

REDUCTION DES ENDOMORPHISMES ET DES MATRICES CARREES


Table des matières

1	Sous-espaces stables, endomorphismes induits	2
2	Endomorphismes diagonalisables (cas où $\dim E$ finie) V041 et V064	3
3	Matrices diagonalisables: V065 et V066	7
4	Trigonalisation	10
4.1	Endomorphismes trigonalisables V043	10
4.2	Matrices carrées trigonalisables V067	13

Dans tout ce chapitre, \mathbb{K} désignera le corps des réels ou des complexes, E désignera un \mathbb{K} - espace vectoriel (le plus souvent, de dimension finie n) et f un endomorphisme de E

- On rappelle qu'un endomorphisme de E est une application linéaire de $E \rightarrow E$
- Les notions de matrices semblables et d'éléments propres sont développées dans des photocopiés indépendants

exemple 1: même tout...et pourtant!

 Les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ont même rang, même trace, même déterminant, même valeur propre, même dimension du sep et pourtant ne sont pas semblables (calculer leurs carrés!)

1 Sous-espaces stables, endomorphismes induits

Soit E un \mathbb{K} -ev, et f un endomorphisme de E



définition 1:

Soit E un \mathbb{K} -ev, et f un endomorphisme de E .

Soit F un sev de E

i) On dit que F EST UN SEV STABLE PAR f lorsque $f(F) \subset F$, c'ad $\forall x \in F, f(\vec{x}) \in F$

ii) On appelle RESTRICTION DE L'APPLICATION f à F l'application $f|_F : F \rightarrow E$
 $\vec{x} \mapsto f(\vec{x})$

iii) Dans le cas où F est stable par f , l'application $f|_F : F \rightarrow F$
 $\vec{x} \mapsto f(\vec{x})$ est un endomorphisme de F

appelé ENDOMORPHISME INDUIT



exemple 2: classique, à avoir en tête

☞ Avec les notations ci-dessus, déterminer le noyau de $f|_F$ en fonction de F et $\ker(f)$



exemple 3: résultats à retenir

☞ Soit f un endomorphisme de E .

1. Montrer que $\text{Im}(f)$, $\ker(f)$ et les sep de f sont stables par f .

2. Que dire de l'endomorphisme induit lorsque l'on considère la restriction de f à $E_\lambda(f)$?



théorème 1:

Soit F un sev de E et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une famille génératrice de F .

Il y a équivalence entre:

i) F est stable par f

ii) $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, f(\vec{e}_i) \in F$

rem: on retrouve l'idée qu'en dimension finie, si une base ou une famille génératrice possède une propriété alors celle-ci se généralise à tous les vecteurs



théorème 2:

Soit E un ev de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E , et p un entier.

Il y a équivalence entre:

i) $\text{vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ est stable par f

ii) la matrice de f dans la base \mathcal{B} est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$

Cela provient tout simplement de l'écriture matricielle

 **théorème 3:**

Soit E un ev de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E , et p un entier.

Il y a équivalence entre:


i) $\text{vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ et $\text{vect}(\vec{e}_{p+1}, \dots, \vec{e}_n)$ sont stables par f

ii) la matrice de f dans la base \mathcal{B} est de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$

 **exemple 4:**

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Donner 8 sev évidents stables par f

2 Endomorphismes diagonalisables (cas où $\dim E$ finie) V041 et V064 **définition 2:**

On dit que L'ENDOMORPHISME $f \in \mathcal{L}(E)$ EST DIAGONALISABLE lorsqu' il existe une base \mathcal{B} de E pour laquelle $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.

déterminer si un endomorphisme est diagonalisable, c'est déterminer si, parmi toutes les matrices associées à cet endomorphisme, l'une au moins est une matrice diagonale.

