Projecteurs & Symétries vectorielles

Table des matières

définition 1: vecteurs invariants/anti-invariants

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E.

i) On dit le vecteur $\vec{x}$ est un VECTEUR INVARIANT de f lorsque $f(\vec{x}) = \vec{x}$

ii) On dit le vecteur $\vec{x}$ est un VECTEUR ANTI-INVARIANT de f lorsque $f(\vec{x}) = -\vec{x}$

- L'ensemble des vecteurs invariants par f est $\{\vec{x} \in E \,|\, f(\vec{x}) - \vec{x} = \vec{0}\} = \ker(f - id_E)$
- L'ensemble des vecteurs anti-invariants par f est $\{\vec{x} \in E \,|\, f(\vec{x}) + \vec{x} = \vec{0}\} = \ker(f + id_E)$

En effet, on a les équivalences

$$\vec{x} \text{ vecteur invariant} \iff f(\vec{x}) = \vec{x} \iff f(\vec{x}) - \vec{x} = \vec{0}_E \iff (f_i d_E)(\vec{x}) = \vec{0}_E \iff \vec{x} \in \ker(f - id_E)$$

$$\vec{x} \text{ vecteur anti-invariant} \iff f(\vec{x}) = -\vec{x} \iff f(\vec{x}) + \vec{x} = \vec{0}_E \iff (f + id_E)(\vec{x}) = \vec{0}_E \iff \vec{x} \in \ker(f + id_E)$$

1 Homothéties

définition 2:

Soit $k \in \mathbb{K}$.

On appelle HOMOTHÉTIE DE RAPPORT k l'application linéaire $k.id_E$.

On la note souvent h_k

proposition 1 (*les vérifications sont triviales*)

L'ensemble des homothéties est :

i. stable par la loi de composition

ii. stable par addition et multiplication externe par un scalaire

démonstration 1

Soient k_1 et k_2 deux scalaires.

- $(k_1.id_E) \circ (k_2.id_E) = (k_1.k_2).id_E$
- $k_1.id_E + k_2.id_E = (k_1 + k_2).id_E$
- $k_1.(k_2.id_E) = (k_1.k_2).id_E$

théorème 1: Seules les homoth'eties ont cette propriété!

Dans toute base B de E, la matrice de l'homothétie $k.id_E$ est $\mathrm{Mat}_B(k.id_E) = k.I_n = \begin{pmatrix} k & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & k \end{pmatrix}$

rem: on montrera également en exercice que les seuls endomorphismes de E qui commutent avec tout endomorphisme de E sont les homothéties.

exemple 1: très classique

Soit f un endomorphisme de E.
Si pour tout $\vec{x} \in E$, $(\vec{x}, f(\vec{x}))$ est une famille liée alors f est une homothétie.
Autrement dit

$$\forall \vec{x} \in E, \exists \lambda \in \mathbb{K}, f(\vec{x}) = \lambda.\vec{x} \Longrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{x} \in E, f(\vec{x}) = \lambda.\vec{x}$$

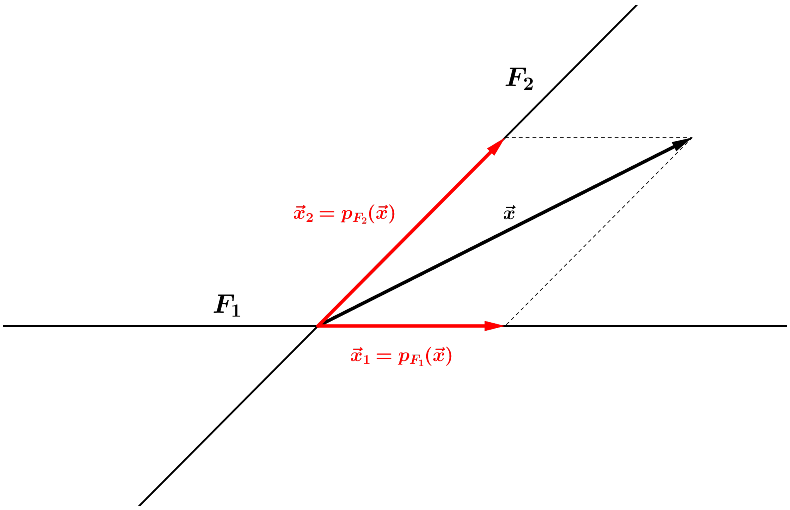
2 Projections associées à une somme directe de 2 sev

