x)=e^{-3x}(z'(x)-3z(x)) \text{ et } y''(x)=e^{-3x}(z''(x)-6z'(x)+9z(x))$$
  En reportant dans (ED2), on obtient
  $$\forall x\in\mathbb{R}, e^{-3x}z''(x)=\frac{e^{-3x}}{x^2+1}$$
  ce qui équivaut à
  $$\forall x\in\mathbb{R}, z''(x)=\frac{1}{1+x^2}$$
  Une première quadrature nous donne
  $$\forall x\in\mathbb{R}, z'(x)=\arctan x+C \text{ avec } C \text{ constante réelle}$$
  Une nouvelle intégration fournit
  $$\forall x\in\mathbb{R}, z(x)=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+Cx+D \text{ avec } D \text{ constante réelle.}$$
- *On a donc trouvé comme solution générale*
  $$\boxed{\begin{array}{lcl} y:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right).e^{-3x}+Cxe^{-3x}+De^{-3x} \end{array}} \text{ avec } (C,D)\in\mathbb{R}^2$$
  rem: on peut remarquer que la solution trouvée est bien de la forme attendue…

L'exemple qui suit est classique: comme vous ne pouvez deviner une solution de l'équation homogène associée (la fameuse fonction notée f_1 de la méthode), on vous fournit une indication qui a pour but de vous permettre de commencer (…puis de finir…) la résolution.

exemple 10:

Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation $x^2y''-3xy'+4y=x^3$ sachant qu'il existe une solution polynomiale à l'équation homogène associée.

exemple 11:

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $x^2y''-2y=3x^2$
(on pourra chercher une solution de l'équation homogène de la forme $x\mapsto x^\alpha$)

théorème 6: problème de Cauchy et théorème de Cauchy-Lipschitz II

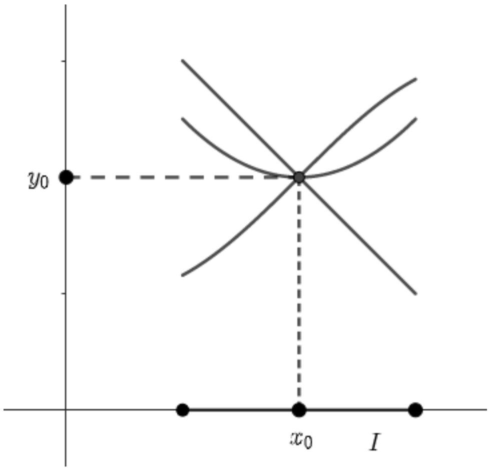
Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, et a, b et c trois fonctions de $C^0(I,\mathbb{K})$
Soit $x_0 \in I$ et, y_0 et y_1 deux réels ou complexes fixés.
Alors :
IL EXISTE UNE UNIQUE fonction f définie sur I telle que

$$\begin{cases} \forall x \in I, f''(x) + a(x)f'(x) + b(x)f(x) = c(x) \\ f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

autrement dit

IL EXISTE UNE UNIQUE SOLUTION sur I de l'équa.diff. $y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$ tel que $\begin{cases} y(x_0) & = y_0 \\ y'(x_0) & = y_1 \end{cases}$

rem: on dit qu'il y a existence et unicité à un problème de Cauchy linéaire du second ordre



exemple 12:

On considère l'équation différentielle $y'' + xy' + \cos(x).y = x^2$ (E)

1. Combien passe-t-il de courbes intégrales de (E) par le point (0,1)?
2. On note f l'unique fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie (E) avec les conditions $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. Montrer que la fonction f est paire. *(on pourra considérer la fonction $g : x \mapsto f(-x)$)*

