VALEURS PROPRES, VECTEURS PROPRES
SOUS-ESPACES PROPRES

Table des matières

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera le corps des réels ou des complexes, E désignera un $\mathbb{K}$- espace vectoriel (le plus souvent, de dimension finie n) et f un endomorphisme de E

- On rappelle qu'un endomorphisme de E est une application linéaire de $E \to E$
- On rappelle aussi que

définition 1: sev stable par un endomorphisme

Soit F un sev de E.
On dit que F EST UN SEV STABLE PAR f lorsque $f(F) \subset F$, c'est à dire lorsque $\forall \vec{x} \in F, f(\vec{x}) \in F$
remarque: $\{\vec{0}\}$ *et* E *sont toujours des sev stables par* f *lorsque* $f \in \mathcal{L}(E)$ *(trivial)*

1 Polynômes caractéristiques

définition 2: polynôme caractéristique d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On appelle POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE DE LA MATRICE A le déterminant de la matrice $X.I_n - A$.
On le note χ_A. On a donc

$$\boxed{\chi_A(X) = \det(X.I_n - A)}$$

La fonction $x \mapsto \chi_A(x)$ est polynômiale, unitaire, de degré n
rem (HP): $\chi_A(X) = X^n - \operatorname{tr}(A).X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$

exemple 1: Calculer le polynôme caractéristique des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -3 & 8 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\pi \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

théorème 1:

1. Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique
2. A et A^T ont le même polynôme caractéristique.

Deux matrices peuvent avoir même polynôme caractéristique sans toutefois être semblables.

définition 3: polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}-ev$ de dimension fini n.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
On appelle POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE DE L'ENDOMORPHISME f, et on note χ_f le déterminant de l'endomorphisme $Xid_E - f$.

On a donc

$$\boxed{\chi_f(X) = \det(Xid_E - f)}$$

Le polynôme $\chi_f(X)$ est un polynôme unitaire de degré n où $n = \dim E$
rem (HP): $\chi_f(X) = X^n - \operatorname{tr}(f).X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(f)$

Soit $\mathcal{B}$ une base de E.
Notons $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
On a

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(X.id_E - f) = X.\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(id_E) - \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = X.I_n - A$$

et ainsi

$$\chi_f(X) = \det(X.id_E - f) = \det(X.I_n - A) = \chi_A(X)$$

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme est égal
au polynôme caractéristique de n'importe quelle matrice qui lui est associée!

exemple 2:

Déterminer le polynôme caractéristique des endomorphismes suivants:

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, x-y) \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & X.P' + P'' \end{array}$$

exemple 3: homothétie

Déterminer le polynôme caractéristique de l'homothétie de rapport k.

2 Elements propres d'un endomorphisme (dimension quelconque)

E désigne un $\mathbb{K}-$ev de dimension quelconque, et f un endomorphisme de E

2.1 Définitions et méthode (V060)

définition 4:

Soit E un $\mathbb{K}-$ev et f un endomorphisme de E.

- On dit que le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est UNE VALEUR PROPRE (V.P) DE f lorsque il existe un vecteur $\vec{x} \in E$ NON NUL tel que $f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$.
- Dans ce cas, le vecteur $\vec{x}$ s'appelle UN VECTEUR PROPRE ($\vec{v}.p$) ASSOCIÉ À LA VALEUR PROPRE λ
- L'ensemble des valeurs propres de f s'appelle LE SPECTRE DE f, et se note $sp(f)$

exemple 4:

Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,2x) \end{array}$

1. Vérifier que $\vec{u} = (1,1)$ est un vecteur propre de f. Quelle est la valeur propre associée?
2. $\vec{v} = (1,3)$ est-il vecteur propre de f?

exemple 5: éléments propres de l'endomorphisme identité

Déterminer les valeurs et vecteurs propre de $f = id_E$

exemple 6: dans un espace de polynômes

Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & (X-1).P' \end{array}$

On note pour tout $\lambda \in \mathbb{R}, P_\lambda = (X-1)^\lambda$

1. X^2 est-il vecteur propre de f?
2. P_λ est-il vecteur propre de f? Si oui, quelle est la vp associée?

méthode 1: comment déterminer les éléments propres en dim quelconque

On détermine les solutions NON TRIVIALES de l'équation $f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$ (càd avec $\vec{x} \neq \vec{0}$)

rem: cette équation s'appelle "ÉQUATION AUX ÉLÉMENTS PROPRES"

exemple 7: dans un espace de matrices

Soit $\varphi: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^T + 2A \end{array}$