On a déjà vu que les homothéties, les symétries vectorielles et les projections sont des endomorphismes diagonalisables

 **exemple 5:**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto (x + y, 2y)$$

On note $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (1, 1)$

1. Montrer que (e_1, e_2) est une base de \mathbb{R}^2
2. Donner la matrice de f dans cette base. Conclusion?

 **exemple 6:**

⚡ L'endomorphisme f défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $f(P) = X^2 \cdot P^{(2)}$ est-il un endomorphisme diagonalisable?

 **théorème 4:**

Il y a équivalence entre :

i.) f est diagonalisable

ii.) il existe une base de E formée de vecteurs propres de f

dans ce cas, les coefficients diagonaux des matrices diagonales associées à f sont les valeurs propres de f comptées avec leur multiplicité.

démonstration du théorème 4:

$i) \implies ii)$ On suppose que f est diagonalisable

Il existe ainsi $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ soit une matrice diagonale.

existe donc $(d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{pmatrix}$

On a ainsi $\forall i \in [1, n], f(e_i) = d_i \cdot e_i$

avec $e_i \neq 0$ car le vecteur nul ne peut appartenir à une base.

On a bien montré que les éléments de \mathcal{B} sont des vecteurs propres de f , c'est-à-dire que \mathcal{B} est une base de E formée de vecteurs propres de f .

$ii) \implies i)$ On suppose qu'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f .

Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ cette base

Pour tout $i \in [1, n]$, notons λ_i la valeur propre associée à e_i

On a donc $f(e_i) = \lambda_i \cdot e_i$

et ainsi $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Il existe bien une base E pour laquelle la matrice de f est diagonale

**théorème 5: condition nécessaire de diagonalisabilité**

Si f est diagonalisable alors $\chi_f(X)$ est un polynôme scindé sur \mathbb{K}

**théorème 6: condition suffisante de diagonalisabilité, deux formulations possibles**

1. Si $\dim E = n$ et si f possède n valeurs propres distinctes alors f est diagonalisable, et ses sous-espaces propres sont de dimension un.
2. Si χ_f est scindé et n'admet que des racines simples alors f est diagonalisable, et ses sous-espaces propres sont de dimension un.

Bien noté qu'il s'agit juste d'une condition suffisante et non d'une cns!

démonstration:

1. On suppose que $\dim E = n$ et que f possède n valeurs propres distinctes.

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les n valeurs propres distinctes

Notons $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ des $\vec{v}.p$ respectivement associés à $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

On peut déjà affirmer que la famille $\mathcal{F} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ est une famille libre de E ,

en effet, on sait par théorème, que: "une famille de $\vec{v}.p$ associés à des vp distinctes est libre."

Comme $\text{card}(\mathcal{F}) = n = \dim E$ et que \mathcal{F} est une famille libre de E ,

on peut par théorème affirmer que \mathcal{F} une base de E .

On a justifié qu'il existe une base de E formée de $\vec{v}.p$ de f , c'est-à-dire que f est diagonalisable.

2. Comme $\deg(\chi_f) = \dim E = n$, dire que χ_f est scindé et n'admet que des racines simples signifie exactement que f possède n valeurs propres distinctes

**exemple 7:**

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto (-21x + 8y, -48x + 19y)$

1. Montrer que f est diagonalisable, et donne une matrice diagonale associée à f
2. Calculer $f^{2032}((1,3))$, $f^{2032}((1,2))$ et $f^{2032}((2,5))$

théorème 7: CNS de diagonalisabilité

Soit f un endomorphisme de E . On note $sp(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ son spectre.

Alors, il y a équivalence entre :

- i.) f est diagonalisable
- ii.) le polynôme caractéristique χ_f est SCINDÉ sur \mathbb{K} ET pour toute vp λ de f , $\dim E_\lambda = m(\lambda)$
- iii.) $\dim E_{\lambda_1} + \dots + \dim E_{\lambda_p} = \dim E$
- iv.) $E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p} = E$ càd

$$\forall \vec{x} \in E, \exists! (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) \in E_{\lambda_1} \times \dots \times E_{\lambda_p} \mid \vec{x} = \vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_p$$

rem: f est diagonalisable ssi tout élément de E peut s'écrire de manière unique comme une somme de vecteurs propres de f .