1.
2. *Nous allons montrer que g vérifie le même problème de Cauchy que f.*
   - *on a $g(x) = f(-x)$ et donc $g'(x) = -f'(-x)$ et $g''(x) = f''(-x)$ pour tout x réel*
   - *ainsi $g(0) = f(-0) = f(0) = 1$ et $g'(0) = -f'(-0) = -f'(0) = 0$*
   - *pour tout x réel, on a*

$$\begin{aligned} g''(x) + xg'(x) + \cos(x)g(x) &= f''(-x) + x(-f'(-x)) + \cos(x)f(-x) \\ &= f''(-x) + (-x)f'(-x) + \cos(-x)f(-x) \quad \textit{car } \cos \textit{ est paire} \\ &= f''(X) + Xf'(X) + \cos(X)f(X) \quad \textit{on a posé } X = -x \\ &= X^2 \quad \textit{car } f \textit{ est solution de } E \\ &= (-x)^2 = x^2 \end{aligned}$$

Ainsi f et g vérifie le même problème de Cauchy $\begin{cases} y'' + xy' + \cos(x).y = x^2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$,
par unicité à un tel problème, on peut affirmer que $f = g$, càd $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)$

2.2 équations différentielles du second ordre à coefficients constants (cours de sup)

On considère l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants

$$\boxed{(H)\quad ay'' + by' + cy = 0} \text{ avec } (a,b,c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2 \quad \textbf{des constantes}$$

définition 2:

On appelle <u>équation caractéristique</u> de (H) l'équation du second degré $\boxed{aX^2 + bX + c = 0 : (E_c)}$

théorème 7: Cas des fonctions à valeurs complexes

Δ désignant le discriminant de (E_c), on a :

i) cas où $\Delta \neq 0$. notons r_1 et r_2 les deux racines distinctes de E_c
La solution générale de (H) est $\boxed{y : x \mapsto A.e^{r_1 x} + B.e^{r_2 x}}$

ii) cas où $\Delta = 0$. notons r_0 la racine double de E_c
La solution générale de (H) est $\boxed{y : x \mapsto (A.x + B)e^{r_0 x}}$

<u>et dans les deux cas, A et B désignent des constantes complexes arbitraires.</u>

théorème 8: Cas des fonctions à valeurs réelles

ici on a $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$, et Δ désigne le discriminant de (E_c), on a :

i) cas où $\Delta > 0$. notons r_1 et r_2 les deux racines réelles distinctes de E_c
La solution générale de (H) est $\boxed{y : x \mapsto A.e^{r_1 x} + B.e^{r_2 x}}$

ii) cas où $\Delta = 0$. notons r_0 la racine double réelle de E_c
La solution générale de (H) est $\boxed{y : x \mapsto (A.x + B)e^{r_0 x}}$

iii) cas où $\Delta < 0$. notons $\alpha \pm i\beta$ les racines complexes conjuguées de E_c
La solution générale de (H) est $\boxed{y : x \mapsto= e^{\alpha x}(A.\cos(\beta x) + B.\sin(\beta x))}$

<u>et dans les trois cas, A et B désignent des constantes réelles arbitraires.</u>

théorème 9: second membre du type $x \mapsto C.e^{\lambda.x}$

On considère l'équation $a.y'' + b.y' + c.y = C.e^{\lambda.x}$ où $(C,\lambda) \in \mathbb{C}^2$.

- si λ n'est pas racine de E_c, il existe une sol.part. de la forme $x \mapsto D.e^{\lambda.x}$
- si λ est racine simple de E_c, il existe une sol.part. de la forme $x \mapsto D.x.e^{\lambda.x}$
- si λ est racine double de E_c, il existe une sol.part. de la forme $x \mapsto D.x^2.e^{\lambda.x}$

avec $D \in \mathbb{K}$ une constante à déterminer

théorème 10: second membre du type $x \mapsto C.\cos(\omega.x)$ ou $x \mapsto C.\sin(\omega.x)$

On considère l'équation $a.y'' + b.y' + c.y = C.\cos(\omega.x)$ où $(C,\lambda) \in \mathbb{R}^2$.