1. Montrer que si λ est une valeur propre de φ alors $\lambda = 1$ ou $\lambda = 3$
2. 3 est-il valeur propre? 1 est-il valeur propre?
3. Conclure sur les éléments propres de φ

théorème 2: droite vectorielle stable

Soit $\vec{a}$ un vecteur non nul de E. Il y a équivalence entre:

i) la droite $D = \text{vect}\,\vec{a}$ est stable par f

ii) $\vec{a}$ est un vecteur propre de f

Ainsi déterminer les droites vectorielles stables par f revient à déterminer les vecteurs propres de f

définition 5: sous-espace propre d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}-$ev et f un endomorphisme de E.
Soit $\lambda \in sp(f)$.
Le noyau de l'endomorphisme $f - \lambda.id_E$ est appelé SOUS-ESPACE PROPRE(SEP) DE f ASSOCIÉ À LA VALEUR PROPRE λ.
On le note

$$E_\lambda \text{ ou } E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda.id_E) = \{\vec{x} \in E \,|\, (f - \lambda.id_E)(\vec{x}) = \vec{0}\} = \{\vec{x} \in E \,|\, f(\vec{x}) = \lambda.\vec{x}\}$$

rem: $E_\lambda(f)$ est égal à l'ensemble des vecteurs propres de f associés à la vp λ union le singleton vecteur nul.
rem: on rappelle que si g est une application linéaire alors $g(\vec{0}) = \vec{0}$ et $\ker(g)$ est un sev

remarque 1

- *on appelle* ÉLÉMENTS PROPRES *de l'endomorphisme f les valeurs propres et les vecteurs propres de f*
- L'ENSEMBLE DES VECTEURS PROPRES ASSOCIÉES À UNE MÊME VALEUR PROPRE λ N'EST PAS UN SEV *car cet ensemble ne possède pas le vecteur nul!*

remarque 2 (*Rappel sur l'injectivité et la bijectivité*)

Soit g un endomorphisme de E. On a vu que

- *g injective* $\iff \ker(g) = \{\vec{0}\}$
- *Si de plus E est de dimension finie on a*

$$g \text{ bijective} \iff g \text{ injective} \iff g \text{ surjective} \iff \ker(g) = \{\vec{0}\} \iff \text{rg}(g) = \dim E \iff \dots$$

proposition 1 (*intéressant un dimension infinie seulement*)

On a l'équivalence :

$$\boxed{\lambda \text{ est un valeur propre de } f \iff \text{l'endomorphisme } f - \lambda id_E \text{ n'est pas injectif}}$$

En particulier:

$$\boxed{0 \text{ est valeur propre de } f \text{ si et seulement si } f \text{ n'est pas injectif}}$$

démonstration:
en effet, on a les équivalences:

λ *est vp de* $f \Leftrightarrow \exists \vec{x} \neq \vec{0}, f(\vec{x}) = \lambda.\vec{x} \Leftrightarrow \exists \vec{x} \neq \vec{0}, (f - \lambda id_E)(\vec{x}) = \vec{0} \Leftrightarrow \ker(f - \lambda id_E)$ *n'est pas réduit au vecteur nul*

théorème 3:

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E espace vectoriel DE DIMENSION FINIE.
Il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

i) λ est une valeur propre de f

ii) λ est une racine du polynôme caractéristique χ_f

iii) l'endomorphisme $f - \lambda id_E$ n'est pas bijectif

Lorsque $\dim E$ *est finie, les valeurs propres de* f *sont* LES *racines de son polynôme caractéristique*

démonstration:
On a les équivalences

$$\lambda \text{ vp de } f \Longleftrightarrow f - \lambda.id_E \text{ n'est pas injectif} \Longleftrightarrow f - \lambda.id_E \text{ n'est pas bijectif} \Longleftrightarrow \det(f - \lambda.id_E) = 0$$

or

$$\det(f - \lambda.id_E) = \det(-(\lambda.id_E - f)) = (-1)^n.\det(\lambda.id_E - f) = (-1)^n.\chi_f(\lambda)$$

on a bien montré l'équivalence

$$\lambda \text{ vp de } f \Longleftrightarrow \chi_f(\lambda) = 0$$

méthode 2: déterminer les éléments propres en dimension finie.

On détermine le polynôme caractéristique puis ses racines.
Pour chaque vp trouvée on détermine le sep correspondant en résolvant l'équation aux éléments propres $f(\vec{x}) = \lambda.\vec{x}$ ou $(f - \lambda.id_E)(\vec{x}) = \vec{0}$

Exemple:

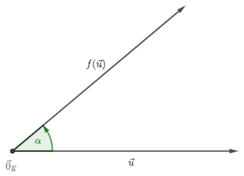
Déterminer les éléments propres de $\boxed{\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+y, 3x-y) \end{array}}$.

$\boxed{\dim E \text{ quelconque}}$	$\boxed{\dim E \text{ finie}}$	$\boxed{\dim E \text{ finie}}$ *(cas particulier)*
λ vp de f	λ vp de f	0 vp de f
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
$\ker(f - \lambda.id_E) \neq \{0\}$	$\ker(f - \lambda.id_E) \neq \{0\}$	$\ker(f) \neq \{0\}$
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
$f - \lambda.id_E$ NON injectif	$f - \lambda.id_E$ NON bijectif	f NON bijectif
	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
	$\text{rg}(f - \lambda.id_E) < \dim E$	$im(f) \neq E$
	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
	λ racine de χ_f	$\vdots$
	$\Updownarrow$	
	$\vdots$	

2.2 exemples (V061)

exemple 8: éléments propres d'une rotation vectorielle du plan

Soit f la rotation vectorielle d'angle α. Donner les éléments propres de f.