définition 3: projection

Soit $E = F_1 \oplus F_2$
La projection vectorielle sur F_1 parallèlement à F_2 est l'endomorphisme de E, noté p_{F_1}, défini par

$$\boxed{\begin{array}{rcl} p_{F_1} : E = F_1 \oplus F_2 & \longrightarrow & E \\ \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 & \longmapsto & p_{F_1}(\vec{x}) = \vec{x}_1 \end{array}}$$

- *Rappel: $E = F_1 \oplus F_2$ signifie que $\forall \vec{x} \in E, \exists! (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in F_1 \times F_2, \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$*
- *"$p_{F_1}(\vec{x})$ est l'unique vecteur de F_1 tel que $\vec{x} - p_{F_1}(\vec{x}) \in F_2$"*
- l'endomorphisme $id_E - p_{F_1}$ n'est rien autre que la projection sur F_2 parallèlement à F_1 : il se note p_{F_2} et s'appelle le projecteur associé à p_{F_1}
- *p_{F_1} est l'application qui à tout vecteur associe sa composante sur F_1 lorsque l'on considère la dècomposition $F_1 \oplus F_2 = E$*



remarque 1 (*à propos des projecteurs associés*)

On a $p_{F_1} + p_{F_2} = id_E$ et $p_{F_1} \circ p_{F_2} = p_{F_2} \circ p_{F_2} = 0$

❶	$E=\mathbb{R}^2$	$F_1=\{(x,0)\|x\in\mathbb{R}\}$	$F_2=\{(0,y)\|y\in\mathbb{R}\}$	$(x,y)=\underbrace{(x,0)}_{\in F_1}+\underbrace{(0,y)}_{\in F_2}$
❷	$E=\mathbb{R}^2$	$F_1=\mathrm{vect}((1,-1))$	$F_2=\mathrm{vect}((1,0))$	$(x,y)=\underbrace{(-y,y)}_{\in F_1}+\underbrace{(x+y,0)}_{\in F_2}$
❸	$E=\mathbb{R}^3$	$F_1=\{(x,y,0)\|(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$	$F_2=\{(0,0,z)\|z\in\mathbb{R}\}$	$(x,y,z)=\underbrace{(x,y,0)}_{\in F_1}+\underbrace{(0,0,z)}_{\in F_2}$
❹	$E=\mathbb{R}_2[X]$	$F_1=\mathrm{vect}(X+1)$	$F_2=\mathrm{vect}(X^2,X)$	$aX^2+bX+c=\underbrace{c.(X+1)}_{\in F_1}+\underbrace{aX^2+(b-c)X}_{F_2}$

❶	$p_{F_1}:\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & (x,0)\end{array}$	$p_{F_2}:\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & (0,y)\end{array}$
❷	$p_{F_1}:\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & (-y,y)\end{array}$	$p_{F_2}:\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,0)\end{array}$
❸	$p_{F_1}:\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x,y,0)\end{array}$	$p_{F_2}:\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ (x,y,z) & \longmapsto & (0,0,z)\end{array}$
❹	$p_{F_1}:\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ aX^2+bX+c & \longmapsto & c.(X+1)\end{array}$	$p_{F_2}:\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ aX^2+bX+c & \longmapsto & aX^2+(b-c)X\end{array}$

définition 4: projecteur

Soit p un endomorphisme de E.
On dit que p est UN PROJECTEUR DE E lorsque $p\circ p=p$ (càd $p^2=p$)

théorème 2: noyau et image d'une projection

Soit p_{F_1} la projection sur F_1 parallèlement à F_2 (notations de la définition 3), on a :

i.) $\ker p_{F_1}=F_2$
ii.) $\mathrm{Im}\, p_{F_1}=F_1=\ker(p_{F_1}-id_E)$
iii.) p_{F_1} est un projecteur, càd $p_{F_1}^2=p_{F_1}$