- si $i.\omega$ n'est pas racine de E_c, il existe une sol.part.de la forme $x \mapsto D.\cos(\omega.x) + E.\sin(\omega.x)$
- si $i.\omega$ est racine simple de E_c, il existe une sol.part.de la forme $x \mapsto D.x.\cos(\omega.x) + E.x.\sin(\omega.x)$

avec $(D,E) \in \mathbb{R}^2$ des constantes à déterminer

exemple 13: résoudre $y'' + 4y' + 4y = 2\,\mathrm{sh}(2x) = e^{2x} - e^{-2x}$

- l'équation caractéristique est $X^2 + 4X + 4 = 0$. On a une racine double -2
- la solution générale de l'équation homogène est donc $y : x \mapsto \lambda.e^{-2x} + \mu.xe^{-2x}$
- on cherche une solution particulière de $y'' + 4y' + 4y = e^{2x}$
  On la cherche de la forme $y_p : x \mapsto Ce^{2x}$
  On remplace dans l'équation et on tombe sur $C = \dfrac{1}{16}$
- on cherche une solution particulière de $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$
  On la cherche de la forme $y_p : x \mapsto Cx^2e^{-2x}$
  On remplace dans l'équation est on tombe sur $C = \dfrac{1}{2}$
- on utilise le principe de superposition des solutions, une sol. part. est $y_p : x \mapsto \dfrac{1}{16}e^{2x} - \dfrac{1}{2}.x^2.e^{-2x}$
- La solution générale de l'équation avec second membre est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.

$$y : x \mapsto \frac{1}{16}e^{2x} - \frac{1}{2}x^2e^{-2x} + A.e^{-2x} + B.xe^{-2x}$$

exemple 14: résoudre $y'' - 4y' + 3y = 2x + 2e^{-x} + 5$

- l'équation caractéristique est $X^2 - 4X + 3 = (X - 1)(X - 3) = 0$
- la solution générale de l'équation homogène est donc $y : x \mapsto A.e^{x} + B.e^{3x}$
- on cherche une solution particulière de $y'' - 4y' + 3y = 2e^{-x}$
  On la cherche sous la forme $x \mapsto Ce^{-x}$
  On remplace dans l'équation et on tombe sur $C = \dfrac{1}{4}$
- on cherche une solution particulière de $y'' - 4y' + 3y = 2x + 5$
  On la cherche sous la forme $x \mapsto Cx + D$
  On remplace dans l'équation et on tombe sur $C = \dfrac{2}{3}$ et $D = \dfrac{23}{9}$
- on utilise le principe de superposition des solutions, une sol.part est $y_p : x \mapsto \dfrac{1}{4}e^{-x} + \dfrac{2}{3}x + \dfrac{23}{9}$
- La solution générale de l'équation avec second membre est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.

$$y : x \mapsto \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{2}{3}x + \frac{23}{9} + \lambda.e^{x} + \mu.e^{3x}$$

exemple 15: résoudre $y'' + y = \sin(x)$ dans $\mathbb{R}$

- l'équation caractéristique est $X^2 + 1 = 0$. Les racines sont i et $-i$
- la solution générale de l'éq. homogène est $x \mapsto e^{0.x}.(A.\cos(1.x) + B.\sin(1.x)) = A.\cos(x) + B.\sin(x)$
- on cherche une solution particulière de la forme $y_p : x \mapsto D.x.\cos(x) + E.x.\sin(x)$
  On remplace dans l'équation et on trouve
- La solution générale de l'équation avec second membre est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.

théorème 11: Hors programme

On considère l'équation $a.y'' + b.y' + c.y = P(x).e^{mx}$ où $\begin{cases} P \text{ est un polynôme} \\ m \text{ est une constante réelle ou complexe} \end{cases}$

Il existe une solution particulière de (E) du type $x \mapsto e^{mx}Q(x)$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$ et de plus :

- si m n'est pas solution de E_c alors $\deg Q = \deg P$
- si m est racine simple de E_c alors $\deg Q = \deg P + 1$
- si m est racine double de E_c alors $\deg Q = \deg P + 2$

méthode 4: changement de variable dans une équation différentielle

Dans certains exercices, on demande de résoudre une équation différentielle à l'aide d'un changement de variable.(par exemple, on demande de poser $t = \ln x$). La méthode consiste alors à définir une nouvelle fonction inconnue z qui dépendra de la nouvelle variable et qui vérifiera $z(t) = y(x)$.

Un changement de variable dans une équation différentielle entraine toujours un changement de fonction inconnue

(Attention! on n'a pas $z'(t) = y'(x)$! ...)

