Révisions de 1ère année:
Matrices

Serge Lemarquis

Table des matières

$\mathbb{K}$ désignera comme toujours le corps des scalaires $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

définition 1: matrice d'un vecteur

Soit E un $\mathbb{K}-$ev de dimension n et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une base de E.

Soit $\vec{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i.\vec{e_i}$ un vecteur de E.

On appelle MATRICE DU VECTEUR $\vec{x}$ DANS LA BASE $\mathcal{B}$ la matrice unicolonne $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

remarque 1

- *La matrice d'un vecteur est unicolonne*
- *La matrice d'un endomorphisme est carrÃ©e*
- *La matrice d'une application linÃ©aire est rectangulaire*

1 Définitions

1.1 Notion de matrice

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

- On appelle matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$ toute famille de $n \times p$ éléments de $\mathbb{K}$. On utilise deux indices pour décrire une matrice.$(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$
- On représente une matrice en tableau $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$ où le coefficient a_{ij} se trouve à l'intersection de la ligne numéro i et de la colonne numéro j.
- On désigne une matrice à l'aide d'une lettre généralement majuscule : par exemple $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$
- On appelle I-ÈME VECTEUR LIGNE DE LA MATRICE A le vecteur de $\mathbb{K}^p$ suivant $L_i = (a_{i1},a_{i2},\dots,a_{ip}) \in \mathbb{K}^p$.
- On appelle J-ÈME VECTEUR COLONNE DE LA MATRICE A le vecteur de $\mathbb{K}^n$ suivant $C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$.
- Ainsi, il existe n vecteurs lignes et p vecteurs colonnes pour la matrice A précédente

$$\begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ \\ L_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & \dots & C_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$

- Une matrice qui possède une seule ligne est dite MATRICE LIGNE OU UNILIGNE
- Une matrice qui possède une seule colonne est dite MATRICE COLONNE OU UNICOLONNE
- Une matrice à une ligne et une colonne est dite MATRICE SCALAIRE
- On appelle MATRICE CARRÉE D'ORDRE n toute matrice à n lignes et n colonnes
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnesà coefficients dans $\mathbb{K}$
- On préfère noter $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

type de matrice carrée	définition	représentation
matrice diagonale	$\forall i \neq j \quad a_{ij} = 0$	$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$
matrice triangulaire supérieure	$\forall i > j \quad a_{ij} = 0$	$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$
matrice triangulaire inférieure	$\forall i < j \quad a_{ij} = 0$	$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

- On identifie TOUJOURS $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}$
  exemple: la matrice scalaire (3) *est identifiée au réel* 3
- On identifie SOUVENT $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$... mais attention au contexte!!!
  exemple: la matrice unicolonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *est identifiée au vecteur* $(1,3) \in \mathbb{R}^2$

1.2 Matrice d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}-$ev de dimension n et $\mathcal{B}=(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})$ une base de E.

définition 2: matrice d'une famille de vecteurs

On appelle MATRICE DE LA FAMILLE DE VECTEURS $(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_p})$ DANS LA BASE $\mathcal{B}$ la matrice dont la j-ème colonne est formée des composantes du vecteur $\overrightarrow{u_j}$ dans la base $\mathcal{B}$. On la note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_p})$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_p})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np}\end{pmatrix} \quad \text{avec } \forall j\in[\![1,p]\!]\,,\overrightarrow{u_j}=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}.\overrightarrow{e_i}$$

exemple 1: avec des polynômes

Soit $E=\mathbb{R}_2[X]$. On note $\mathcal{B}=(1,X,X^2)$ la base canonique de E.
On considère la famille de vecteurs suivante $\mathcal{F}=(X^2+2X+3,X^2-1,3X+5)$

- La matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix}3 & -1 & 5\\ 2 & 0 & 3\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

  en effet $\begin{cases} X^2+2X+3 & =\boxed{3}.1+\boxed{2}.X+\boxed{1}.X^2\\ \dots \end{cases}$

- Dans la base $(X^2,X+1,1)$ la matrice de $\mathcal{F}$ est $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 3\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$

  en effet: $\begin{cases} X^2+2X+3 & =\boxed{1}.X^2+\boxed{2}.(X+1)+\boxed{1}.1\\ X^2-1 & =\boxed{1}.X^2+\boxed{0}.(X+1)+\boxed{(-1)}.1\\ 3X+5 & =\boxed{0}.X^2+\boxed{3}.(X+1)+\boxed{2}.X \end{cases}$

exemple 2: avec des vecteurs de $\mathbb{R}^3$... et d'autres espaces aussi

Soit $E=\mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B}=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ la base canonique de E.
On considère la famille de vecteurs suivante $\mathcal{F}=((1,1,0),(2,1,0),(1,1,1),(1,2,3))$.

- La matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$

- Si on écrit cette fois la matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$ on trouve alors $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$

  en effet: $\begin{cases} (1,1,0) & =\boxed{1}.\vec{i}+\boxed{1}.\vec{j}+\boxed{0}.(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})\\ (2,1,0) & =\boxed{2}.\vec{i}+\boxed{1}.\vec{j}+\boxed{0}.(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})\\ (1,1,1) & =\boxed{0}.\vec{i}+\boxed{0}.\vec{j}+\boxed{1}.(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})\\ (1,2,3) & =\boxed{(-2)}.\vec{i}+\boxed{(-1)}.\vec{j}+\boxed{3}.(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}) \end{cases}$

- La matrice précédente est aussi la matrice de la famille de vecteurs $(X^2+X,2X^2+X,1,-2X^2-X+3)$ dans la base $(X^2,X,1)$.
  (L'espace vectoriel E étant $\mathbb{R}_2[X]$ cette fois-ci.)
- De la remarque ci-dessus, on retient qu'UNE MÊME MATRICE PEUT ÊTRE ASSOCIÉE À DIFFÉRENTES FAMILLES DE VECTEURS: TOUT DÉPEND DE LA BASE DANS LAQUELLE ON ÉCRIT LA MATRICE.

méthode 1: Ecrire la matrice d'une famille de vecteurs dans une base donnée

On cherche les composantes de chaque vecteur dans la base donnée, puis on écrit ses composantes, dans l'ordre, en colonne