exemple 9: dans un espace de polynômes

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $\boxed{\begin{array}{rcl} f : E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & P' \end{array}}$ dans le cas où $E = \mathbb{R}[X]$

Solution:

1. *On s'intéresse aux solutions non triviales de* L'ÉQUATION AUX ÉLÉMENTS PROPRES $f(P) = \lambda.P$ *avec* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $P \in E$
2. *On commence par remarquer que* 0 *est valeur propre évidente:*
   en effet on a $P' = 0$ *pour tout polynôme constant.*
   Les vecteurs propres associés à la vp zéro sont les polynômes constants non nuls.
   On a $\boxed{E_0(f) = \mathbb{R}_0[X]}$
3. *Soit* λ *un réel non nul et* P *un polynôme.*
   Si $P' = \lambda.P$ *alors* P *et* P' *ont le même degré! Ce qui n'est possible que si* $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.
   Ceci prouve que l'équation $f(P) = \lambda.P$ *ne possède que la solution triviale* $P = 0$,
   et donc que λ *n'est pas valeur propre.*
4. $\boxed{\textit{Conclusion: on a montré que } sp(f) = \{0\}}$

exemple 10: dans un espace de fonctions

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $\boxed{\begin{array}{rcl} f : E & \longrightarrow & E \\ g & \longmapsto & g' \end{array}}$

dans le cas où $E = C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Quelques remarques:

- *On a* $f(\sin) = \cos(\neq \lambda \sin)$ *donc* $\sin$ *n'est pas vecteur propre de* f
- *On a* $f(\exp) = \exp = 1.\exp$ *donc la fonction* $\exp$ *est* $\vec{v}.p$ *de* f *associée la v.p un*
- *Notons* h_0 *la fonction constante égale à un, on a* $f(h_0) = 0 = 0.h_0$
  ceci prouve que 0 *est v.p de* f *et que* h_0 *est un* $\vec{v}.p$ *associé*

Solution:

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $g \in E$.

- *On s'intéresse aux solutions non triviales de* L'ÉQUATION AUX ÉLÉMENTS PROPRES $f(g) = \lambda.g$
- *L'équation* $f(g) = \lambda.g$ *n'est rien d'autre que l'équation différentielle* $g' - \lambda.g = 0$
- *Le cours sur les équations différentielles nous indique que pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$ *fixé,*
  la solution générale est $\boxed{\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & K.\exp(\lambda.x) \end{array}}$ *avec* $K \in \mathbb{R}$.
- *On en déduit que tout réel* λ *est valeur propre de* f *et que* $E_\lambda(f) = \{K.h_\lambda | K \in \mathbb{R}\} = \mathrm{vect}(h_\lambda)$
  où h_λ *est la fonction définie par* $\boxed{\begin{array}{rcl} h_\lambda : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(\lambda x) \end{array}}$

$\boxed{\textit{Conclusion: } sp(f) = \mathbb{R} \textit{ et chaque sep est de dimension un}}$

exemple 11:

Déterminer les valeurs et les vecteurs propres de l'application $\boxed{\begin{array}{rccc} f: & E & \longrightarrow & E \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix} \end{array}}$

dans le cas où $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *puis dans le cas où* $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Solution:

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

On s'intéresse aux solutions non triviales de L'ÉQUATION AUX ÉLÉMENTS PROPRES $f(M) = \lambda.M$.
On a les équivalences suivantes

$$f(M) = \lambda M \iff \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a & = \lambda a \\ c & = \lambda b \\ d & = \lambda c \\ b & = \lambda d \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (1-\lambda)a & = 0 \\ c & = \lambda b \\ d & = \lambda^2 b \\ b & = \lambda^3 b \end{cases} \iff \begin{cases} (1-\lambda)a & = 0 \\ (1-\lambda^3)b & = 0 \\ c & = \lambda b \\ d & = \lambda^2 b \end{cases} (S)$$

Puis on effectue une discussion sur les solutions de $1 - \lambda = 0$ et $1 - \lambda^3 = 0$, ce qui nécessité une discussion $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$!

- $\boxed{\textbf{cas où } \mathbb{K} = \mathbb{R}}$
  - si $\lambda \neq 1$, on a $1 - \lambda \neq 0$ et $1 - \lambda^3 \neq 0$ et donc $(S) \iff a = b = c = d = 0$
  - si $\lambda = 1$, on a $(S) \iff c = b = d$

  $\boxed{\text{Conclusion}: sp_{\mathbb{R}}(f) = \{1\}}$

  et $\boxed{E_1(f) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) | b = c = d\} = \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & b \end{pmatrix} | (a,b) \in \mathbb{R}^2\}}$

- $\boxed{\textbf{cas où } \mathbb{K} = \mathbb{C}}$
  - si $\lambda = 1$ on a $(S) \iff c = b = d$
  - si $\lambda = \exp(2i\pi/3) = j$ on a $(S) \iff (a = 0, c = jb, d = j^2 b)$
  - si $\lambda = \exp(4i\pi/3) = j^2$ on a $(S) \iff (a = 0, c = j^2 b, d = j^4 b = jb)$
  - sinon on a $(S) \iff a = b = c = d = 0$