Exemple

Résoudre sur $]0, +\infty[$ *l'équation* $x^2y'' + xy' + 4y = 0$ *à l'aide du changement de variable* $x = e^t$.

(écrire les solutions à valeurs réelles)

- *On commence par écrire que pour tout* $x > 0$ *et tout* $t \in \mathbb{R}$ *on a l'équivalence*

$$x = e^t \iff t = \ln x$$

- *On considère une fonction inconnue* z *qui dépend de la variable* t *telle que*

$$\forall x > 0, y(x) = z(t) = z(\ln(x))$$

- *En dérivant par rapport à* x *chaque membre de l'égalité* $y(x) = z(\ln x)$, *on trouve:*

$$y'(x) = \frac{1}{x}.z'(\ln x) \text{ puis } y''(x) = -\frac{1}{x^2}z'(\ln x) + \frac{1}{x^2}z''(\ln x)$$

- *En reportant dans l'équation cela donne*

$$\forall x > 0, x^2\left(-\frac{1}{x^2}z'(\ln x) + \frac{1}{x^2}z''(\ln x)\right) + x\left(\frac{1}{x}.z'(\ln x)\right) + 4z(\ln x) = 0$$

  Soit $\forall x > 0, z''(\ln x) + 4z(\ln x) = 0$.

  En revenant à la variable t *cela donne* $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, z''(t) + 4z(t) = 0.}$

- *La solution générale de cette équation est* $\boxed{\begin{array}{rcl} z : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & A.\cos(2t) + B.\sin(2t) \end{array}}$ *avec* $(A,B) \in \mathbb{R}^2$

- *La solution générale de l'équation initiale est donc*

$$\boxed{\begin{array}{rcl} y :]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & A.\cos(2\ln x) + B.\sin(2\ln x) \end{array}} \quad \text{avec } (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

remarque: comme on a aussi

$$\forall t \in \mathbb{R}, z(t) = y(x) = y(e^t)$$

On peut dériver par rapport à t *et on obtient*

$$z'(t) = e^t.y'(e^t) \text{ et } z''(t) = e^t.y''(e^t) + (e^t)^2y'(e^t)$$

ce qui donne

$$z'(t) = xy'(x) \text{ et } z''(t) = xy''(x) + x^2y'(x)$$

3 Des exemples de recollement

exemple 16:

résoudre $(E) : xy' - 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$. *Le champ correspondant est ci-dessous :*

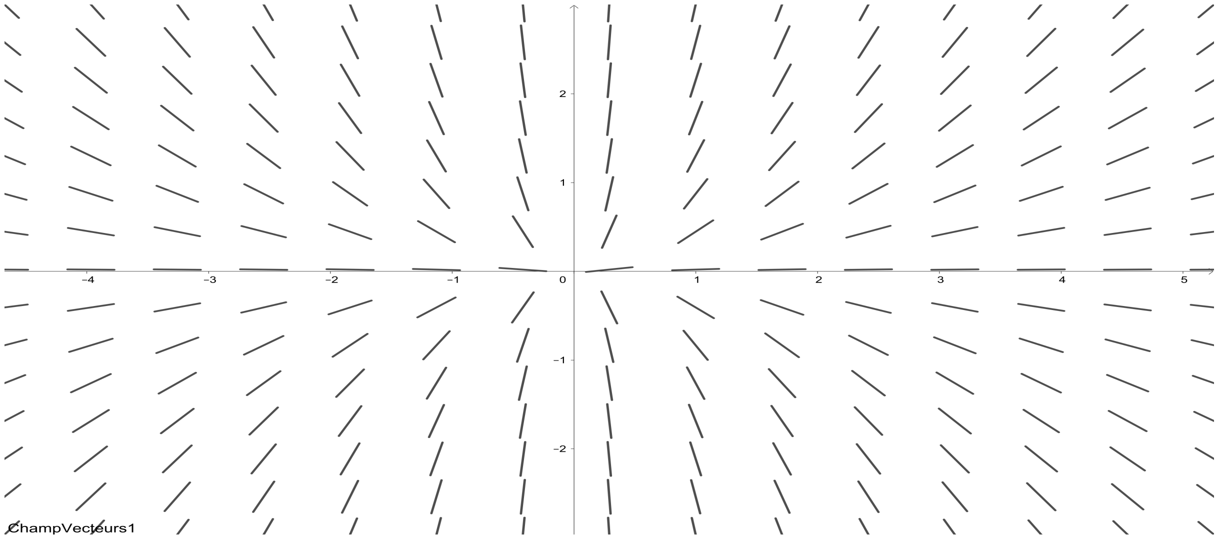


Schéma de l'étude:

1. *On résout l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$, ... et l'on trouve $x \mapsto Kx^2$ comme sol.géné*
2. *On résout l'équation sur $\mathbb{R}_-^*$, ... et l'on trouve $x \mapsto Kx^2$ comme sol.géné*
3. *On étudie le raccordement en 0*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante $\boxed{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} Lx^2 & si\ x < 0 \\ Kx^2 & si\ x > 0 \\ M & si\ x = 0 \end{cases} \end{array}}$

i) ***Etude de la continuité en*** 0

On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0^+ \\ x \neq 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0^- \\ x \neq 0}} f(x) = 0.$

On en déduit que $\boxed{f \textit{ est continue en } 0 \textit{ ssi } M = 0.}$

.

. ***Dorénavant, on considère que*** $M = 0$.

Etude de la dérivabilité en 0

ii) *On a* $\lim\limits_{0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{0^+} \dfrac{Kx^2}{x} = 0$. *Donc,* $\boxed{f \textit{ est dérivable à droite en 0 avec } f'_d(0) = 0}$

iii) *On a* $\lim\limits_{0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{0^-} \dfrac{Lx^2}{x} = 0$. *Donc,* $\boxed{f \textit{ est dérivable à gauche en 0 avec } f'_g(0) = 0}$

iv) *On en déduit donc que* $\boxed{f \textit{ est dérivable en 0 avec } f'(0) = 0}$. *(ceci est remarquable : quelles que soient les valeurs de K et L, c'est à dire quelles que soient les fonctions f que l'on considère, la dérivée en 0 existe toujours et a pour valeur 0)*

v) *On a de plus $0.f'(0) - 2f(0) = 0 \times 0 - 2 \times 0 = 0$. Donc (E) est bien vérifiée sur $\mathbb{R}$ tout entier.*

Conclusion : les fonctions solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $\boxed{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} Lx^2 & si\ x < 0 \\ Kx^2 & si\ x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}}$