- *"le noyau est l'espace parallèlement auquel on projette"*
- *"l'ensemble image est l'espace sur lequel on projette, c' est aussi l'ensemble des* VECTEURS INVARIANTS *par* p_{F_1}*"*

théorème 3: un projecteur est une projection

Soit p un projecteur de E.(càd p est un endomorphisme de E vérifiant $p \circ p = p$)
On a alors :

i) $\operatorname{Im} p \oplus \ker p = E$

ii) $\operatorname{Im} p = \ker(p - id)$

iii) p est LA projection sur $\operatorname{Im} p = \ker(p - id) = E_1(p)$ parallèlement à $\ker p = E_0(p)$

rem: on prouve dans la démonstration que

$$\forall \vec{x} \in E, \vec{x} = \underbrace{p(\vec{x})}_{\in \operatorname{Im}(p)} + \underbrace{(\vec{x} - p(\vec{x}))}_{\in \ker(p)}$$

remarque 2

Bref, projecteur et projection c'est la même chose; et on projette sur l'image parallèlement au noyau

remarque 3 (*éléments propres d'un projecteur(lien avec la rèduction)*)

- *les valeurs propres d'un projecteur sont* 0 *et* 1
- $E_0(p_{F_1}) = \ker(p_{F_1})$ *est l'espace parallèlement auquel on projette*
- $E_1(p_{F_1}) = \operatorname{Im}(p_{F_1}) = \ker(p_{F_1} - id_E)$ *est l'espace sur lequel on projette*
- *Si E est de dimension finie, un projecteur de E est toujours diagonalisable*

théorème 4: caractérisation matricielle d'un projecteur

Soit f un endomorphisme de E, avec $\dim E = n < \infty$.
Il y a équivalence entre :

i.) f est un projecteur

ii.) il existe une base $\mathcal{B}$ de E pour laquelle on a :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = diag(\underbrace{1, \ldots, 1}_{r}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-r})$$

et dans ce cas, on a alors $\boxed{\operatorname{tr} f = \operatorname{rg} f = r = \dim \ker(f - id_E)}$

A retenir: un endomorphisme est un projecteur ssi on peut lui associer une matrice diagonale avec des 0 et des 1 sur la diagonale

démonstration 2

Soit E un ev de dimension finie n et f un endomorphisme de E.

- *Montrons que $i) \Rightarrow ii)$*
  On suppose que f est un projecteur.
  On sait alors que $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ sont supplémentaires dans E, et que f est la projection sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\ker f$.
  Considérons une base de E adaptée à la décomposition $\operatorname{Im} f \oplus \ker f$, c'est à dire obtenue par la concaténation d'une base de $\operatorname{Im} f$ et d'un base de $\ker f$.
  Comme les vecteur de $\operatorname{Im} f$ sont des vecteurs invariants par f, on a bien la matrice de la projection dans cette base qui est $diag(\underbrace{1, \ldots, 1}_{r}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-r})$ avec $r = \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} f$

- *Montrons que $ii) \Rightarrow i)$*
  On suppose qu'il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = diag(\underbrace{1, \ldots, 1}_{r}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-r})$

  On a alors

  $$Mat_{\mathcal{B}}(f^2) = (Mat_{\mathcal{B}}(f))^2 = (diag(\underbrace{1, \ldots, 1}_{r}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-r}))^2 = diag(\underbrace{1^2, \ldots, 1^2}_{r}, \underbrace{0^2, \ldots, 0^2}_{n-r}) = diag(\underbrace{1, \ldots, 1}_{r}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-r})$$