  $\boxed{\text{Conclusion}: sp_{\mathbb{C}}(f) = \{1, j, j^2\}}$ et

  $\boxed{E_1(f) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & b \end{pmatrix} | (a,b) \in \mathbb{C}^2\} = \{a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} | (a,b) \in \mathbb{C}^2\} = \text{vect}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$

  $\boxed{E_j(f) = \{\begin{pmatrix} 0 & b \\ jb & j^2 b \end{pmatrix} | b \in \mathbb{C}\} = \text{vect}(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ j & j^2 \end{pmatrix}) \text{ et } E_{j^2}(f) = \{\begin{pmatrix} 0 & b \\ j^2 b & jb \end{pmatrix} | b \in \mathbb{C}\} = \text{vect}(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ j^2 & j \end{pmatrix}}$

exemple 12: éléments propres des endomorphismes de référence

f	v.p.	s.e.p.
homothétie de rapport k	k	$E_k(f) = E$
projection sur F_1 parallélement à F_2	$0, 1$	$\begin{cases} E_0(f) = F_2 \\ E_1(f) = F_1 \end{cases}$
symétrie vectorielle par rapport à F_1 parallèlement à F_2	$-1, 1$	$\begin{cases} E_{-1}(f) = F_2 \\ E_1(f) = F_1 \end{cases}$

3 Eléments propres d'une matrice (V062)

3.1 endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée(rappel)

définition 6: application linéaire canoniquement associée

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
L'APPLICATION LINÉAIRE CANONIQUEMENT ASSOCIÉE À A est l'application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ qui a pour matrice A lorsque l'on munit $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ de leur respective base canonique.
Autrement dit, c'est l'application $\boxed{\begin{array}{rcl} u : \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto & AX \end{array}}$
Dans cette définition, on identifie les vecteurs de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ aux matrices unicolonnes
rem: on a déjà vu qu'à une matrice donnée on pouvait associer une infinité d'applications linéaires, il y en a une que l'on distingue c'est l'endomorphisme canoniquement associé.

définition 7: endomorphisme canoniquement associé

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
L'ENDOMORPHISME CANONIQUEMENT ASSOCIÉ À A est l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ qui a pour matrice A lorsque l'on munit $\mathbb{K}^n$ de sa base canonique.
Autrement dit, c'est l'application $\boxed{\begin{array}{rcl} u : \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto & AX \end{array}}$
Dans cette définition, on identifie les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ aux matrices unicolonnes

exemple 13:

déterminer l'endomorphisme canoniquement associé aux matrices suivantes et préciser image et noyau.
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et celui associé à $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3.2 définitions et méthodes

définition 8:

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On appelle VALEURS PROPRES, VECTEURS PROPRES, SPECTRE ET SOUS-ESPACES PROPRES DE LA MATRICE A les valeurs propres, vecteurs propres, spectre et sous-espaces propres de l'endomorphisme canoniquement associé à A, *c'est à dire*:

1. λ EST VALEUR PROPRE DE A ssi $\exists\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$.
   Dans ce cas, X EST UN VECTEUR PROPRE DE A ASSOCIÉ À LA VALEUR PROPRE λ
2. LE SEP DE A ASSOCIÉ À LA VP λ est le noyau de $A - \lambda.I_n$
   ainsi

$$E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda.I_n) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \,|\, (A - \lambda.I_n)X = 0\} = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \,|\, AX = \lambda.X\}$$

rem: le sep $E_\lambda(A)$ correspond à l'ensemble des $\vec{v}.p$ de A auquel on ajoute la matrice unicolonne nulle
rem: on notera que LES VECTEURS PROPRES D'UNE MATRICE SONT DES MATRICES UNICOLONNES
rem: 0 est valeur propre d'une matrice ssi cette matrice n'est pas inversible

exemple 14: très classique

1. La matrice I_n possède 1 comme unique valeur propre et toute matrice unicolonne autre que la matrice nulle est vecteur propre.
2. Soit A une matrice. On note λ une de ses valeurs propres et X un vecteur propre associé
   (a) Montrer que X est vecteur propre de la matrice A^2
   (b) Montrer que $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$ est valeur propre de la matrice $A^3 - 3A^2 + 4I_n$

exemple 15: valeurs propres et vecteurs propres évidents

Déterminer les vp et $\vec{v}.p$ évidents de $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

théorème 4:

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

i) λ est une valeur propre de A

ii) λ est une racine du polynôme caractéristique χ_A

iii) la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible

en particulier: 0 est valeur propre de A ssi A n'est pas inversible

démonstration:

méthode 3: comment déterminer les éléments propres d'une matrice A

1. On calcule le polynôme caractéristique de A, en calculant le déterminant de $X.I_n - A$.
   (ce qui revient à changer tous les signes de A et à ajouter un X sur la diagonale)
2. On détermine les racines de χ_A: on a ainsi les valeurs propres de A
3. Pour chacune de ses valeurs propres, on détermine le sous-espace propre associé $E_\lambda(A)$ en résolvant l'équation $A.X = \lambda.X$ ou $(A - \lambda.I_n).X = 0$ ou $(\lambda.I_n - A).X = 0$ d'inconnue la matrice unicolonne X

voir les nombreux exemples corrigés cachés sur le site

rem: on peut aussi revenir à la définition et raisonner sur l'équation aux éléments propres

exemple 16: valeurs propres d'une matrice triangulaire

Déterminer le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

On retiendra que les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux.