exemple 8:

Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^3 et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\chi_f(X) = (X-1)(X-2)(X-\alpha)$.
Etudier la diagonalisabilité de f .

exemple 9:

Soit E un \mathbb{K} -ev et f un endomorphisme de E tel que $\chi_f(X) = X^2 + 1$

1. Donner $\dim E$
2. f est-il diagonalisable?

exemple 10:

Notons
$$\begin{array}{l} f : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \longmapsto X.(P' + P'' + \dots + P^{(n)}) \end{array}$$

Montrer que f est diagonalisable.

exemple 11:

Soit f un endomorphisme de E diagonalisable de spectre $\{0,1,2\}$.

Montrer que $f^3 - 3f^2 + 2f = 0$

Montrer que $f^4 = 7f^2 - 6f$.

En déduire f^5 et f^{100}

exemple 12: classique

Soit f un endomorphisme de E ne possédant qu'une unique valeur propre.

Montrer l'équivalence :

$$f \text{ est diagonalisable} \iff f \text{ est une homothétie}$$

exemple 13:

L'endomorphisme
$$\begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \longmapsto (2x+3y+4z, 2y+5z, 2z) \end{array}$$
 est-il diagonalisable?

méthode 1: Comment déterminer si un endomorphisme est diagonalisable

1. on détermine le spectre de f , par exemple à l'aide du polynôme caractéristique
2. on détermine la dimension de chaque sous-espace propre. (pour les vp multiples)
3. on conclut à l'aide du théorème 7

Exemple:

Considérons $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \mapsto (x + y + z, -2x + 4y + 2z, -x + y + 3z)$$

- On trouve $\chi_f(X) = (X - 4)(X - 2)^2$. Ainsi 4 est vp simple et 2 vp double
- 4 étant valeur propre simple on sait que, sans calcul, son sep est de dimension un
- par le calcul, on trouve que E_2 est le plan d'équation $-x + y + z = 0$ on a donc $\dim(E_2) = 2$
- Pour justifier le fait que f soit diagonalisable on peut alors
 - soit dire que $\dim E_4 + \dim E_2 = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ et conclure grâce au point iii)
 - soit dire que le polynôme est scindé sur \mathbb{R} et que pour chaque vp sa multiplicité est égale à la dim du sep associé, et conclure grâce au point ii)

remarque 1

On a vu que pour tout endomorphisme de E , on a toujours

$$\sum_{\lambda_i \in \text{sp}(f)} \dim E_{\lambda_i} = \dim E_{\lambda_1} + \dots + \dim E_{\lambda_p} \leq \dim E$$

LE THÉORÈME 7 AFFIRME QU'IL Y A ÉGALITÉ SSI L'ENDOMORPHISME EST DIAGONALISABLE.

exemple 14:

Soit $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$

$$(x, y, z, t) \mapsto (x + y + z + t, x + y + z + t, x + y + z + t, x + y + z + t)$$

Montrer que f est diagonalisable et donner une base de vecteurs propres.

méthode 2: Comment déterminer une base de vect. propres lorsque f est diagonalisable

- On commence par déterminer une base de chaque sep
- Puis on concatène ces bases précédentes: cela fournit une base de E formée de $\vec{v}.p$ de f

Exemple:

On reprend l'exemple de la méthode 1

- une base de E_4 est $((1, 2, 1))$
- une base de E_2 est $((1, 1, 0), (1, 0, 1))$
- comme f est diagonalisable on sait que $E_4 \oplus E_2 = \mathbb{R}^3$, et ainsi que la concaténation des deux bases précédentes est une base de \mathbb{R}^3 .

- dans la base $((1, 2, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1))$ la matrice de f est $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- on peut permuer l'ordre des vecteurs dans la base: cela reste une base formée de $\vec{v}.p$

- dans la base $((1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 2, 1))$ la matrice de f est $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

méthode 3: comment connaître la dim d'un sep sans le déterminer

Soit f un endomorphisme et λ une de ses vp.