1.3 Matrice d'une application linéaire, d'un endomorphisme

Dans ce paragraphe, nous allons voir comment associer matrices et applications linéaires. **Ceci est très important**, car on fera souvent le va-et-vient entre ces deux notions dans de nombreux raisonnements.
Soient :

- E une $\mathbb{K}-$ev de dimension p dont une base est $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_p})$
- F une $\mathbb{K}-$ev de dimension n dont une base est $\mathcal{C} = (\overrightarrow{f_1},\dots,\overrightarrow{f_n})$

définition 3:

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
On appelle MATRICE DE L'APPLICATION LINÉAIRE u DANS LES BASES $\mathcal{B}$ ET $\mathcal{C}$, la matrice de la famille de vecteurs $(u(\overrightarrow{e_1}),\dots,u(\overrightarrow{e_p}))$ dans la base $\mathcal{C}$. On la note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u(\mathcal{B})) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \quad ,avec\, \forall j \in [\![1,p]\!], u(\overrightarrow{e_j}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.\overrightarrow{f_i}$$

méthode 2: Ecrire la matrice d'une application linéaire

On calcule l'image de chaque vecteur de la base de l'ensemble de départ (on dit qu'on calcule l'image de la base) et on exprime chacune de ces images dans la base de l'ensemble d'arrivée. Puis on place ces composantes en colonne
exemple:

- *On considére l'application suivante* $\boxed{\begin{array}{rcl} u : \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & 2P' - (X+1)P'' \end{array}}$
- *On munit* $\mathbb{R}_3[X]$ *de la base* $\mathcal{B} = (1,X,X^2,X^3)$*, et* $\mathbb{R}_2[X]$ *de la base* $\mathcal{C} = (X^2,X,1)$.
- *On a* $u(1) = 0, u(X) = 2, u(X^2) = -2X - 2$ *et* $u(X^3) = -6X$
- *On trouve alors facilement que* $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}}$

exemple 3:

- On considère l'application $\boxed{\begin{array}{rcl} u : \quad \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ (a,b,c) & \longmapsto & (a-c)X^2 + (a+5b)X + (b+2c) \end{array}}$
- On munit $\mathbb{R}^3$ de la base $\mathcal{B} = (\underbrace{(1,0,0)}_{i}, \underbrace{(0,1,0)}_{j}, \underbrace{(0,0,1)}_{k})$ et $\mathbb{R}_2[X]$ de la base $\mathcal{C} = (1,X,X^2)$
- On trouve alors que $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$

  En effet: $\begin{cases} f(i) & = X^2 + X \\ j(j) & = 5X + 1 \\ f(k) & = -X^2 + 2 \end{cases}$

définition 4: cas particulier des endomorphismes(très important)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
On appelle matrice de l'endomorphisme u dans la base $\mathcal{B}$, la matrice de la famille de vecteurs $(u(\overrightarrow{e_1}),\dots,u(\overrightarrow{e_p}))$ dans la base $\mathcal{B}$. On la note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B})) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} \end{pmatrix} \qquad \textit{avec}\, \forall j \in [\![1,p]\!], u(\overrightarrow{e_j}) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij}.\overrightarrow{e_i}$$

exemple 4: matrice d'une rotation vectorielle dans le plan

Ecrire la matrice de la rotation r d'angle θ dans la base orthonormée directe $(\vec{i},\vec{j})$, puis dans la base $(\vec{j},\vec{i})$

- On a $\begin{cases} r(\vec{i}) & = \cos\theta.\vec{i} + \sin\theta.\vec{j} \\ r(\vec{j}) & = -\sin\theta.\vec{i} + \cos\theta.\vec{j} \end{cases}$
- Ainsi $\mathrm{Mat}_{(\vec{i},\vec{j})}(r) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{(\vec{j},\vec{i})}(r) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

exemple 5: un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni de la base $\mathcal{B} = (1,X,X^2)$.
Ecrire la matrice de l'endomorphisme $u : P = P(X) \mapsto P(X+1)$ dans la base $\mathcal{B}$

- On a $\begin{cases} u(1) & = 1 \\ u(X) & = X+1 \\ u(X^2) & = (X+1)^2 = X^2+2X+1 \end{cases}$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

exemple 6: un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de sa base canonique $(1,X,X^2,\dots,X^n)$.
Ecrire la matrice de l'endomorphisme de dérivation $u : P \mapsto P'$ dans la base $\mathcal{B}$

- On a $f(1) = 0$ et $\forall k \in [\![1,n]\!], f(X^k) = k.X^{k-1}$
- On a donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

exemple 7: matrice de l'endomorphisme identité

Dans n'importe quelle base $\mathcal{B}$ d'un ev E de dimension n, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(id_E) = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}_n$

2 Calcul matriciel

2.1 L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

définition 5:

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et $\lambda \in \mathbb{K}$.
On définit les matrices $A+B$ et $\lambda.A$ comme éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de la manière suivante :

$$A+B = (a_{ij}+b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \quad et \quad \lambda.A = (\lambda.a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$$

définition 6: matrices élémentaires, base canonique

On appelle MATRICES ÉLÉMENTAIRES les $n \times p$ matrices $(E_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ définies de la manière suivante : E_{ij} est la matrice qui ne contient que des zéros sauf à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne où se trouve un coefficient égal à 1 (un).

$$E_{ij} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} & & j & \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ces $n \times p$ matrices élémentaires constituent LA BASE CANONIQUE DE $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
rem: on utilise donc un double indiçage pour cette base

exemple 8:

- La base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est $\left(\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}}_{E_{11}}, \underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}}_{E_{12}}, \underbrace{\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}}_{E_{21}}, \underbrace{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}}_{E_{22}}\right)$
- Dans cette base, la matrice $\begin{pmatrix}1&3\\-2&5\end{pmatrix}$ a pour coordonnées $(1{,}3,-2{,}5)$ car on a

$$\begin{pmatrix}1&3\\-2&5\end{pmatrix} = 1.E_{11} + 3.E_{12} - 2.E_{21} + 5.E_{22}$$

D'une manière plus générale:

- Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ on a $\boxed{A = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} E_{i,j}}$
- dans le cas où l'on se trouve dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} E_{ii} = I_n \ \underline{\text{matrice unité}} \text{ et } \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \text{"matrice Attila \dots"}$$

théorème 1:

$(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, .)$ est un $\mathbb{K}-$ev de dimension $n \times p$,
dont la base canonique est constituée des matrices élémentaires.

remarque: en particulier $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$

théorème 2: moins utilisé dans notre filière

Soit E un espace-vectoriel de dim p et de base $\mathcal{B}$ et,
F un espace-vectoriel de dim n et de base $\mathcal{C}$.
L'application $\boxed{\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \end{array} \text{ est un isomorphisme.}}$
En particulier $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\lambda u + v) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) + \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(v)$

Ceci signifie en particulier, que si l'on se fixe une base de E et une base de F, à toute application linéaire de $E \to F$ correspond UNE ET UNE SEULE MATRICE de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et reciproquement.

théorème 3: le théorème précédent appliqué aux endomorphismes

Soit E un espace-vectoriel de dim n et de base $\mathcal{B}$
L'application $\boxed{\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{array} \text{ est un isomorphisme.}}$

Encore plus particulièrement ici, ceci signifie que

- SI L'ON SE FIXE UNE BASE DE E, À TOUT ENDOMORPHISME DE E CORRESPOND UNE ET UNE SEULE MATRICE DE $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ET RÉCIPROQUEMENT
- $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\lambda.u + v) = \lambda.\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) + \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$
- Pour tout matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe un unique $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = M$
- $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = 0$ *(la matrice nulle)* $\iff u = 0$ *(l'endomoprhisme nulle)*

exemple 9:

On note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.
Donner l'expression de f dans les cas suivants:

1. $E = \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ avec $\vec{e}_1 = (0,3)$ et $\vec{e}_2 = (1,0)$
   - *D'après la matrice, on a* $f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ et $f(\vec{e}_2) = \vec{e}_2$
   - *On a pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y) = x.\vec{e}_2 + \frac{y}{3}.\vec{e}_1$
   - *Ainsi* $f(x,y) = f(x.\vec{e}_2 + \frac{y}{3}.\vec{e}_1) = x.f(\vec{e}_2) + \frac{y}{3}f(\vec{e}_1) = x.\vec{e}_2 + \frac{y}{3}(\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2) = x.(1,0) + \frac{y}{3}((0,3) + 3.(1,0)$

   L'endomorphisme f alors associé à A est $\boxed{\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+y,y) \end{array}}$
2. $E = \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ avec $\vec{e}_1 = (1,0)$ et $\vec{e}_2 = (0,1)$
   - *D'après la matrice, on a* $f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ et $f(\vec{e}_2) = \vec{e}_2$
   - *On a pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y) = x.\vec{e}_1 + y.\vec{e}_2$
   - *Ainsi* $f(x,y) = f(x.\vec{e}_1 + y.\vec{e}_2) = x.f(\vec{e}_1) + y.f(\vec{e}_2) = x.(\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2) + y.\vec{e}_2 = x.((1,0) + 3.(0,1)) + y.(0,1)$

   L'endomorphisme f alors associé à A est $\boxed{\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x,3x+y) \end{array}}$
3. $E = \mathbb{R}_1[X]$ et $\mathcal{B} = (X,1)$
   - *D'après la matrice, on a* $f(X) = 1.X + 3.1 = X + 3$ et $f(1) = 0.X + 1.1 = 1$
   - *Ainsi* $f(a.X + b.1) = a.f(X) + b.f(1) = a.(X+3) + b.1 = a.X + (3a+b).1$

   L'endomorphisme f alors associé à A est $\boxed{\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}_1[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[X] \\ & aX+b & \longmapsto & aX+3a+b \end{array}}$

théorème 4: $\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie.
Alors l'espace - vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie et l'on a $\boxed{\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim E \times \dim F}$
rem: c'est un corollaire direct du théorème 3

2.2 Produit de deux matrices

définition 7: formule du produit matriciel(très important)

Soient $A=(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B=(b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}}\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
On définit la matrice produit AB comme élément de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ de la manière suivante :

$$AB=(c_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant q}} \quad \text{avec} \quad \boxed{c_{ij}=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}}$$

proposition 1 (***à ne pas retenir sous forme théorique***)

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On peut écrire A avec ses colonnes : $A=(C_1|\dots|C_p)$

Si $X=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ *alors* $AX=\sum_{j=1}^{p}x_jC_j$.

("Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A")

exemple 10:

- $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y+3z\\4x+5y+6z\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix}x&y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+4y&2x+5y&3x+6y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}4&5&6\end{pmatrix}$

proposition 2 (***à ne pas retenir sous forme théorique***)

Soit $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Soit $B\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors on peut écrire B avec ses colonnes : $B=(C_1,\dots,C_q)$
Alors: $\boxed{AB=(AC_1,\dots,AC_q)}$
("La j-ème colonne de AB est le produit de A par la j-ième colonne de B")

exemple 11:

On a $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&4&0\end{pmatrix}$

et l'on peut remarquer que $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$

exemple 12: produit de deux matrices élémentaires

On a la formule $E_{ij}.E_{kl}=\delta_{jk}.E_{il}=\begin{cases}E_{il} & \text{si } j=k\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ *(δ_{jk} est le symbole de Kronecker)*

Il faut savoir la redémontrer à l'aide de la formule du produit matriciel

remarque 2

1. *POUR FAIRE UNE MULTIPLICATION, LES FORMATS DOIVENT ÊTRE ADAPTÉS :*
   soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
   On peut calculer $AB = \begin{pmatrix} 12 & 21 & -2 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ *mais, on ne peut pas calculer* BA
2. *LE PRODUIT MATRICIEL N'EST PAS COMMUTATIF !*
   soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ *alors*
   $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ *et* $BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $AB \neq BA$
3. *ON REMARQUE CI-DESSUS QU'IL EXISTE DES MATRICES NON NULLES DONT LE PRODUIT EST NUL ...*

$$\boxed{\text{Attention avec les matrices:} \qquad AB = 0 \not\Longrightarrow (A = 0 \text{ ou } B = 0)}$$

proposition 3 (*régles usuelles de calcul*)

Sous réserve que les produits existent on a :