4 Propriétés des éléments propres (V063)

définition 9:

Soit $\lambda \in sp(f)$.
On dit que λ est UNE VALEUR PROPRE D'ORDRE r DE L'ENDOMORPHISME f[DE LA MATRICE A] lorsque λ est une racine de multiplicité r de χ_f[de χ_A]
On note $m(\lambda)$ la multiplicité de λ

remarque 3

- *dans le cas où λ est une racine de multiplicité un du polynôme caractéristique, la valeur propre λ est dite* SIMPLE.
- *dans le cas où λ est une racine de multiplicité deux du polynôme caractéristique, la valeur propre λ est dite* DOUBLE.
- *les valeurs propres d'une matrice triangulaire, a fortiori diagonale, sont ses coefficients diagonaux de la matrice (comptés avec leur multiplicité)*
- DEUX MATRICES SEMBLABLES ONT LES MÊMES VALEURS PROPRES AVEC MÊMES MULTIPLICITÉS, *car on a déjà vu qu'elles avaient même polynôme caractéristique.*

théorème 5: pour la démo, se placer dans une base judicieuse

Si λ est une valeur propre d'ordre $m(\lambda)$ de f [de A] **alors** $\boxed{1 \leqslant \dim E_\lambda \leqslant m(\lambda)}$
En particulier, ***Si*** *λ est une valeur propre simple* ***alors*** *E_λ est une droite vectorielle*

exemple 17:

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\chi_f = (X-1)^2(X+3)^3(X+1)$.
On peut dire que

i)
ii)
iii)
iv)
v)

exemple 18: important à avoir en tête

Montrer que

1. la somme des dimensions des sep d'un endomorphisme de E est toujours inférieure ou égale à $\dim E$
2. f possède au plus $n = \dim E$ valeurs propres distinctes
3. **dans $\mathbb{C}$, f possède exactement $n = \dim E$ valeurs propres comptées avec leur multiplicité**

théorème 6:
Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux est libre.

démonstration:

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}_n$: "une famille de n $\vec{v}.p$ de f associés à des valeurs propres distinctes est libre"

- **initialisation:** $\mathcal{P}_1$ est vraie.
  En effet, soit $\vec{v}_1$ un $\vec{v}.p$ de f.
  Comme $\vec{v}_1 \neq 0$, on sait que la famille $(\vec{v}_1)$ est libre.

- **initialisation:** $\mathcal{P}_2$ est vraie.
  En effet, soient $(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$ une famille de $\vec{v}.p$ associés à des valeurs propres distinctes
  Notons $\lambda_1 \neq \lambda_2$ les vp respectives.

  Soit $(\mu_1,\mu_2) \in \mathbb{K}^2$ tel que $\mu_1.\vec{v}_1 + \mu_2.\vec{v}_2 = \vec{0}$ (*)

  En composant par f, qui est linéaire, on a

$$\mu_1.f(\vec{v}_1) + \mu_2.f(\vec{v}_2) = f(\vec{0}) = \vec{0}$$

  càd

$$\mu_1.\lambda_1.\vec{v}_1 + \mu_2.\lambda_2.\vec{v}_2 = \vec{0} \qquad (**)$$

  Considérons $(**) - \lambda_2(*)$, on obtient $\mu_1.(\lambda_1 - \lambda_2).\vec{v}_1 = \vec{0}$
  comme $\vec{v}_1 \neq 0$ car c'est un vecteur propre et que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ par hypothèse, on a forcément

$$\mu_1 = 0$$

  en reportant dans $(*)$, cela donne

$$\mu_2.\vec{v}_2 = \vec{0}$$

  comme $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$ car c'est un vecteur propre, on a $\mu_2 = 0$
  ainsi $\mu_1 = \mu_2 = 0$
  On a bien montré que $(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$ est une famille libre

- **hérédité:** on suppose $\mathcal{P}_n$ vraie pour un $n \geqslant 1$ quelconque fixé.
Soient $(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_{n+1})$ $n+1$ $\vec{v}.p$ de f associés à des vp distinctes notées respectivement $\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1}$
Nous allons montrer que $(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_{n+1})$ est une famille libre.