  On trouve que $Mat_{\mathcal{B}}(f^2) = Mat_{\mathcal{B}}(f)$, ce qui permet d'affirmer que $f^2 = f$!

remarque 4 (*cas d'un espace euclidien où F_1 et F_2 sont orthogonaux*)

Lorsque F_1 et F_2 sont orthogonaux, on a des formules assez simples pour connaître l'expression du projetè orthogonal

- *Si F_1 est une droite vectorielle dirigèe par le vecteur e_1.*

$$\forall x \in E, p_{F_1}(x) = \frac{< x,e_1 >}{||e_1||^2}.e_1$$

- *Si F_1 est un plan vectoriel dont (e_1,e_2) est* **une base orthogonale.**

$$\forall x \in E, p_{F_1}(x) = \frac{< x,e_1 >}{||e_1||^2}.e_1 + \frac{< x,e_2 >}{||e_2||^2}.e_2$$

exemple 2: Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire usuel

Donner l'expression analytique de la projection orthogonale sur la droite F_1 dirigèe par le vecteur $(3,4)$

Soit $\vec{x} = (x,y)$ et notons $\vec{d} = (3,4)$

D'après la formule précédente, on a

$$p_{F_1}(\vec{x}) = \frac{< \vec{x},\vec{d} >}{||\vec{d}||^2}.\vec{d} = \frac{3x+4y}{5}.\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

3 Symétries vectorielles

définition 5: automorphisme involutif

Soit f un endomorphisme de E.

On dit que f est UN AUTOMORPHISME INVOLUTIF DE E lorsque $f \circ f = id_E$

un automorphisme involutif est donc un automorphisme de E (endomorphisme bijectif) qui est égal à son propre inverse, càd $f^{-1} = f$

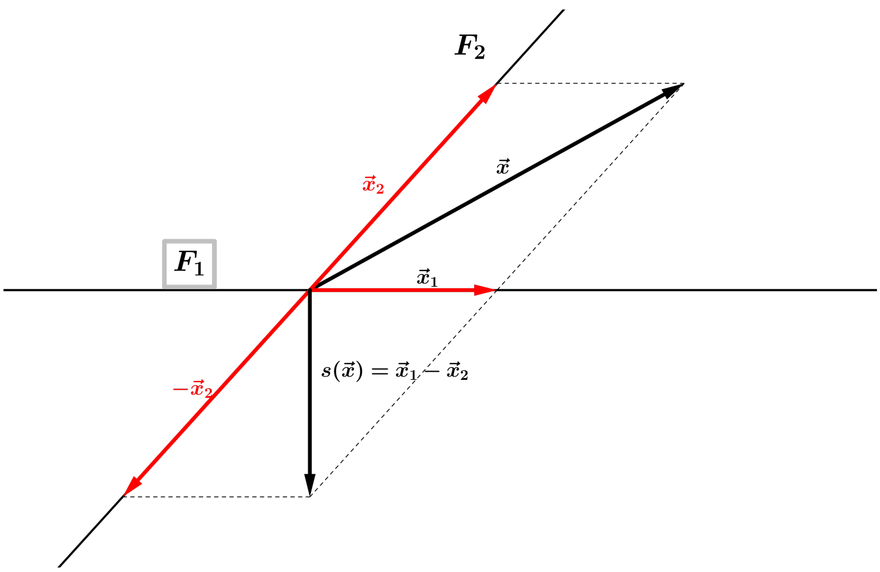
définition 6: symétrie vectorielle

Soit $E = F_1 \oplus F_2$

LA SYMÉTRIE VECTORIELLE PAR RAPPORT À F_1 PARALLÈLEMENT À F_2 est l'endomorphisme de E, noté s, défini par

$$\boxed{\begin{array}{rcl} s : E = F_1 \oplus F_2 & \longrightarrow & E \\ \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 & \longmapsto & s(\vec{x}) = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \end{array}}$$