1. *Le produit de matrices est associatif :* $(AB)C = A(BC)$
2. *distributivité :* $A(b.B + c.C) = b.AB + c.AC$, $\quad (b.B + c.C)A = b.BA + c.CA$
   On peut donc parler de bilinéarité du produit matriciel !
3. *Si* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *alors* $A.I_p = A$ *et* $I_n.A = A$

théorème 5: Matrice d'une composée d'applications linéaires(peu utilisé)

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimensions finies et $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ leur base respective.
Soient $u \in \mathcal{L}(F,G)$ et $v \in \mathcal{L}(E,F)$.
On a alors l'égalité matricielle suivante : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(u \circ v) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(u) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(v)$

théorème 6: Matrice d'une composée d'endomorphismes(important)

Soit E un espacee vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E
Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $v \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes de E
On a alors l'égalité matricielle suivante :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u \circ v) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)} \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N} \ \boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^n) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u))^n}$$

ces deux dernières formules sont fondamentales pour notre programme

remarque 3 (*résumé*)

En résumé, on a vu que, une base $\mathcal{B}$ étant fixée :

- *à toute matrice de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est associé un unique endomorphisme de* E*, et réciproquement*
- $Mat_{\mathcal{B}}(u + v) = Mat_{\mathcal{B}}(u) + Mat_{\mathcal{B}}(v)$
- $Mat_{\mathcal{B}}(\lambda.u) = \lambda.Mat_{\mathcal{B}}(u)$
- $Mat_{\mathcal{B}}(u \circ v) = Mat_{\mathcal{B}}(u) \times Mat_{\mathcal{B}}(v)$

théorème 7: c'est ce théorème qui établit la correspondance entre vecteurs-applications et matrices

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On a les équivalences

$$\boxed{\vec{y} = u(\vec{x}) \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{y}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u(\vec{x})) \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{y}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u).\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x})}$$

exemple 13: retour sur l'exemple 9

Notons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Le calcul donne $AX = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = Y$
- Les matrices unicolonnes X et Y sont associées à des vecteurs
- La matrice carrée A est associé à un endomorphisme f

Plus précisément, pour chacun des 3 endomorphismes de l'exemple 9 cela donne:

1. on a $\begin{cases} X & \longleftrightarrow 2.\vec{e}_1 + 1.\vec{e}_2 = (1{,}6) \\ Y & \longleftrightarrow 2.\vec{e}_1 + 7.\vec{e}_2 = (7{,}6) \end{cases}$ et en effet $f(1{,}6) = (1+6{,}6) = (7{,}6)$
2. on a $\begin{cases} X & \longleftrightarrow 2.\vec{e}_1 + 1.\vec{e}_2 = (2{,}1) \\ Y & \longleftrightarrow 2.\vec{e}_1 + 7.\vec{e}_2 = (2{,}7) \end{cases}$ et en effet $f(2{,}1) = (2{,}3.2+1) = (2{,}7)$
3. on a $\begin{cases} X & \longleftrightarrow 2.X + 1.1 = 2X + 1 \\ Y & =\longleftrightarrow 2.X + 7.1 = 2X + 7 \end{cases}$ et en effet $f(2X+1) = 2X + (3.2+1) = 2X + 7$

remarque 4 (***correspondances entre monde vecteurs/applications et monde matriciel***)

Une base $\mathcal{B}$ de E est supposée donnée, dans laquelle on exprime toutes les coordonnées.

$\vec{x} \in E$	$X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
$\vec{y} \in E$	$Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
$u \in \mathcal{L}(E)$	$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
$v \in \mathcal{L}(E)$	$B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
$u(\vec{x}) \in E$	$AX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
$\vec{x} + \lambda\vec{y} \in E$	$X + \lambda Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
$id_E \in \mathcal{L}(E)$	$I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

.

$u + v \in \mathcal{L}(E)$	$A + B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
$u^2 \in \mathcal{L}(E)$	$A^2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
$u \circ v \in \mathcal{L}(E)$	$AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
$v \circ u \in \mathcal{L}(E)$	$BA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
u^{-1} (si $u \in GL(E)$)	A^{-1} (si $A \in GL_n(\mathbb{K})$)
$(u^2 - 3v)(\vec{x}) + 3\vec{y}$	$(A^2 - 3B)X + 3Y$

théorème 8:

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, stable par le produit interne $\times$.
(c'est à dire que la combinaison linéaire de deux matrices carrées d'ordre n est encore une matrice carrée d'ordre n, et que le produit de deux matrices carrées d'ordre n est encore une matrice carrée d'ordre n)

remarque 5 (***des formules classiques avec les matrices carrées qui commutent***)

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n qui commutent, (c'est-à-dire que $\boxed{AB = BA}$).
Alors :

1. *toute puissance de A commute avec toute puissance de B.*
2. $\forall p \in \mathbb{N}$, $\boxed{(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k.B^{p-k}}$ ***formule du binôme de Newton***
3. $\forall p \in \mathbb{N}, A^p - B^p = (A-B).(\sum_{k=0}^{p-1} A^k.B^{p-k-1})$

(avec comme convention $A^0 = I_n$)

2.3 Transposition

définition 8:

Soit A une matrice à n lignes et p colonnes.
La transposée de A , notée A^T, est la matrice à p lignes et n colonnes définie par :

$$A^T = (a'_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \text{ avec } a'_{ij} = a_{ji}$$

les lignes de la matrice ${}^tA$ sont les colonnes de A , et inversement.

exemple 14:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ et $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$

théorème 9: les formules avec la transposée

Soient A et B deux matrices et λ et μ deux éléments de $\mathbb{K}$.

1. $\boxed{(A^T)^T = A}$
2. la transposition est une application linéaire $\boxed{(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T}$
3. $\boxed{(AB)^T = B^T.A^T}$

Il existe une autre formule également avec la transposée de l'inverse(voir plus loin)

définition 9: matrice symétrique, antisymétrique

Soit A une matrice carrée d'ordre n.