Soit $(\mu_1,\dots,\mu_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{n+1} \mu_k.\vec{v}_k = \vec{0} \qquad (*)$

En composant par f (application linéaire) cela donne

$$\sum_{k=0}^{n+1} \mu_k.f(\vec{v}_k) = f(\vec{0}) = \vec{0}$$

or $\forall k \in [\![1,n]\!], f(\vec{v}_k) = \lambda_k.\vec{v}_k$ d'après ...
d'où $\sum\limits_{k=0}^{n+1} \mu_k.\lambda_k.\vec{v}_k = \vec{0} \qquad (**)$
En considérant $(**) - \lambda_{n+1}(*)$ cela donne

$$\sum_{k=0}^{n+1} \mu_k.\lambda_k.\vec{v}_k - \lambda_{n+1}\sum_{k=0}^{n+1} \mu_k.\vec{v}_k = \vec{0}$$

càd

$$\sum_{k=0}^{n+1} \mu_k.(\lambda_k - \lambda_{n+1}).\vec{v}_k = \vec{0}$$

soit

$$\sum_{k=0}^{n} \mu_k.(\lambda_k - \lambda_{n+1}).\vec{v}_k = \vec{0} \qquad (***)$$

or par hypothèse de récurrence, à savoir $\mathcal{P}_n$ est vraie, on peut donc affirmer que $(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n)$ est une famille libre!
D'après $(***)$, on en déduit que

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \mu_k.(\lambda_k - \lambda_{n+1}) = 0$$

or $\forall k \in [\![1,n]\!], \lambda_k \neq \lambda_{n+1}$ (car les vp sont distinctes par hypothèse)
d'où

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \mu_k = 0$$

on reporte dans $(*)$, cela donne $\mu_{n+1}.\vec{v}_{n+1} = \vec{0}$
or $\vec{v}_{n+1} \neq \vec{0}$ car c'est un vecteur propre!
D'où

$$\mu_{n+1} = 0$$

On a bien montré que $\mu_1 = \cdots = \mu_n = \mu_{n+1} = 0$

théorème 7: c'est le corollaire

1. Si $\dim E = n$ alors tout endomorphisme de E possède au plus n valeurs propres distinctes
2. La matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède au plus n valeurs propres distinctes

théorème 8: un autre corollaire que l'on démontrera plus tard

La somme d'une famille finie de sous-espaces propres (d'un même endomorphisme) est directe

5 Annexe: rappels sur les polynômes

définition 10:
On dit que le scalaire α EST RACINE DE MULTIPLICITÉ r DU POLYNÔME P lorsqu'il existe un polynôme Q tel que $P(X) = (X - \alpha)^r.Q(X)$ avec $Q(\alpha) \neq 0$,
on note alors souvent $m(\alpha) = r$

exemple 19:
Soit $P = (X + 1)^2(X - 2)^3(X - 1)(X^2 + 1)$
- Les racines réelles de P sont -1,2,1
- $m(-1) = 2, m(2) = 3$ et $m(1) = 1$
- Les racines réelles de P comptées avec leurs multiplicités sont $-1, -1$,2,2,2,1
- Les racines complexes de P sont -1,2,1,i et $-i$
- Les racines complexes de P comptées avec leurs multiplicités sont $-1, -1$,2,2,2,1,i et $-i$

théorème 9: caractérisation de la multiplicité à l'aide des dérivées
Soit P un polynôme et α un scalaire.
Il y a équivalence entre:
i) α est racine d'ordre r de P
ii) $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(r-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(r)}(\alpha) \neq 0$

définition 11:
On dit qu' UN POLYNÔME $P(X)$ EST SCINDÉ SUR LE CORPS $\mathbb{K}$ lorsqu'il peut s'écrire comme le produit de polynômes de degré un à coefficients dans $\mathbb{K}$
- $X^2 - 1$ *et* $X^2 - 2X + 1$ *sont des polynômes scindés sur* $\mathbb{R}$.
- $X^2 + 1$ *n'est pas un polynôme scindé sur* $\mathbb{R}$.

théorème 10: théorème de Gauss
- Tout polynôme de degré supérieur ou égal à un est scindé sur $\mathbb{C}$
- Tout polynôme de degré supérieur ou égal à un possède exactement n racines comptées avec leurs multiplicités

rem: les racines complexes d'un polynômes à COEFFICIENTS RÉELS *sont conjuguées deux à deux.*

théorème 11: degré d'un polynôme dérivé
Soit P un polynôme.
- si $\deg(P) \geqslant 1$ alors $\deg(P') = \deg(P) - 1$ sinon $\deg(P') = -\infty$

théorème 12: théorème de la division euclidienne
Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$.
Il existe un unique couple de polynômes (Q,R) tel que $A = B.Q + R$ avec $\deg(R) < \deg(B)$

exemple 20:
Déterminer le reste de la division euclidienne de X^5 par $(X-2)^3(X+1)$.

- *d'après le théorème ci-dessus, il existe* $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ *et un polynôme* $Q(X)$ *tels que* $X^5 = (X-2)^3(X+1)Q(X) + aX^3 + bX^2 + cX + d$
- *Pour* $X = -1$ *cela donne* $1 = -a + b - c + d$
- *Pour* $X = 2$ *cela donne* $2^5 = 8a + 4b + 2c + d$
- *En dérivant en prenant* $X = 2$ *cela donne* $5.2^4 = 3a.2^2 + 2b.2 + c$
- *En dérivant de nouveau et en prenant* $X = 2$ *cela donne* $5.4.2^3 = 6a.2 + 2b$
- *On résout le système constitué ces 4 équations*
- *On trouve que le reste est égal à* $19X^3 - 34X^2 - 12X + 40$

6 Polynômes matriciels(HP) (V032)

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ avec $p \geqslant 2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
Par convention, on pose $A^0 = I_p$ et pour tout $k \geqslant 1$, $A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}$.