- *Rappel: $E = F_1 \oplus F_2$ signifie que $\forall \vec{x} \in E\,, \exists!\,(\vec{x}_1,\vec{x}_2) \in F_1 \times F_2\,, \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$*



❶	$E=\mathbb{R}^2$	$(x,y)=\underbrace{(x,0)}_{\in F_1}+\underbrace{(0,y)}_{\in F_2}$	$s: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & (x,-y) \end{array}$
❷	$E=\mathbb{R}^2$	$(x,y)=\underbrace{(-y,y)}_{\in F_1}+\underbrace{(x+y,0)}_{\in F_2}$	$s: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & (-x-2y,y) \end{array}$
❸	$E=\mathbb{R}^3$	$(x,y,z)=\underbrace{(x,y,0)}_{\in F_1}+\underbrace{(0,0,z)}_{\in F_2}$	$s: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x,y,-z) \end{array}$
❹	$E=\mathbb{R}_2[X]$	$aX^2+bX+c=\underbrace{c.(X+1)}_{\in F_1}+\underbrace{aX^2+(b-c)X}_{F_2}$	$s: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ aX^2+bX+c & \longmapsto & -aX^2+(2c-b)X+c \end{array}$

théorème 5: propriétés d'une symétrie vectorielle

Soit s la symétrie vectorielle par rapport à F_1 parallèlement à F_2(notations de la déf. 6), on a :

i.) $\ker s=\{\vec{0}\}$

ii.) $\operatorname{Im} s=E$

iii.) $s\circ s=id_E$

iv.) F_1 est l'ensemble des VECTEURS INVARIANTS par s

v.) F_2 est l'ensemble des VECTEURS ANTI-INVARIANTS par s

remarque 5 (*lien entre projection et symétrie*)

On a $\boxed{s=2.p_{F_1}-id_E}$

en effet, pour tout $x\in E$ on a

$$s(\vec{x})=\vec{x}_1-\vec{x}_2=2\vec{x}_1-(\vec{x}_1+\vec{x}_2)=2p_{F_1}(\vec{x})-\vec{x}=(2p_{F_1}-id_E)(x)$$

remarque 6 (*cas des symètries orthogonales dans un espace euclidien*)

Lorsque F_1 et F_2 sont orthogonaux, on parle de symètrie orthogonale par rapport à F_1 .
Il existe alors des formules plus simples pour ècrire l'expression analytique du symétrique orthogonal grâce aux produits scalaires

théorème 6: un automorphisme involutif est une symétrie vectorielle

Soit f est un automorphisme involutif de E.(càd f est un endomorphisme de E tel que $f\circ f=id_E$)

On a alors:

i) $\ker(f-id_E)\oplus\ker(f+id_E)=E$

ii) f est LA symétrie vectorielle par rapport à $\ker(f-id_E)=E_1(f)$ parallèlement à $\ker(f+id_E)=E_{-1}(f)$

rem:

- *L'espace des vecteurs invariants et l'espace des vecteurs anti-invariants sont supplèmentaires dans E*
- *Dans la démonstration on montre que*

$$\forall\vec{x}\in E,\ \vec{x}=\underbrace{\frac{\vec{x}+f(\vec{x})}{2}}_{\in E_1(f)}+\underbrace{\frac{\vec{x}-f(\vec{x})}{2}}_{\in E_{-1}(f)}$$

remarque 7

Bref, on a montré que automorphisme involutif et symétrie vectorielle, c'est la même chose…

remarque 8 (*éléments propres d'une symétrie vectorielle s, (lien avec la rèduction)*)

