DETERMINANTS

Dans ce polycopié, n désigne un entier supérieur ou égaul à deux.

Table des matières

1 Déterminant d'une matrice carrée

définition 1: définition-théorème

Il existe une unique application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, notée det et appelée DÉTERMINANT, vérifiant les propriétés suivantes:

i) det est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable

ii) det est antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable

iii) $\det I_n = 1$

rem:

- *le point ii) signifie que l'échange de deux colonnes a pour effet de multiplier le déterminant par* -1
- *LE DETERMINANT N'EST PAS UNE APPLICATION LINEAIRE mais une application multi-linéaire*
- *lorsque les coefficients de la matrice sont donnés, on note aussi le déterminant avec des barres verticales*
  exemple: si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, *on note* $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$
- pour $n = 2$ ou $n = 3$ le déterminant n'est rien d'autre que le produit mixte

exemple 1:

Calculer $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Puis, d'une manière générale, calculer le déterminant de la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\forall i \in [\![1,n]\!], a_{i,n+1-i} = 1$ et 0 sinon.

exemple 2:

Vérifier que dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ la formule du déterminant est $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.d - b.c$

On pourra introduire $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

exemple 3:

Simplifier $D = \begin{vmatrix} 2000 & 1 & 4 \\ 5000 & 1 & 8 \\ 7000 & 3 & -4 \end{vmatrix} =$

remarque 1

Si A désigne une matrice carrée de taille $n \times n$, nous noterons $A_1, A_2 \dots A_n$ ses vecteurs colonnes.
On pourra noter $A = (A_1|A_2|\dots|A_n)$ et $\boxed{\det A = \det(A_1|A_2|\dots|A_n)}$

exemple 4:

Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$*, on a* $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *et* $A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

On a ainsi: $\det \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} = \det(2A_1|3A_2) = 2.\det(A_1|3A_2) = 2.3.\det(A_1|A_2) = 6\det(A)$

ce qui s'écrit plutôt $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2.1 & 3.2 \\ 2.3 & 3.4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3.2 \\ 3 & 3.4 \end{vmatrix} = 2.3.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2.3.\det(A)$

Le déterminant est linéaire <u>par rapport à chaque colonne</u>

exemple 5: exemple de développement en utilisant la multilinéarité

Soient A_1,A_2,B_1 et B_2 des matrices unicolonnes à deux coefficients.

$$\begin{aligned} \det(2A_1 + 3A_2|2B_1 - 5B_2) &= 2.\det(A_1|2B_1 - 5B_2) + 3.\det(A_2|2B_1 - 5B_2) \\ &= 2.2.\det(A_1|B_1) - 2.5.\det(A_1|B_2) + 3.2.\det(A_2|B_1) - 3.5.\det(A_2|B_2) \end{aligned}$$

Un peu de dénombrement: si A_1,A_2,A_3,$\dots$,C_3 désignent neuf matrices unicolonnes à 3 coefficients, combien de termes obtient-ton en développant par multilinéarité le déterminant suivant?

$$\det(2A_1 + 3A_2 + A_3,|2B_1 - 5B_2 + 2B_3|C_1 + 4C_2 - 2C_3)$$

méthode 1: quelques règles de calcul

1. Si une colonne de A est nulle alors $\det A = 0$
2. Si deux colonnes de A sont identiques alors $\det A = 0$
3. Pour tout scalaire λ et toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\boxed{\det(\lambda A) = \lambda^n.\det(A)}$
4. Le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit de ses coefficients diagonaux
5. Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux
6. Notons A' la matrice obtenue à partir de A en effectuant une transformation élémentaire.

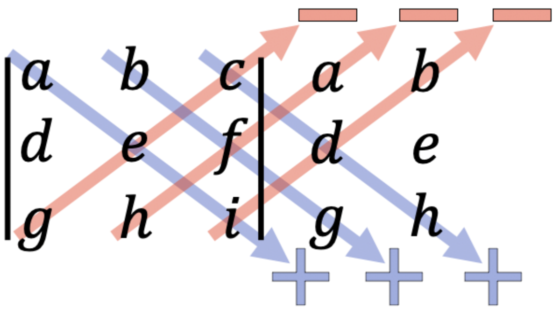
type d'opération élémentaire	**effet sur le déterminant**
$C_i \longleftrightarrow C_j$ avec $i \neq j$	$\det A' = -\det A$
$C_i \longleftarrow \lambda.C_i$ avec $\lambda \neq 0$	$\det A' = \lambda.\det A$
$C_i \longleftarrow C_i + \lambda.C_j$ avec $i \neq j$	$\det A' = \det A$