On peut connaître $\dim(E_\lambda) = \dim \ker(f - \lambda id)$ en appliquant le théorème du rang à l'endomorphisme $f - \lambda id$. (pour cela on peut considérer le rang d'une matrice associée à $f - \lambda id$)

Exemple:

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à $M = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & g \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $a = g = 0$.

3 Matrices diagonalisables: V065 et V066**définition 3:**

On dit que LA MATRICE A EST DIAGONALISABLE lorsque A est semblable à une matrice diagonale.

Déterminer si une matrice est diagonalisable c'est donc déterminer si, parmi toutes les matrices qui lui sont semblables, l'une au moins est une matrice diagonale.

les matrices diagonales sont des matrices diagonalisables! (à démontrer)

théorème 8:

il y a équivalence entre :

- i.) A est diagonalisable
- ii.) un endomorphisme associé à A est diagonalisable

rem: ceci équivaut aussi à "tout endomorphisme associé à A est diagonalisable"

démonstration

Notons

- f un endomorphisme associé à A
- \mathcal{C} une base d'un ev E tel que $A = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$

$ii) \Rightarrow i)$ On suppose que f est diagonalisable.

Comme f est diagonalisable,

on sait qu'il existe une base \mathcal{B} de E telle que

$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = D$ avec D matrice diagonale.

Comme A et D sont associées au même endomorphisme,

on sait que A et D sont semblables.

On a bien montré que A est semblable à une matrice diagonale, donc que A est diagonalisable

$i) \Rightarrow ii)$ On suppose que A est diagonalisable

c'est à dire que A est semblable à une matrice diagonale D

Comme A est une matrice associée à f

ceci signifie que D est aussi une matrice associée à f .

Autrement dit, qu'il existe une base \mathcal{B} de D telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = D$.

Ceci est la définition de " f est un endomorphisme diagonalisable",

remarque 2 (important)

Très souvent, on ne reviendra pas à un endomorphisme associé pour étudier la diagonalisabilité de la matrice A .


On utilisera plutôt l'équivalence

$$A \text{ diagonalisable} \iff \exists P \in GL_n(\mathbb{K}), \exists D \text{ diagonale tels que } A = P.D.P^{-1}$$

remarque 3 (les matrices diagonales sont des matrices diagonalisables!)

En effet: Soit A une matrice diagonale.

On sait que A est semblable à elle-même... donc A est semblable à une matrice diagonale!

 **exemple 15:**

1. Montrer que si A est une matrice diagonalisable alors A^T est une matrice diagonalisable.
2. Montrer que si A est inversible et diagonalisable alors A^{-1} est diagonalisable

 **théorème 9: condition suffisante de diagonalisabilité, 2 formulations possibles**

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Si A possède n valeurs propres distinctes alors A est diagonalisable et chaque sep est de dimension un
2. Si χ_A est scindé et n'admet que des racines simples alors A est diagonalisable et chaque sep est de dimension un


 **théorème 10: CNS de diagonalisabilité**

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$.

Alors il y a équivalence entre :

- i.) A est diagonalisable
- ii.) le polynôme caractéristique χ_A est SCINDÉ sur \mathbb{K} et pour toute vp λ de A , $\dim E_\lambda = m(\lambda)$
- iii.) $\dim E_{\lambda_1} + \dots + \dim E_{\lambda_p} = n$
- iv.) $E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p} = \mathbb{K}^n$ càd $\forall X \in \mathbb{K}^n, \exists! (X_1, \dots, X_p) \in E_{\lambda_1} \times \dots \times E_{\lambda_p} \mid X = X_1 + \dots + X_p$

Comme on l'a déjà dit, il est d'usage d'identifier \mathbb{K}^n et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

 **exemple 16: sans presque aucun calcul**

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables dans \mathbb{R} ? dans \mathbb{C} ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

méthode 4: comment "diagonaliser" une matrice diagonalisable

Dans le cas où A est une matrice diagonalisable, on peut écrire $A = P.D.P^{-1}$ avec D matrice diagonale et P matrice inversible. Pour déterminer ces matrices, il suffit :