- *les valeurs propres d'une symétrie sont* -1 *et* 1
- $E_1(s)$ *est l'espace par rapport auquel on effectue la symétrie*
- $E_{-1}(s)$ *est l'espace parallèlement auquel on effectue la symétrie*
- *Si* E *est de dimension finie, une symétrie est toujours diagonalisable*

théorème 7: caractérisation matricielle d'une symétrie vectorielle

Soit f un endomorphisme de E, avec $\dim E = n < \infty$.
Il y a équivalence entre :

i.) f est une symétrie vectorielle

ii.) il existe une base $\mathcal{B}$ de E pour laquelle on a : $\text{Mat}_{\mathcal{B}} f = diag(\underbrace{1,\dots,1}_{p}, \underbrace{-1,\dots,-1}_{n-p})$

et dans ce cas on a alors : $\text{tr}\, f = \dim E_1 - \dim E_{-1}$ avec $p = \dim \ker(f - id_E)$
un endomorphisme est une symétrie vectorielle ssi on peut lui associer une matrice diagonale avec des 1 et des -1 sur la diagonale

---

Tableaux récapitulatifs

	projecteur	**automorphisme involutif**
définition	$p \circ p = p$	$s \circ s = id_E$
	$E = \ker(p - id_E) \oplus \ker(p)$	$E = \ker(s - id_E) \oplus \ker(s + id_E)$
valeurs propres	$0, 1$	$-1, 1$
	projection sur $\ker(p - id_E)$ parallèlement à $\ker(p)$	symétrie par rapport à $\ker(s - id_E)$ parallèlement à $\ker(s + id_E)$
	$\text{Im}(p) = \ker(p - id_E)$	$\text{Im}(s) = E$
matrice réduite	$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$

	projection sur F_1 parallélement à F_2	**symétrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2**
définition	$\begin{array}{rcl} p_{F_1} : E = F_1 \oplus F_2 & \longrightarrow & E \\ \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 & \longmapsto & p_{F_1}(\vec{x}) = \vec{x}_1 \end{array}$	$\begin{array}{rcl} s : E = F_1 \oplus F_2 & \longrightarrow & E \\ \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 & \longmapsto & s(\vec{x}) = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \end{array}$
	$F_1 = \ker(p - id_E) = E_1(p)$ $F_2 = \ker(p) = E_0(p)$	$F_1 = \ker(s - id_E) = E_1(s)$ $F_2 = \ker(s + id_E) = E_{-1}(s)$
valeurs propres	$0, 1$	$-1, 1$

démonstration 3 (*bel exemple de raisonnement par analyse synthèse*)

Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 = f \circ f = id_E$
Nous noterons plus simplement $E_1 = \ker(f - id_E) = \{\vec{x} \in E | f(\vec{x}) = \vec{x}\}$ (ENS. DES VECTEURS INVARIANTS)
et $E_{-1} = \ker(f + id_E) = \{\vec{x} \in E | f(\vec{x}) = -\vec{x}\}$ (ENS. DES VECTEURS ANTI-INVARIANTS)

1. *Montrons que $\ker(f - id_E) \oplus \ker(f + id_E) = E$*

   - ***Partie Analyse:***
     Soit $\vec{x}$ un vecteur fixé quelconque de E
     On suppose qu'il existe $(\vec{x}_1,\vec{x}_2) \in E_1 \times E_{-1}$ tel que $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ (1)
     On a alors $f(\vec{x}) = f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2) = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ (2)
     En faisant (1)+(2) on trouve que $\vec{x}_1 = \dfrac{\vec{x} + f(\vec{x})}{2}$
     et en considérant (1)-(2) on trouve que $\vec{x}_1 = \dfrac{\vec{x} - f(\vec{x})}{2}$
     *On vient de prouver que: **SI** la décomposition du vecteur $\vec{x}$ existe comme somme d'un vecteur de E_1 et d'un vecteur de E_{-1} **ALORS** cette décomposition est unique et que l'on a forcément $(\vec{x}_1,\vec{x}_2) = \left(\dfrac{\vec{x} + f(\vec{x})}{2},\dfrac{\vec{x} - f(\vec{x})}{2}\right)$*
     (REMARQUONS QU'À CE NIVEAU NOUS N'AVONS PAS UTILISÉ L'HYPOTHÈSE $f^2 = id_E$ ET L'ON A PAS PROUVÉ QUE LA DÉCOMPOSITION EXISTAIT!)