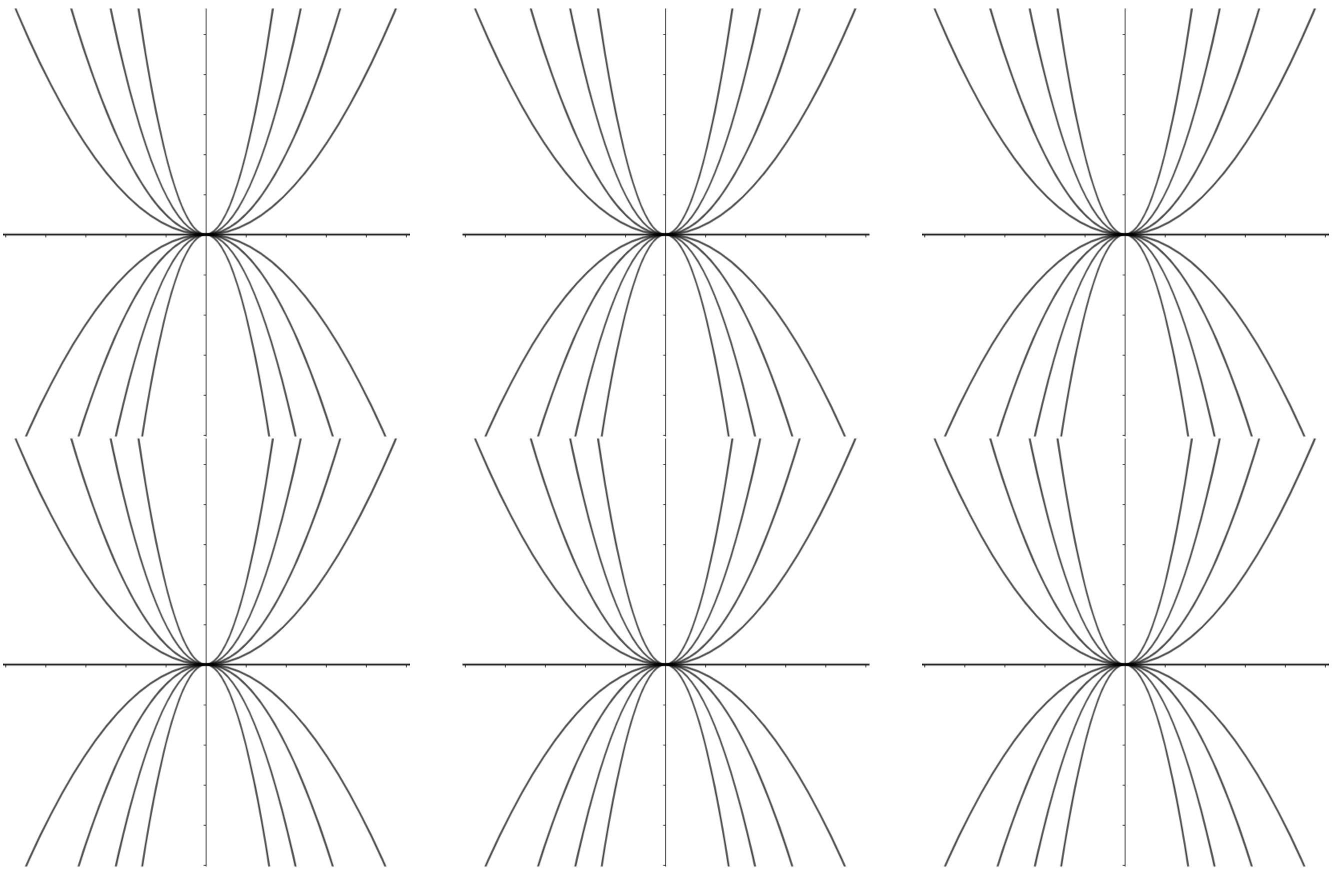
où K et L sont deux constantes réelles quelconques.
Remarque : toutes les courbes intégrales passent par (0,0) avec une tangente horizontale... mais cela ne remet bien sûr pas en cause le théorème d'existence et d'unicité à un problème de Cauchy!

exemple 17: structure de l'ensemble des solutions de l'équa.précédente

- Pour tout $(K,L) \in \mathbb{R}^2$ notons $\boxed{\begin{array}{rcl} f_{K,L}: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} Lx^2 & \text{si } x < 0 \\ Kx^2 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}}$
- On a montré que $\mathcal{S} = \{f_{K,L} | (K,L) \in \mathbb{R}^2\}$
- Considérons plus particulièrement

$$\boxed{\begin{array}{rcl} f_{1,0}: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}} \quad \text{et} \quad \boxed{\begin{array}{rcl} f_{0,1}: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}}$$

- $\boxed{\text{Pour tout } (K,L) \in \mathbb{R}^2 \text{ on a } f_{K,L} = K.f_{1,0} + L.f_{0,1}}$ *en effet:*
  - *si* $x < 0$, *on a* $K.f_{1,0}(x) + L.f_{0,1}(x) = K.0 + L.x^2 = Lx^2 = f_{K,L}(x)$
  - *si* $x \geqslant 0$, *on a* $K.f_{1,0}(x) + L.f_{0,1}(x) = K.x^2 + L.0 = Kx^2 = f_{K,L}(x)$
- Ainsi $\boxed{\mathcal{S} = \{K.f_{1,0} + L.f_{0,1} | (K,L) \in \mathbb{R}^2\} = \text{vect}(f_{1,0}\,;\, f_{0,1})}$
- La famille $(f_{1,0}\,;\, f_{0,1})$ est une famille libre.
  En effet, soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $a.f_{1,0} + b.f_{0,1} = 0$
  ceci signifie que pour tout $x \in \mathbb{R}, a.f_{1,0}(x) + b.f_{0,1}(x) = 0$
  En particulier pour $x = 1$ *cela donne* $a.1 + b.0 = 0$
  et pour $x = -1$ *cela donne* $a.0 + b(-1) = 0$
  On a bien montré que $a = b = 0$
- **Conclusion:** $\boxed{(f_{1,0}\,;\, f_{0,1}) \text{ est une base de } \mathcal{S}}$
  L'ensemble des solutions est ainsi un espace vectoriel de dimension... deux !