1. de déterminer les valeurs propres de A
2. de déterminer une base de chacun des sous-espaces propres
(On sait que la concaténation de ces bases donne une base de $E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p} = \mathbb{K}^n$)
3. de choisir pour D N'IMPORTE QUELLE MATRICE DIAGONALE AYANT COMME COEFFICIENTS DIAGONAUX LES VALEURS PROPRES DE A COMPTÉES AVEC LEUR MULTIPLICITÉ.
4. d'écrire les coordonnées des vecteurs propres composant la base des sous-espaces propres, EN PRENANT BIEN SOIN DE RESPECTER L'ORDRE AVEC LEQUEL ON A PLACÉ LES VALEURS PROPRES dans la matrice diagonale !

exemple 17:

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Un calcul nous donne les éléments propres de A :

$$sp(A) = \{0, 3\} \quad E_0 = \text{vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad E_3 = \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

On peut alors écrire A sous la forme $A = P.D.P^{-1}$ avec :

P	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$				$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
D	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	

exemple 18:

Diagonaliser la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

exemple 19: classique

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice possédant une unique valeur propre λ .
Montrer que A est diagonalisable ssi $A = \lambda.I_n$

théorème 11: qui rassemble des propriétés vues dans plusieurs chapitres

Deux matrices semblables ont même trace, même déterminant, même rang et même polynôme caractéristique.

remarque: comme deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique, on en déduit qu'elles ont les mêmes valeurs propres comptées avec les mêmes multiplicités.

Question: deux matrices semblables ont-elles les mêmes vecteurs propres?
les mêmes sous-espaces propres?

4 Trigonalisation

4.1 Endomorphismes trigonalisables V043



définition 4:

On dit que f EST TRIGONALISABLE lorsque il existe une base \mathcal{B} de E pour laquelle $\text{Mat}_{\mathcal{B}}f$ est triangulaire (supérieure).

déterminer si un endomorphisme est trigonalisable, c'est déterminer si parmi toutes les matrices qui lui sont associées l'une au moins est triangulaire (supérieure).

remarque 4

si f est diagonalisable alors f est trigonalisable



exemple 20:

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto (3x + y, y - x)$

On note $e_1 = (1, -1)$ et $e_2 = (-1, 2)$

1. Ecrire la matrice de f dans la base (e_1, e_2)
2. Ecrire la matrice de f dans la base (e_2, e_1)



théorème 12:

Il y a équivalence entre:

- i) f est trigonalisable
 - ii) il existe une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de E telle que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(\vec{e}_k) \in \text{vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k)$
- à noter que dans ce cas, \vec{e}_1 est un vecteur propre de f

démonstration dans le cas $n = 3$

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E .

On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, f(e_k) \in \text{vect}(e_1, \dots, e_k) &\iff \begin{cases} f(e_1) \in \text{vect}(e_1) \\ f(e_2) \in \text{vect}(e_1, e_2) \\ f(e_3) \in \text{vect}(e_1, e_2, e_3) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \exists a_{11} \in \mathbb{R}, f(e_1) = a_{11} \cdot e_1 \\ \exists (a_{12}, a_{22}) \in \mathbb{R}^2, f(e_2) = a_{12} \cdot e_1 + a_{22} \cdot e_2 \\ \exists (a_{13}, a_{23}, a_{33}) \in \mathbb{R}^3, f(e_3) = a_{13} \cdot e_1 + a_{23} \cdot e_2 + a_{33} \cdot e_3 \end{cases} \\ &\iff \text{Mat}_{(e_1, e_2, e_3)}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

démonstration dans le cas général

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

On a les équivalences:

$$\begin{aligned} & \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(e_k) \in \text{vect}(e_1, \dots, e_k) \\ \iff & \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists (a_{ik})_{1 \leq i \leq k} \in \mathbb{K}^k, f(e_k) = a_{1k} \cdot e_1 + a_{2k} \cdot e_2 + \dots + a_{kk} \cdot e_k \\ \iff & \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 & a_{kk} & & a_{kn} \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

remarque 5

1. Si f est trigonalisable alors f possède nécessairement au moins une valeur propre.
2. f est trigonalisable ssi il existe une base de E pour laquelle la matrice de f est triangulaire inférieure