   - ***Partie Synthèse:***
     CETTE PARTIE CONSISTE À VÉRIFIER QUE LES CONDITIONS NÉCESSAIRES TROUVÉES CI-DESSUS SONT ÉGALEMENT SUFFISANTES.
     Soit $\vec{x}$ un vecteur fixé quelconque de E
     On note $\vec{x}_1 = \dfrac{\vec{x} + f(\vec{x})}{2}$ et $\vec{x}_2 = \dfrac{\vec{x} - f(\vec{x})}{2}$
     i) on a $\vec{x}_1 \in E_1$. En effet $f(\vec{x}_1) = f(\dfrac{\vec{x} + f(\vec{x})}{2}) = \dfrac{f(\vec{x}) + f^2(\vec{x})}{2}$.
     Or $f^2 = id_E$ donc $\dfrac{f(\vec{x}) + f^2(\vec{x})}{2} = \dfrac{f(\vec{x}) + \vec{x}}{2} = \vec{x}_1$
     ii) on a $\vec{x}_2 \in E_{-1}$. En effet, $f(\vec{x}_2) = f(\dfrac{\vec{x} - f(\vec{x})}{2}) = \dfrac{f(\vec{x}) - f^2(\vec{x})}{2} = \dfrac{f(\vec{x}) - \vec{x}}{2} = -\vec{x}_2$
     iii) on a $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \dfrac{\vec{x} + f(\vec{x})}{2} + \dfrac{\vec{x} - f(\vec{x})}{2} = \vec{x}$
     Ceci prouve que pour tout vecteur $\vec{x} \in E$ il existe (un unique) couple $(\vec{x}_1,\vec{x}_2) \in E_1 \times E_{-1}$ tel que $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ (cqfd!)
   - *L'unicité, si la première partie analyse est bien rédigée, est prouvée dans cette dite partie.*
     On peut aussi montrer que $E_1 \cap E_{-1} = \{\vec{0}\}$ (ce n'est pas très compliqué)

2. *Maintenant que l'on sait que E_1 et E_{-1} sont supplémentaires dans E, on peut considérer la symétrie vectorielle par rapport à E_1 parallèlement à E_{-1}, notons s cette symétrie.*
   - *On a donc $\forall \vec{x} \in E, \exists!(\vec{x}_1,\vec{x}_2) \in E_1 \times E_{-1}, \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ et alors $s(\vec{x}) = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$*
   - *ainsi $\forall \vec{x} \in E, s(\vec{x}) = \dfrac{\vec{x} + f(\vec{x})}{2} - \dfrac{\vec{x} - f(\vec{x})}{2} = f(\vec{x})$.*

   On vient de prouver que $\forall \vec{x} \in E, f(\vec{x}) = s(\vec{x})$, c'est à dire que $f = s$.
   $\boxed{f \text{ est donc bien la symétrie vectorielle par rapport à } E_1 \text{ parallèlement à } E_{-1}}$

définition 7: sous-espace propre, notation $E_\lambda(f)$

Soit f un endomorphisme de E et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre.
On appelle SOUS-ESPACE PROPRE DE f ASSOCIÉ À λ, et on note $E_\lambda(f)$ le sev suivant

$$E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda.id_E) = \{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) - \lambda.\vec{x} = \vec{0}\} = \{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) = \lambda.\vec{x}\}$$

rem: on bien sûr aussi $E_\lambda(f) = \ker(\lambda.id_E - f)$