1. On dit que LA MATRICE A EST SYMÉTRIQUE lorsque $A^T = A$
2. On dit que LA MATRICE A EST ANTISYMÉTRIQUE lorsque $A^T = -A$

Ce qui se traduit au niveau des coefficients par :

- $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ *est SYMÉTRIQUE ssi* $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{ij} = a_{ji}$
- $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ *est ANTISYMÉTRIQUE ssi* $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{ij} = -a_{ji}$.
  (On a donc en particulier pour une matrice antisymétrique $\forall i \in [\![1,n]\!], a_{ii} = 0\dots$ *)*

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$,
et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

théorème 10: Propriétés de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ (HP)

1. $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
2. $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
3. $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$
4. une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ est $(E_{ij} - E_{ji})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$
5. une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est $(E_{ij} + E_{ji})_{1\leqslant i<j\leqslant n} \cup (E_{ii})_{1\leqslant i\leqslant n}$

La somme de deux matrices symétriques [antisymétriques] est encore une matrice symétrique [antisymétrique]
A noter que le produit de deux matrices symétriques n'est pas forcément une matrice symétrique!

exemple 15:

- Les matrices symétriques d'ordre 2 sont les matrices du type $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$ quelconque

  On note $\mathcal{S}_2(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre 2.
  On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_2(\mathbb{K}) &= \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{K}^3\} \\
&= \{a.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{K}^3\} \\
&= \text{vect}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) \\
&= \text{vect}(\underbrace{E_{11}}_{M_1}, \underbrace{E_{12} + E_{21}}_{M_2}, \underbrace{E_{22}}_{M_3})
\end{aligned}$$

  Nous venons de montrer que (M_1,M_2,M_3) est une famille génératrice de $\mathcal{S}_2(\mathbb{K})$

- Montrons que cette famille est libre.

  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$ tel que $\lambda_1.M_1 + \lambda_2.M_2 + \lambda_3.M_3 = 0$

  On a donc
$$\lambda_1.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$
  c'est à dire
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
  on a bien prouvé que (M_1,M_2,M_3) est une famille libre

- Conclusion: $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } \mathcal{S}_2(\mathbb{K}) \text{, et ainsi } \dim \mathcal{S}_2(\mathbb{K}) = 3}$

- On a
$$\mathcal{A}_2(\mathbb{K}) = \{(\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{K}\} = \{a.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{K}\} = \text{vect}(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix})$$

  Conclusion: $\boxed{\mathcal{S}_2(\mathbb{K}) \text{ est la droite vectorielle dirigée par } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}$

exemple 16:

- Les matrices antisymétriques d'ordre 3 sont les matrices du type $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$ quelconque

  On note $\mathcal{A}_3(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre 3.
  On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_3(\mathbb{K}) &= \{\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{K}^3\} \\
&= \{a.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{K}^3\} \\
&= \text{vect}(E_{12} - E_{21}, E_{13} - E_{31}, E_{23} - E_{32})
\end{aligned}$$

- On montrerait de même que cette famille est une famille libre, donc une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{K})$

remarque 6

Pour justifier que $\mathcal{S}_2(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_2(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, nous pouvons montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ une matrice donnée
Notons $S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \delta \\ -\delta & 0 \end{pmatrix}$.
On a les équivalences suivantes

$$M = S + A \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \delta \\ -\delta & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a & = \alpha \\ b & = \beta + \delta \\ c & = \beta - \delta \\ d & = \gamma \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha & = a \\ \beta & = \dfrac{b+c}{2} \\ \delta & = \dfrac{b-c}{2} \\ \gamma & = d \end{cases}$$

ce qui prouve l'existence et l'unicité de la décomposition! cqfd
rem: nous verrons plus tard une démonstration plus générale sans avoir recours aux coefficients.

2.4 Matrices diagonales et triangulaires

Les notations suivantes ne sont pas officielles:

- $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ *désigne l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n.*
- $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ *désigne l'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre n.*
- $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ *désigne l'ensemble des matrices triangulaires inférieures d'ordre n.*

théorème 11:

1. La somme deux matrices triangulaires supérieures[inférieures] est encore une matrice triangulaire supérieure[inférieure]
2. Le produit de deux matrices triangulaires supérieures[inférieures] est encore une matrice triangulaire

On dit alors que les ensembles $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ sont stables par l'addition est le produit interne

théorème 12: produit de matrices diagonales

1. $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, stables par multiplication interne $\times$
2. $\forall (D_1,D_2) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})^2, D_1.D_2 = D_2.D_1$ ("deux matrices diagonales commutent")
3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^p \end{pmatrix}$

remarque 7

On peut noter Diag$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$. On a alors les propriétés suivantes:

1. *Diag$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ + Diag$(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ = Diag$(\lambda_1 + \mu_1, \ldots, \lambda_n + \mu_n)$*
2. *Diag$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.Diag$(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ = Diag$(\lambda_1\mu_1, \ldots, \lambda_n\mu_n)$*

théorème 13: dimension de $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ (Hors-Programme... mais...)

1. $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est de dimension n
2. une base de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est $(E_{ii})_{1\leqslant i\leqslant n}$
3. $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et une base de $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ est $(E_{ij})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$
4. $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ est de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et une base de $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ est $(E_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}$

exemple 17: ev des matrices triangulaires supérieures d'ordre 3

On s'intéresse à $\mathcal{T}_3^+(\mathbb{K}) = \{\begin{pmatrix} a & b & c\\ 0 & d & e\\ 0 & 0 & f\end{pmatrix} |(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{K}^6\}$

- En écrivant $\begin{pmatrix} a & b & c\\ 0 & d & e\\ 0 & 0 & f\end{pmatrix} = aE_{11} + bE_{12} + cE_{13} + dE_{22} + eE_{23} + fE_{33}$, on remarque que

  $$\boxed{\mathcal{T}_3^+(\mathbb{K}) = \{aE_{11} + bE_{12} + cE_{13} + dE_{22} + eE_{23} + fE_{33}|(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{K}^6\}}$$