Pour tout $P = P(X) = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k.X^k = a_d.X^d + \cdots + a_1.X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$

On pose $P(A) = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k.A^k = a_d.A^d + \cdots + a_1.A + a_0.A^0 = a_d.A^d + \cdots + a_1.A + a_0.I_p \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$

proposition 2 (*propriétés*)

Soient $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$

i) $(P+Q)(A) = P(A) + Q(A)$
ii) $(P.Q)(A) = P(A).Q(A)$
iii) $(\lambda.P)(A) = \lambda.P(A)$

proposition 3 (*différence notable*)

Soit $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$

i) $P.Q = 0 \Longrightarrow P = 0$ *ou* $Q = 0$
ii) $P(X).Q(X) = 0 \Longrightarrow P(X) = 0$ *ou* $Q(X) = 0$
iii) mais $P(A).Q(A) = 0 \not\Longrightarrow P(A) = 0$ *ou* $Q(A) = 0$
exemple: si $A.(A - I_n) = 0$ *on n'a pas forcément* $A = 0$ *ou* $A = I_n$

exemple 21:
Notons $P = X^2 - 3X + 1$ et $Q = X - 2$

- On a alors $P(f) = f^2 - 3f + id_E$ et $Q(f) = f - 2id_E$
- $S = P + Q = X^2 - 2X - 1$ et $P(f) + Q(f) = f^2 - 2f - id_E = S(f)$
- $R = PQ = X^3 - 5X^2 + 7X - 2$
  et
  $P(f) \circ Q(f) = (f^2 - 2f - id_E) \circ (f - 2id_E) = f^3 - 5f^2 + 7f - 2id_E = R(f)$

théorème 13: théorème de Cayley-Hamilton- HP
Le polynôme caractéristique de A est un polynôme annulateur de A.

7 Polynômes d'endomorphismes (HP) (V033)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel
Soit f un endomorphisme de E.
Par convention, on pose $f^0 = id_E$ et pour tout $k \geqslant 1, f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

Pour tout $P = P(X) = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k.X^k = a_d.X^d + \cdots + a_1.X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$

On note $P(f) = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k.f^k = a_d.f^d + \cdots + a_1.f + a_0.f^0 = a_d.f^d + \cdots + a_1.f + a_0.id_E \in \mathcal{L}(E)$

proposition 4 (*propriétés:*)

Soient $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

i) $(P+Q)(f) = P(f) + Q(f)$
ii) $(P.Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$
iii) $(\lambda.P)(f) = \lambda.P(f)$

proposition 5 (*différence notable*)

Soit $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$

i) $P.Q = 0 \Longrightarrow P = 0$ *ou* $Q = 0$
ii) $P(X).Q(X) = 0 \Longrightarrow P(X) = 0$ *ou* $Q(X) = 0$
iii) mais $P(f) \circ Q(f) = 0 \not\Longrightarrow P(f) = 0$ *ou* $Q(f) = 0$

exemple: si $f^2 = f \circ f = 0$ *on n'a pas forcément* $f = 0$

exemple 22:

Notons $P = X - 1$ et $Q = X + 3$

- On a alors $P(f) = f - id_E$ et $Q(f) = f + 3id_E$
- $S = P + Q = 2X + 2$ et $P(f) + Q(f) = 2f + 2id_E = S(f)$
- $T = PQ = X^2 + 2X - 3$ et $P(f) \circ Q(f) = (f - id_E) \circ (f + 3id_E) = f^2 + 2f - 3id_E = T(f)$

exemple 23:

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$
Notons $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$
Montrer que $P(A) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P(f))$

8 Complément: matrice réelle vue comme une matrice complexe

définition 12:

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On appelle matrice conjuguée de A et on note $\overline{A}$, la matrice de coefficient générique $\overline{a_{i,j}}$.

proposition 6

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors:
i.) $\overline{\overline{A}} = A$
ii.) $\overline{AB} = \overline{A}.\overline{B}$
iii.) $\overline{\lambda.A} = \overline{\lambda}.\overline{A}$

démonstration:

Nous allons utiliser le fait que pour LES SCALAIRES COMPLEXES on a $\boxed{\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2} \text{ et } \overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}}$
Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

i) trivial car $\overline{\overline{a_{ij}}} = a_{ij}$ pour tout (i,j)
ii) Notons $C = \overline{A}.\overline{B} = (c_{ij})$ et $D = AB = (d_{ij})$.
   - $d_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj}$ d'après la formule du produit matriciel,
     et donc $\overline{d_{ij}} = \overline{\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj}} = \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{a_{ik}.b_{kj}} = \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{a_{ik}}.\overline{b_{kj}}$
   - $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{a_{ik}}.\overline{b_{kj}}$ d'après la formule du produit matriciel,
   - On a bien prouvé que pour tout (i,j) on a $c_{ij} = \overline{d_{ij}}$, c'est à dire $C = \overline{D}$ (cqfd)