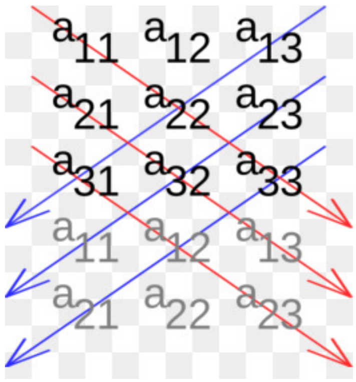
7. Le déterminant d'une matrice n'est pas modifié si à une colonne on ajoute une combinaison linéaire des autres.
8. Attention! La régle dite de Sarrus "ne marche pas" pour les matrices de taille $n \geqslant 4$

exemple 6:

Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ puis $\det(A)$ avec $A = (\min(i,j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$

remarque 2 (***Règle de Sarrus pour les matrices* 3 × 3**)





théorème 1: caractérisation des matrices inversibles à l'aide du déterminant

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\boxed{A \text{ est une matrice inversible ssi } \det A \neq 0} \text{ et dans ce cas } \boxed{\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}}$$

Si on vous demande à quoi sert le déterminant, vous répondez "à caractériser les matrices inversibles"!

théorème 2: deux propriétés utiles

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. On a $\boxed{\det(AB) = \det A. \det B}$ *et donc on a en particulier* $\det(AB) = \det(BA)$
2. On a $\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ \det(A^p) = (\det A)^p}$
3. On a $\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \det(\lambda.A) = \lambda^n. \det(A)}$
4. On a $\boxed{\det A = \det(A^T)}$

théorème 3:

Deux matrices semblables ont le même déterminant

méthode 2: mêmes règles de calcul vis-à-vis des lignes!

1. Le déterminant est linéaire par rapport à chacune des lignes
2. Notons A' la matrice obtenue à partir de A en effectuant une transformation élémentaire.

type d'opération élémentaire	**effet sur le déterminant**
$L_i \longleftrightarrow L_j$ avec $i \neq j$	$\det A' = -\det A$
$L_i \longleftarrow \lambda.L_i$ avec $\lambda \neq 0$	$\det A' = \lambda. \det A$
$L_i \longleftarrow L_i + \lambda.L_j$ avec $i \neq j$	$\det A' = \det A$

théorème 4: développement par rapport à une ligne ou une colonne (admis)

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Formule de développement par rapport à la j-ème colonne:

$$\boxed{\det A = \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}}$$

2. Formule de développement par rapport à la i-ème ligne:

$$\boxed{\det A = \sum_{j=1}^{j=n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}}$$

où Δ_{ij} est le déterminant de la matrice obtenue à partir de A en supprimant la $i-$ème ligne et la $j-$ème colonne.

exemple 7: compléter les trous

- $\begin{vmatrix} a & 0 & b & c \\ 0 & d & e & f \\ g & h & i & j \\ 0 & 0 & k & l \end{vmatrix} = d.$
- $\begin{vmatrix} a & 0 & b & c \\ 0 & d & e & f \\ g & h & i & j \\ 0 & 0 & k & l \end{vmatrix} = k.$

exemple 8:

Calculer $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 10^{100} & 0 \\ 1 & 1 & 3^{50} & 1 \\ 2 & 4 & 5^{45} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ et $B = \begin{vmatrix} 8000 & 5000 & 3000 \\ 200 & 100 & 300 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

exemple 9: matrice antisymétrique d'ordre impair

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice antisymétrique avec n entier impair.
Montrer que A n'est pas une matrice inversible.

exemple 10:

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\det(A^5) = 1$. Que dire de $\det(A)$?

exemple 11:

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\det A = 0$ et $\det B = 1$

1. Existe-t-il une matrice carrée X telle que $BX = A$?
2. Existe-t-il une matrice carrée X telle que $AX = B$?

définition 2: polynôme caractéristique d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme caractéristique de la matrice A le déterminant de la matrice $X.I_n - A$. On le note χ_A. On a donc $\boxed{\chi_A(X) = \det(X.I_n - A)}$

2 Déterminant d'une famille de vecteurs

Dans ce paragraphe, E désignera un $\mathbb{K}-$ev de dimension finie $n \geqslant 2$.

définition 3:

Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{F} = (\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_n})$ une famille de n vecteurs de E.
On appelle DÉTERMINANT DE LA FAMILLE DE VECTEURS $\mathcal{F}$ DANS LA BASE $\mathcal{B}$,
et on note $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_n})$, le déterminant de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_n})$.

$$\boxed{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_n}) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_n})) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}))}$$

rem: on a en particulier $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$

exemple 12:

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B} = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base quelconque de E.
On considère la famille de vecteurs $\mathcal{F} = (\vec{i} + 2\vec{j}, 2\vec{j} + \vec{k}, \vec{k})$.
Calculer le déterminant de cette famille de vecteurs dans la base $\mathcal{B}$ puis dans la base $\mathcal{B}' = (\vec{k}, 2\vec{j}, \vec{i})$

remarque 3

LE DÉTERMINANT D'UNE FAMILLE DE VECTEURS $\mathcal{F}$ SE CALCULE TOUJOURS **relativement à une base donnée:**
SI ON CHANGE CETTE BASE, LA MÊME FAMILLE DE VECTEURS $\mathcal{F}$ AURA UN DÉTERMINANT DIFFÉRENT.
Cependant le théorème ci-dessous indique que si la famille $\mathcal{F}$ a un déterminant nul dans une base donnée alors elle aura un détermiannt nul dans n'importe quelle autre base! (remarquable non?)

théorème 5: caractérisation des bases

Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{F} = (\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_n})$ une famille de n vecteurs de E.
On a l'équivalence entre:

i) $(\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_n})$ est une base de E.

ii) $\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_n}) \neq 0$

<u>ce qui est remarquable dans le théorème ci-dessus, c'est que la nullité du déterminant d'une famille de vecteurs ne dépend pas de la base dans laquelle le déterminant est calculé</u>
Si on vous demande à quoi sert le déterminant d'une famille de vecteurs, vous répondez "à caractériser les bases"!

démonstration:
On a les équivalences suivantes:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} \text{ est une base de } E &\Longleftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \text{ est une matrice inversible}\\ &\Longleftrightarrow \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})) \neq 0\\ &\Longleftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0\end{aligned}$$

exemple 13:

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension deux, et $(\vec{i},\vec{j})$ une base quelconque de E.
Soit a un réel quelconque. Considérons les vecteurs $\vec{v}_1 = a.\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v}_2 = (a-1)\vec{i} + (2a+1)\vec{j}$.
Nous allons montrer que $(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$ est toujours une base de E.

- *On commence par écrire la matrice de la famille de vecteurs $(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{i},\vec{j})$.*
  On trouve $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{v}_1,\vec{v}_2) = \begin{pmatrix} a & a-1 \\ 1 & 2a+1 \end{pmatrix}$
- *On calcule le déterminant de cette matrice, on trouve $2a^2+1$. Comme ce déterminant n'est jamais, nul d'après le théorème précédent, on peut affirmer que $(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$ est une base de E*
- *A noter que si le corps avait été $\mathbb{C}$ la famille $(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$ n'aurait pas toujours été une base!*

exemple 14:

On note $E = \mathbb{R}_3[X]$.
Soit a un réel.
On considère la famille de polynôme $\mathcal{F} = (X^3 + X^2 + X + 1, aX^2 + X + 1, 2X^2 + 2X + a, X + 1)$

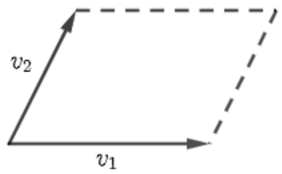
1. Ecrire la matrice de $\mathcal{F}$ dans la base canonique de E.
2. Donner une cns sur a pour que $\mathcal{F}$ soit une base de E

remarque 4 (***interprétation géométrique dans le plan***)

Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire, et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$

- $\det_{\mathcal{B}}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ *est égal à l'aire algébrique du parallélogramme construit sur $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.*
- *ce déterminant n'est rien d'autre que le produit mixte vu en première année:*

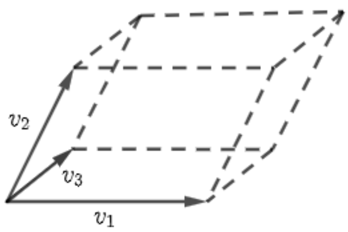
$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = [\vec{v}_1, \vec{v}_2] = ||\vec{v}_1||.||\vec{v}_2||.\sin(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$$



remarque 5 (***interprétation géométrique dans l'espace***)

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire, et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

- $\det_{\mathcal{B}}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ *est égal au volume algébrique du parallélépipède construit sur $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$.*



- *ce déterminant n'est rien d'autre que le produit mixte vu en première année:*
$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2).\vec{v}_3$$
- *En développant par rapport à la troisième colonne le déterminant on aboutit à la formule ci-dessus.*

remarque 6 (***équation de droites ou de plans en géométrie***)

- En géométrie plane, *la* colinéarité *de deux vecteurs est caractérisée par le déterminant.*
- En géométrie dans l'espace, *la* coplanarité *de 3 vecteurs est caractérisées par le déterminant.*

3 Déterminant d'un endomorphisme

Dans ce paragraphe, E désignera un $\mathbb{K}-$ev de dimension finie $n \geqslant 2$, et u un endomorphisme de E.

définition 4: définition-théorème

On appelle DÉTERMINANT DE L'ENDOMORPHISME u le déterminant commun à toutes les matrices associées à u. On le note $\det u$

méthode 3: calculer le determinant d'un endomorphisme

On commence par écrire une matrice associée à l'endomorphisme puis on calcule le déterminant de cette matrice.