  $\mathcal{T}_3(\mathbb{K})$ est donc l'ensemble des combinaisons linéaires des matrices $E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{22}, E_{23}, E_{33}$.
- On vient de prouver que

  $$\mathcal{T}_3^+(\mathbb{K}) = \mathrm{vect}(E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{22}, E_{23}, E_{33}) = \mathrm{vect}((E_{ij})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 3})$$

  c'est à dire que $(E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{22}, E_{23}, E_{33})$ est une famille génératrice de $\mathcal{T}_3(\mathbb{K})$.
- Cette famille est aussi une famille libre car c'est une sous-famille d'une famille libre, à savoir une sous-famille de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- Conclusion: $\boxed{(E_{ij})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 3} \text{ est une base de } \mathcal{T}_3^+(\mathbb{K}), \text{ et } \dim \mathcal{T}_3(\mathbb{K}) = 6}$

exemple 18: ev des matrices diagonales d'ordre n

On s'intéresse à $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$

- On a

  $$dnk = \{\sum_{i=1}^{n} a_{ii}.E_{ii} \,|\, a_{ii} \in \mathbb{K}\} = \mathrm{vect}(E_{11}, E_{22}, \ldots, E_{nn})$$
- Ceci prouve que la famille $(E_{ii})_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille génératrice de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$
- Cette famille est également une famille libre car c'est une sous-famille d'une famille libre, à savoir une sous-famille de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- Conclusion: $\boxed{(E_{ii})_{1\leqslant i\leqslant n} \text{ est une base de } \mathcal{D}_n(\mathbb{K})}$

2.5 Matrices inversibles

définition 10: matrice inversible

On dit que la matrice carrée A d'ordre n est INVERSIBLE lorsque $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AB = BA = I_n$.
La matrice B est alors appelée L'INVERSE DE A , et on la note A^{-1}.

rem: on note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles d'ordre n.

théorème 14: propriétés de l'inverse

1. Si A est inversible alors son inverse est unique.
2. La matrice I_n est une matrice inversible et $I_n^{-1} = I_n$
3. Si A est inversible alors A^{-1} et inversible, et l'on a $\boxed{(A^{-1})^{-1} = A}$
4. Le produit de deux matrices inversibles est une matrice inversible et l'on a $\boxed{\forall (A,B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})^2, (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$

Mais attention! La somme de deux matrices inversibles n'est pas forcément une matrice inversible!
$GL_n(\mathbb{K})$ *N'EST DONC PAS UN ESPACE VECTORIEL*
Les deux derniers points du théorème nous disent que:
$GL_n(\mathbb{K})$ *EST STABLE PAR MULTIPLICATION INTERNE ET PAR PASSAGE À L'INVERSE*

remarque 8 (***très important dans la pratique***)

Soient A, B et C trois matrices.

i *si $A = B$ alors $AC = BC$ et $CA = CB$ (trivial)*
ii *si $AC = BC$ alors on n'a pas forcément $A = B$*
iii *si $AC = BC$ et $C \neq 0$ alors on n'a pas forcément $A = B$!*
exemple: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ *mais* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$
iv *si $AC = BC$ et C est inversible alors on a forcément $A = B$*

- *On retiendra que* ***si C est une matrice inversible****, on a les équivalences*

$$AC = BC \iff A = B \qquad \text{et} \qquad CA = CB \iff A = B$$

"multiplier les deux membres d'une égalité par une matrice inversible donne une égalité équivalente"

- *Dans $\mathbb{R}$, on a $(a \times c = b \times c$ et $c \neq 0) \Rightarrow (a = b)$*
car tous les réels non nuls sont inversibles pour la multiplication
- *Dans $\mathbb{R}$, on a $(a + c = b + c) \Rightarrow (a = b)$*
car tous les réels sont inversibles pour l'addition
- *de ceci on retiendra que "simplifier par C (ou c)" revient à se demander si C (ou c) est inversible pour l'opération considérée.*

théorème 15: lien entre matrice inversible et application linéaire bijective

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de même dimension finie, et de base respective $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On pose $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$
Alors on a l'équivalence

$$\boxed{u \text{ est bijective } (=\text{isomorphisme}) \iff A \text{ est inversible}}$$

Et dans ce cas, on a : $\boxed{A^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u^{-1})}$

théorème 16: lien entre matrice inversible et automorphisme (important)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $\mathcal{B}$ une base de E.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$
Alors on a l'équivalence

$$\boxed{u \text{ est bijective } (=\text{automorphisme de } E) \iff A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \text{ est inversible}}$$

et dans ce cas $\boxed{A^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^{-1})}$

exemple 19:

Soit E un espace vectoriel, $\mathcal{B}$ une base de E

et u l'endomorphisme de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- L'existence et l'unicité de u sont données par le théorème 3.
- Une première idée pour justifier que u est bijective est de vérifier que A est une matrice inversible, par exemple en calculant son déterminant.
  $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ *donc on en déduit que u est bijective*
- Ici, on remarque que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$ càd $\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^2)\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(id_E)$
- On peut donc affirmer que $u^2 = id_E$. On a prouvé que u est bijective et que son inverse est... u. (en fait on a prouvé que u est une *symétrie vectorielle*)

théorème 17: important dans la pratique

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

i) S' il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$ alors A est inversible et l'on a $A^{-1} = B$.

ii) S' il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$ alors A est inversible et l'on a $A^{-1} = B$.

On dit que si A est inversible à droite ou à gauche alors A est inversible.

exemple 20:

Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

- Un simple calcul matriciel donne $AB = I_2$.
- Grâce au théorème ci-dessus, on peut affirmer que A est inversible et que $A^{-1} = B$. *Il n'y a pas besoin de vérifier la deuxième égalité $BA = I_2$*
- On peut évidemment aussi affirmer que B est inversible et que son inverse est A
- Le résultat du théorème est vraiment particulier à l'égalité $AB = I_n$ ou $BA = I_n$:
  si $AB = I_n$ on peut affirmer que $BA = I_n$ ...(alors qu'en général on sait que le produit matriciel n'est pas commutatif, et en particulier on peut avoir $AB = 0$ sans que $BA = 0$)

théorème 18: lien entre matrice inversible et famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E.
On considère la famille de n vecteurs $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n})$.
Alors, on a l'équivalence

$$(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}) \text{ est une base de } E \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}) \text{ est une matrice inversible.}$$

exemple 21:

Sachant que la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ est inversible, on peut en déduire que:

- la famille de vecteurs $((4,3,0),(1,1,1),(0,2,4))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
  En effet $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ avec $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}$ =base canonique de $\mathbb{R}^3$)

- la famille de polynôme $(3X + 4, X^2 + X + 1, 4X^2 + 2X)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$
  En effet, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P_1, P_2, P_3)$ avec $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$)

théorème 19: voir poly sur le déterminant

Les opérations élémentaires sur les lignes et/ou colonnes préservent l'inversibilité

théorème 20: thÃ©o admis

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a l'équivalence :

$$A \text{ est inversible} \iff A^T \text{ est inversible. Et dans ce cas } \boxed{(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}}$$

théorème 21: inversibilité des matrices triangulaires ou diagonales

Une matrice diagonale [resp. triangulaire] est inversible ssi aucun des éléments diagonaux n'est nul.
Et dans ce cas, l'inverse de la matrice est diagonale [resp. triangulaire].