exemple 18: Des exemples simples et riches

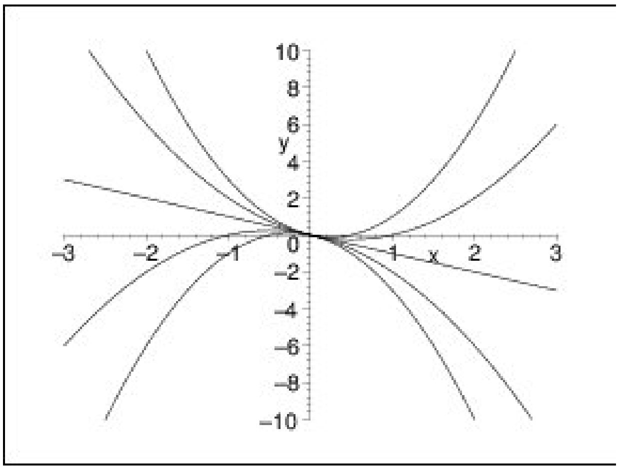
:

1. L'équation $xy' - 2y = x$ a pour solution générale $y : x \mapsto -x + Kx^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$
   Sur $\mathbb{R}$, toute courbe sur $\mathbb{R}^-$ se raccorde à toute courbe sur $\mathbb{R}^+$

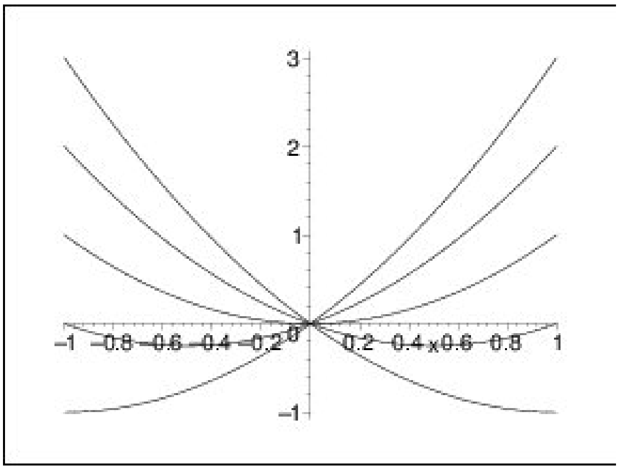
2. L'équation $xy' - y = x^2$ a pour solution générale $y : x \mapsto x^2 + Kx$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$
   Sur $\mathbb{R}$, chaque courbe sur $\mathbb{R}^-$ se raccorde à une courbe particulière sur $\mathbb{R}^+$

3. L'équation $x^2y' + y = 1$ a pour solution générale $y : x \mapsto 1 + Ke^{\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$
   Sur $\mathbb{R}$, toutes les courbes sur $\mathbb{R}^-$ se raccorde à une seule des courbes sur $\mathbb{R}^+$

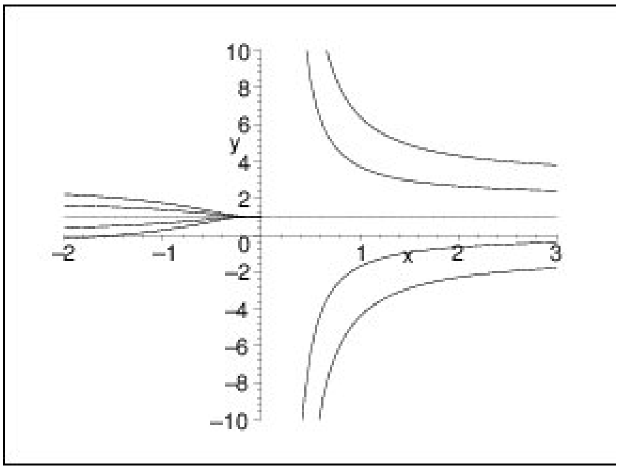
4. L'équation $xy' + y = x^2$ a pour solution générale $y : x \mapsto \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{K}{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$
   Sur $\mathbb{R}$, une seule courbe sur $\mathbb{R}^-$ se raccorde à une seule courbe sur $\mathbb{R}^+$