💡 théorème 13: à utiliser quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (admis)

f est trigonalisable dans \mathbb{K} si et seulement si son polynôme caractéristique χ_f est scindé sur \mathbb{K} .
(c'est à dire χ_f peut s'écrire comme produit de polynômes de degré un à coefficients dans \mathbb{K})

Dans la démonstration, on montre que, quand f est trigonalisable, les coefficients diagonaux de sa matrice triangulaire sont les valeurs propres de f comptées avec leurs multiplicités.

démonstration d'une implication seulement

On suppose que f est trigonalisable sur \mathbb{K}

Il existe donc une base \mathcal{B} de E telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 & a_{kk} & & a_{kn} \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{avec les } a_{ij} \in \mathbb{K}$$

Ainsi $\chi_f(X) = (X - a_{11})(X - a_{22}) \dots (X - a_{nn})$

💡 théorème 14:

Si E est un \mathbb{C} ev de dimension finie alors tout endomorphisme de E est trigonalisable.
On dit encore que TOUT ENDOMORPHISME f DE E EST TRIGONALISABLE DANS \mathbb{C}

💡 théorème 15:

1. Si f est trigonalisable,
 - (a) $\text{tr}(f)$ est la somme des valeurs propres de f comptées avec leurs multiplicités
 - (b) $\text{det}(f)$ est le produit des valeurs propres de f comptées avec leurs multiplicités
2. Dans tous les cas,
 - (a) $\text{tr}(f)$ est la somme des valeurs propres complexes de f comptées avec leurs multiplicités
 - (b) $\text{det}(f)$ est le produit des valeurs propres complexes de f comptées avec leurs multiplicités

démonstration

 **méthode 5: PRATIQUE DE LA TRIGONALISATION**

L'idée générale est de placer un maximum de vecteurs propres dans la base

- lorsque $\dim E = 2$

il suffit de considérer une base (e_1, e_2) avec e_1 vecteur propre de f .

- lorsque $\dim E = 3$

les choses peuvent être compliquées si f possède une vp triple

cas où f possède deux vp distinctes: l'une simple (λ) et l'autre double (μ)


Notons e_1 un $\vec{v}p$ associé à λ et e_2 un $\vec{v}p$ associé à μ

On sait que la famille (e_1, e_2) est une famille libre
(car famille de $\vec{v}p$ associés à des vp distinctes)

On peut donc la compléter en une base de E .

Notons (e_1, e_2, e_3) une telle base.


Dans cette base, la matrice de f est de la forme
$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & a \\ 0 & \mu & b \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

 **exemple 21:**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{3}(-7x + 2y, -2x - 11y)$$


1. Montrer que f est trigonalisable (dans \mathbb{R})
2. Donner une base de \mathbb{R}^2 dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure
3. Donner une base \mathcal{B}' de \mathbb{R}^2 telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}'} f = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

 **exemple 22:**

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$


$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5x + 3y - 3z \\ x + 2y - z \\ 4x + 3y - 2z \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est trigonalisable (dans \mathbb{R})
2. Donner une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure
3. Donner une base \mathcal{B}' de \mathbb{R}^3 tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$


 **exemple 23:**

Soit a un réel. On considère $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto ((a+2)x + ay, (a-2)x + ay)$

1. Montrer que f est toujours trigonalisable
2. f est-elle toujours diagonalisable?

 **exemple 24:**

Soit $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ définie par $f(P) = P + P' + P'' + \dots + P^{(n)}$
 Montrer que f est trigonalisable, mais n'est pas diagonalisable.