En particulier, pour les matrices diagonales on a $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda_n \end{pmatrix}$ *lorsque* $\prod_{k=1}^{n} \lambda_k \neq 0$

3 Noyau, image et rang d'une matrice

3.1 Application canoniquement associée à une matrice

définition 11: application linéaire canoniquement associée

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
L'APPLICATION LINÉAIRE CANONIQUEMENT ASSOCIÉE À A est l'application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ qui a pour matrice A lorsque l'on munit $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ de leur respective **base canonique**.
Autrement dit, c'est l'application $\boxed{\begin{array}{rcl} u : \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto & AX \end{array}}$

Dans cette définition, on identifie les vecteurs de $\mathbb{K}^p$ *et* $\mathbb{K}^n$ *aux matrices unicolonnes*
rem: on a déjà vu qu'à une matrice donnée on pouvait associer une infinité d'applications linéaires, il y en a une que l'on distingue c'est l'endomorphisme canoniquement associé.

définition 12: endomorphisme canoniquement associé (très important=

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
L'ENDOMORPHISME CANONIQUEMENT ASSOCIÉ À A est l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ qui a pour matrice A lorsque l'on munit $\mathbb{K}^n$ de sa base canonique.
Autrement dit, c'est l'application $\boxed{\begin{array}{rcl} u : \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto & AX \end{array}}$

Dans cette définition, on identifie les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ *aux matrices unicolonnes*

exemple 22:

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
Déterminons l'endomorphisme canoniquement associé à A

Comme A est une matrice carrée d'ordre 2 à coefficient réels, l'endomorphisme canoniquement associé à A est UN ENDOMORPHISME DE $\mathbb{R}^2$, *à savoir* $\boxed{\begin{array}{rcl} u : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & A.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 2x+4y \end{pmatrix} \end{array}}$

définition 13: image, noyau, rang d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. On appelle IMAGE[resp. NOYAU] de la matrice A , et on note $\mathrm{Im}(A)$ [resp. $\ker(A)$], l'image [resp. le noyau] de son appli.lin.cano.associé.
2. On appelle RANG DE LA MATRICE A, et on note $\mathrm{rg}(A)$, le rang de la famille de ses vecteurs colonnes

remarque 9

*Très souvent, lorsque l'on parlera du noyau ou de l'image d'une matrice, on préférera noter les éléments de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$ à l'aide de matrices unicolonnes: on utilisera alors pleinement l'identification entre $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$. On a alors les équivalences suivantes **(à retenir)***

$$\boxed{X \in \ker A \iff AX = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{Y \in \mathrm{Im}(A) \iff \exists X \in \mathbb{K}^n, Y = AX}$$

$$\boxed{\mathrm{Im}(A) = \{Y \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \,|\, \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), Y = AX\} = \{AX \,|\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\}}$$

$$\boxed{\mathrm{Im}(A) = \{x_1.C_1 + \cdots + x_p.C_p \,|\, (x_1,\ldots,x_p) \in \mathbb{K}^p\} = \mathrm{vect}(C_1,\ldots,C_p)}$$

où $C_1,\ldots,C_p$ désignent les colonnes de A

On retiendra que

- $\mathrm{Im}\,A$ *EST L'ESPACE VECTORIEL ENGENDRÉ PAR LES VECTEURS COLONNES DE* A.
- *LES LIGNES DE* A *DONNENT UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS DE* $\ker(A)$

exemple 23:

Déterminer le noyau, l'ensemble image et le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

- En utilisant seulement les définitions
  - $\mathrm{Im}(A) = \{A.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,|\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y.\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \,|\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}) = \mathrm{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix})$
  - *pour déterminer* $\ker(A)$ *on résout* $AX = 0$*, on a*

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + 2y & = 0 \\ 2x + 4y & = 0 \end{cases} \iff x + 2y = 0$$

$$\text{Ainsi } \ker(A) = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,|\, x = -2y\} = \{\begin{pmatrix} y \\ -2y \end{pmatrix} \,|\, y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix})$$

- En utilisant les deux points de la remarque ci-dessus, on écrit directement
  - $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{vect}(C_1,C_2) = \mathrm{vect}(\mathrm{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}))$
  - $\ker(A) = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, \begin{cases} x + 2y & = 0 \\ 2x + 4y & = 0 \end{cases}\}$
- *On constate que* $\dim\ker(A) = 1$ *et que* $\mathrm{rg}(A) = 1$
- *remarque:*
  le théorème du rang appliqué à la matrice A *donnait déjà* $\dim\ker(A) + \mathrm{rg}(A) = \dim\mathbb{R}^2 = 2$ *sans faire aucun calcul!*

remarque 10 (*opérations élémentaires (voir poly déterminant)*)

- *Les opérations élémentaires sur les colonnes conservent le noyau*
- *Les opérations élémentaires sur les lignes conservent l'image*
- *les opérations élémentaires conservent le rang*

3.2 Propriétés du rang

théorème 22: lien avec le rang d'une famille de vecteurs.