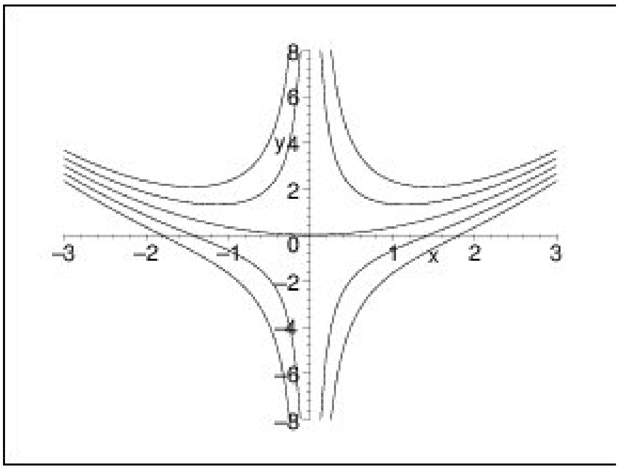
cas 1



cas 2



cas 3



cas 4

4 Retour sur un théorème d'algèbre linéaire

On revient sur le théorème ci-dessous:

théorème 12: solution d'une équation linéaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E,G)$ et $a \in G$.
On considère l'équation linéaire $f(u) = a$ d'inconnue u

1. L'équation a au moins une solution ssi $a \in \mathrm{Im}(f)$
2. si u_0 est une solution particulière, alors

$$\boxed{u \text{ est solution si et seulement si } u \text{ s'écrit } u = u_0 + v \text{ avec } v \in \ker(f)}$$

c'est à dire que:

LA SOLUTION GÉNÉRALE D'UNE ÉQUATION LINÉAIRE EST DONNÉE PAR LA SOMME D'UNE SOLUTION PARTICULIÈRE ET DE LA SOLUTION GÉNÉRALE DE L'ÉQUATION SANS SECOND MEMBRE:

on utilise parfois un abus d'écriture en écrivant que l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = u_0 + \ker(f) = \{u_0 + v \,|\, v \in \ker(f)\}$$

exemple 19:

On considère $\boxed{\begin{array}{rcl} \varphi : C^1(I,\mathbb{K}) & \longrightarrow & C^0(I,\mathbb{K}) \\ y & \longmapsto & y' + a.y \end{array}}$

On note S_H $[\,S\,]$ l'ensemble des solutions de l'équa.diff. $y' + a.y = 0$ $[\,y' + a.y = b\,]$

- Il est clair que φ est une application linéaire: la vérification serait triviale.

- On remarque que $S_H = \ker(\varphi)$.
  Or un théorème d'algèbre linéaire affirme que *le noyau d'une application linéaire est un sev.*
  Nous venons de montrer que S_H est un sev! (mais nous n'avons pas justifié sa dimension)

- Le théorème 3 affirme que la solution générale de l'équa. diff. $y + a.y = b$ s'écrit comme la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière
  (retenons simplement ici que pour toute fonction $b \in C^0(I,\mathbb{K})$ fixée, l'équa.diff $y' + a.y = b$ possède au moins une solution.)

- On en déduit donc que φ est une application surjective, car pour toute fonction $b \in C^0(I,\mathbb{K})$, l'équation $\varphi(y) = b$ possède au moins une solution.

  En notant f_p une de ces solutions, le théo 12 ci-dessus affirme que l'ensemble des solutions de l'équation $\varphi(y) = b$ s'écrit $S = f_p + \ker(\varphi)$,

  on retrouve bien l'égalité $S = f_p + S_H$!