4.2 Matrices carrées trigonalisables V067 **définition 5:**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
 On dit que A est TRIGONALISABLE lorsque A est semblable à une matrice triangulaire.
 On retiendra l'équivalence

$$A \text{ est trigonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \iff \exists P \in GL_n(\mathbb{K}), \exists T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \mid A = P.T.P^{-1}$$

remarque

- une matrice triangulaire est trigonalisable
- une matrice diagonalisable est trigonalisable

 **théorème 16:**

Il y a équivalence entre:
 i) A est trigonalisable
 ii) un endomorphisme associé à A est trigonalisable

 **théorème 17:**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
 A est trigonalisable (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) ssi son polynôme caractéristique χ_A est scindé sur \mathbb{K}

 **théorème 18:**

Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

càd $\exists P \in GL_n(\mathbb{C}), \exists T$ matrice triangulaire supérieure complexe tq $A = P.T.P^{-1}$

 **théorème 19:**

1. Si A est trigonalisable,
 - (a) $\text{tr}(A)$ est la somme des valeurs propres de f comptées avec leurs multiplicités
 - (b) $\det(A)$ est le produit des valeurs propres de f comptées avec leurs multiplicités
2. Dans tous les cas,
 - (a) $\text{tr}(A)$ est la somme des valeurs propres complexes de f comptées avec leurs multiplicités
 - (b) $\det(A)$ est le produit des valeurs propres complexes de f comptées avec leurs multiplicités

remarque 6

d'une manière plus générale, si A est une matrice trigonalisable et si les racines de son polynôme caractéristique sont $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ comptées avec leur multiplicité, alors $\forall p \geq 1, \sum_{k=1}^n \lambda_k^p = \text{tr}(A^p)$

remarque 7

un matrice carrée A à coefficients réels n'est pas nécessairement trigonalisable SUR LE CORPS \mathbb{R} (c'est à dire qu'il n'existe pas nécessairement une matrice triangulaire supérieure T à COEFFICIENTS RÉELS et une matrice inversible P à COEFFICIENTS RÉELS telles que $A = P.T.P^{-1}$). Cependant, un nombre réel étant aussi un nombre complexe, la matrice A considérée comme matrice à coefficients complexes est trigonalisable sur le corps \mathbb{C} (c'est à dire qu'il existe un matrice triangulaire supérieur T à COEFFICIENTS COMPLEXES et une matrice inversible P à COEFFICIENTS COMPLEXES telles que $A = P.T.P^{-1}$)

méthode 6: PRATIQUE DE LA TRIGONALISATION

L'idée générale est de placer un maximum de vecteurs propres dans la matrice de passage

- lorsque $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

En notant (C_1, C_2) les colonnes de la matrice de passage P ,
il suffit de considérer C_1 un vecteur propre de A , la matrice T sera triangulaire supérieure

- lorsque $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$

les choses peuvent être compliquées si A possède une valeur propre triple

cas où A possède deux vp distinctes: l'une simple (λ) et l'autre double (μ)

En notant (C_1, C_2, C_3) les colonnes de la matrice de passage P ,
il suffit de considérer C_1 un vecteur propre associé à λ et C_2 un vecteur propre associé à μ .

La matrice T sera alors de la forme
$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & a \\ 0 & \mu & b \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

☀ exemple 25: En se fixant la matrice P

Trigonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

On donne $\chi_A = (X - 6)^2$ et $E_6(A) = \text{vect}(C_1)$ avec $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Notons C_2 une matrice unicolonne telle que (C_1, C_2) base de \mathbb{R}^2 .

Par exemple $C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- On sait déjà que $AC_1 = 6.C_1$
- Cherchons $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $AC_2 = a.C_1 + b.C_2$

On a $AC_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui donne le système $\begin{cases} -1 = a \\ 4 = 2a + b \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \\ b = 6 \end{cases}$

- Comme (C_1, C_2) est libre, on sait que $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice inversible.

et que l'on a $A = P.T.P^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$