Exemple:

On considère $\boxed{\begin{array}{rcl} u : \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \longmapsto & (X+1)P'(X)+P(X) \end{array}}$

- *On écrit une matrice associée à u: par exemple* $\text{Mat}_{(1,X,X^2)}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
- *On a donc* $\det u = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$

exemple 15:

Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $\boxed{\begin{array}{rcl} u : \quad E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & (7x-6y, 9x-8y) \end{array}}$

On note $\mathcal{B} = (\vec{i},\vec{j})$ la base canonique de E, et $\mathcal{B}' = (\vec{i}+\vec{j}, 2\vec{i}+3\vec{j})$ une autre base.

1. Ecrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ puis celle dans la base $\mathcal{B}'$
2. Calculer le déterminant de ces deux matrices

proposition 1 (***proposition faisant le lien entre les différentes notions de déterminants***)

Pour toute base $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ *de* E*, on a*

$$\boxed{\det(u) = \det(Mat_{\mathcal{B}}(u)) = \det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B})) = \det_{\mathcal{B}}(u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_n))}$$

exemple 16: déterminant des endomorphismes usuels

E étant un espace vectoriel de dimension n, montrer

i) le déterminant de l'endomorphisme identité vaut 1 . $\boxed{\det(id) = 1}$

ii) le déterminant de l'homothétie de rapport λ vaut λ^n. $\boxed{\det(\lambda id) = \lambda^n}$

iii) le déterminant d'un projecteur est nul

iv) le déterminant d'une symétrie vectorielle vaut ± 1

En effet, soit u une symétrie vectorielle. On a donc $u \circ u = id$.
D'où $\det(u \circ u) = 1$*, or* $\det(u \circ u) = (\det u)^2$*. Ainsi,* $(\det u)^2 = 1$*. cqfd!*
D'une manière plus générale, on sait que si u est la symétrie vectorielle par rapport à F_1 et parallèlement à F_2 alors $\boxed{\det(u) = (-1)^{\dim F_2}}$

théorème 6:

Soient u et v deux endomorphismes de E, et $\lambda \in \mathbb{K}$. (on rappelle que $\dim E = n$)

i) $\boxed{\det(u \circ v) = \det(u) \times \det(v)}$

ii) $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \det(u^p) = (\det u)^p}$

iii) $\boxed{\det(\lambda u) = \lambda^n \det u}$

théorème 7: Caractérisation des automorphismes

Soit u un endomorphisme de E. Alors, on a :

i) u est bijectif $\Longleftrightarrow \det(u) \neq 0$

ii) et dans ce cas, $\boxed{\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det(u)}}$

Si on vous demande à quoi sert le déterminant, vous répondez "à caractériser les endomorphismes bijectifs"!

remarque 7

le déterminant est un outil parfois efficace et rapide pour déterminer si un endomorphisme (d'un espace vectoriel de dimension finie...) est bijectif ou pas. Cependant, montrer que le noyau est réduit au vecteur nul est le plus souvent ce qui permet de conclure rapidement si un tel endomorphisme est bijectif ou pas(via un théorème classique).

définition 5: polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle polynôme caractéristique de l'endormorphisme f le déterminant de l'endomorphisme $Xid_E - f$. On le note χ_f. On a donc $\boxed{\chi_f(X) = \det(Xid_E - f)}$

4 Orientation d'un espace vectoriel

- Orienter un espace c'est privilégier une base $\mathcal{B}_0$ de cet espace et la déclarer comme directe.
- On dira ensuite qu'une autre base $\mathcal{B}$ est directe [resp. indirecte] lorsque la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}$ a un déterminant positif [resp. négatif]
- Orienter une droite vectorielle revient donc à choisir un vecteur directeur de cette droite
- Pour $E = \mathbb{R}^2$, on a décidé que la base canonique $\mathcal{B}_0 = (\vec{i},\vec{j}) = ((1,0),(0,1))$ était directe
- Pour $E = \mathbb{R}^3$, on a décidé que la base canonique $\mathcal{B}_0 = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ était directe