iii) Notons $E = \lambda.A = (e_{ij})$ et $F = \overline{\lambda}.\overline{A} = (f_{ij})$
   - on a $e_{ij} = \lambda.a_{ij}$ et donc $\overline{e_{ij}} = \overline{\lambda.a_{ij}} = \overline{\lambda}.\overline{a_{ij}}$
   - on a aussi $f_{ij} = \overline{\lambda}.\overline{a_{ij}}$
   - on a bien prouvé que pour tout (i,j) on a $\overline{e_{ij}} = f_{ij}$, c'est à dire que $\overline{E} = F$

proposition 7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si λ est une vp complexe non réelle de A alors $\overline{\lambda}$ est aussi une vp de A, et de plus les sep sont conjuguées: $E_{\overline{\lambda}} = \overline{E_\lambda}$

démonstration:

elle repose sur l'équivalence

$$AX = \lambda.X \iff \overline{AX} = \overline{\lambda.X} \iff \overline{A}.\overline{X} = \overline{\lambda}.\overline{X} \iff A.\overline{X} = \overline{\lambda}.\overline{X}$$

(comme A est à coefficients réels, on a $\overline{A} = A$)

9 Rappels sur les systèmes linéaires

9.1 systèmes homogènes

théorème 14: structure et dimension de l'ensemble des solutions

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On note $r = rg(A)$.
L'ensemble des solutions du système linéaire homogène $AX = 0$ est un espace vectoriel de dimension $p - r$.

- *Le système est alors un système de n équations à p inconnues*
- *r s'appelle aussi le* RANG DU SYSTÈME
- *le nombre d'équations n'intervient pas dans la dimension de l'ensemble des solutions: ce qui compte c'est le nombre d'équations indépendantes (càd le rang du système)*
- *L'ensemble des solutions du système $AX = 0$ n'est rien d'autre que le noyau de A.*

démonstration:
Il s'agit simplement d'appliquer le théorème du rang à la matrice A.
On rappelle que l'application linéaire canoniquement associée à A est définie de $\mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$

9.2 systèmes avec second membre

théorème 15: condition de compatibilité

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

- Le système linéaire $AX = B$ est compatible ssi $B \in \mathrm{Im}(A)$
  (càd ssi B est combinaison linéaire des colonnes de A)

- et dans ce cas,
  les solutions du système $AX = B$ sont les $X_0 + Y$, où Y_0 est une solution particulière et Y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé.
  cela revient à dire que LA SOLUTION GÉNÉRALE DU SYSTÈME $AX = B$ EST LA SOMME D'UNE SOLUTION PARTICULIÈRE ET DE LA SOLUTION GÉNÉRALE DU SYSTÈME HOMOGÈNE ASSOCIÉ.

rem: on rappelle qu'un système est dit COMPATIBLE *lorsqu'il possède au moins une solution*

théorème 16: système de Cramer

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

- Le système linéaire carré $AX = B$ possède une unique solution ssi A est inversible,
- et dans ce cas $X = A^{-1}.B$

rem: c'est souvent à l'aide d'un pivot de Gauss que l'on résout un système: le résultat ci-dessus est surtout intéressant d'un point de vue théorique

remarque 4

On retiendra qu'un système linéaire possède

- *ou aucune solution*
- *ou une unique solution*
- *ou une infinité de solutions*

exemple 24: écriture vectorielle, écriture matricielle d'un système

Considérons le système (S) : $\begin{cases} 2x+3y &= 5 \\ x+y &= 4 \end{cases}$. On a $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

- La matrice augmentée du système est $(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$
- (S) s'écrit vectoriellement $x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$
- (S) s'écrit matriciellement $A.X = B$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

exemple 25: un exemple avec un paramètre

On considère le système $\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x+2y+z &= 2 \\ 2x+3y+2z &= a \end{cases}$ avec a paramètre réel.

- La matrice augmentée est $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & a \end{array}\right)$
- Par transformations élémentaires on arrive à la matrice réduite $\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{array}\right)$
- Le système est de rang deux: x et y sont les inconnues principales, z est inconnue secondaire
- La condition de compatibilité est $a - 3 = 0$
  i) si $a \neq 3$ le système est incompatible
  ii) si $a = 3$ le système est compatible et possède une infinité de solutions:

$$(x,y,z) = (-z,1,z) = (0,1,0) + z(-1,0,1) \text{ avec } z \in \mathbb{R}$$

- Interprétation géométrique:
  chaque équation est l'équation d'un plan affine dans l'espace; le système caractérise l'intersection des 3 plans.
  i) si $a \neq 3$ les 3 plans sont deux à deux sécants. Mais ils ne sont pas concourants en un même point
  ii) si $a = 3$ l'intersection des 3 plans est une droite

- *remarque: comme le système est un système carré, et qu'il n'y a pas unicité de la solution (que $a = 3$ ou $a \neq 3$), on peut en déduire alors que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible et que son déterminant vaut zéro!*
- *remarque: si au lieu de travailler avec des transformations élémentaires, on avait calculer $\det(A)$, on aurait évidemment trouver qu'il était nul. On pouvait alors seulement affirmer que le système n'était pas un système de Cramer, càd que son ensemble de solutions était soit vide, soit infini.*