Soit E une $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_p})$ une famille de p vecteurs de E.
Alors : pour toute base $\mathcal{B}$ de E, on a $\operatorname{rg}(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_p}) = \operatorname{rg}\left(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_p})\right)$
Le rang d'une famille de vecteurs est égal au rang de n'importe quelle matrice associée à cette famille

méthode 3: déterminer le rang d'une famille de vecteurs à l'aide d'une matrice

On écrit la matrice de cette famille dans n'importe quelle base de E: le rang de la matrice est égal au rang de la famille!
Exemple:
Déterminer le rang de la famille $\mathcal{F} = (X^2+3X+1, X^2+4X+1, X^2+2X+a)$ où $a \in \mathbb{R}$

- On a $M = \operatorname{Mat}_{(1,X,X^2)}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$
- Les transvections $L_2 \longleftarrow L_2 - 3.L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$ donne $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$
- On a donc $\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = \operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}(M') = \begin{cases} 3 & \text{si } a \neq 1 \\ 2 & \text{si } a = 1 \end{cases}$

théorème 23:

Soient A et B deux matrices à n lignes et p colonnes

i) $\operatorname{rg}(A) + \dim(\ker(A)) = p$
ii) $\operatorname{rg} A \leqslant \min(n,p)$
iii) $\operatorname{rg}(AB) \leqslant \min(\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} B)$
iv) $\operatorname{rg}(A^T) = \operatorname{rg} A$

Commentaires:

i) *ce n'est rien d'autre que le théorème du rang appliqué à l'application linéaire canoniquement associée à A*
On rappelle que cette application linéaire est définie de $\mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$
ii) *"Le rang d'une matrice est inférieur à son nombre de lignes et à son nombre de colonnes."*
iii) *"Multiplier deux matrices ne peut augmenter le rang."*

théorème 24:

- Le rang d'une matrice est inchangée par multiplication par une matrice carrée inversible.
$(\forall P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}), \forall Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} AP = \operatorname{rg} QA)$
- Le rang d'une matrice est inchangée par multiplication par un scalaire non nul.
$(\forall \lambda \in \mathbb{K}^*,\ \operatorname{rg}(\lambda A) = \operatorname{rg}(A))$
- Le rang d'une matrice est égal au rang de la famille de ses vecteurs colonnes.
- Le rang d'une matrice est égal au rang de la famille de ses vecteurs lignes.
- Le rang d'une matrice est Ã©gal au rang de n'importe quelle application linÃ©aire (=endomorphisme si matrice carrÃ©e) qui lui est associÃ©e

3.3 Caractérisations des matrices inversibles et calcul de l'inverse

théorème 25: caractérisation des matrices inversibles

Soit A une matrice carrée.
Il y a équivalence entre:

i) A est inversible
ii) A est associée à un endomorphisme bijectif (càd un automorphisme)
iii) les vecteurs colonnes de A forment une base de $\mathbb{K}^n$
iv) les vecteurs colonnes de A engendrent $\mathbb{K}^n$
v) $\text{rg}(A) = n$ *(on dit que "le rang est maximal")*
vi) $\text{Im}(A) = \mathbb{K}^n$
vii) $\ker(A) = \{0\}$
viii) les vecteurs lignes de A forment une base de $\mathbb{K}^n$
ix) $\det(A) \neq 0$
x) le système linéaire associé à A, càd $AX = B$, est UN SYSTÈME DE CRAMER, càd possède une et une seule solution.

méthode 4: première méthode de calcul de A^{-1}

On part du système d'équations $AX = Y$, on le résout avec la méthode du pivot , on obtient le système $X = A^{-1}Y$ et on en déduit A^{-1}!

exemple:

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$.

On considère le système associé à A : $\begin{cases} x_1 + 3x_2 & = y_1 \\ 3x_1 + 8x_2 & = y_2 \end{cases}$

- *la transformation* $E_2 \longleftarrow E_2 - 3E_1$ *donne* $\left\{ \begin{array}{ccccl} x_1 & + & 3x_2 & = & y_1 \\ & - & x_2 & = & y_2 - 3y_1 \end{array} \right.$
- *la transformation* $E_2 \longleftarrow -E_2$ *donne* $\left\{ \begin{array}{ccccl} x_1 & + & 3x_2 & = & y_1 \\ & & x_2 & = & 3y_1 - y_2 \end{array} \right.$
- *la transformation* $E_1 \longleftarrow E_1 - 3E_2$ *donne* $\begin{cases} x_1 & = -8y_1 + 3y_2 \\ x_2 & = 3y_1 - y_2 \end{cases}$

On peut donc conclure que A est inversible et que $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}$

exemple 24: exemple de la méthode 3 avec la matrice augmentée

Il est tout à fait possible d'appliquer la méthode 3 sur la matrice augmentée du système plutôt que sur le système lui-même.

exemple:

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$.

On considère la matrice augmentée du système associé à A : $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & y_1 \\ 3 & 8 & y_2 \end{array}\right)$

- *la transvection* $L_1 \longleftarrow L_2 - 3L_1$ *donne* $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & y_1 \\ 0 & -1 & y_2 - 3y_1 \end{array}\right)$
- *la dilatation* $L_2 \longleftarrow -L_2$ *donne* $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & y_1 \\ 0 & 1 & 3y_1 - y_2 \end{array}\right)$
- *la transvection* $L_1 \longleftarrow L_1 - 3L_2$ *donne* $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -8y_1 + 3y_2 \\ 0 & 1 & 3y_1 - y_2 \end{array}\right)$

On peut donc conclure que A est inversible et que $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}$

méthode 5: deuxième méthode de calcul de A^{-1}: méthode du miroir

Pour obtenir A^{-1}, il suffit de faire subir à I_n la même suite de transformations élémentaires que celle qui fait passer de A à I_n

On peut utiliser une suite de transformations sur les lignes ou une suite de transformations sur les colonnes. Mais attention, il ne faut pas mélanger les deux types de transformations!

Exemple:

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$. *On considère la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 1 & 0 \\ 3 & 8 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- *la transformation* $L_2 \longleftarrow L_2 - 3L_1$ *donne* $\begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 1 & 0 \\ 0 & -1 & | & -3 & 1 \end{pmatrix}$
- *puis la transformation* $L_2 \longleftarrow -L_2$ *donne* $\begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & 3 & -1 \end{pmatrix}$
- *enfin la transformation* $L_1 \longleftarrow L_1 - 3L_2$ *donne* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -8 & 3 \\ 0 & 1 & | & 3 & -1 \end{pmatrix}$

On peut donc conclure que A *est inversible et que* $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}$

remarque 11 (*un cas important de matrices inversibles*)

- *Les matrices orthogonales sont les matrices inversibles pour lesquelles* $A^{-1} = A^T$
  (et donc aucun calcul n'est nÃ©cessaire pour obtenir A^{-1}*)*

3.4 Matrices nilpotentes

définition 14: matrices nilpotentes

On dit la matrice A est NILPOTENTE lorsqu'il existe un entier p tel que $A^p = O$

exemple 25:

- La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est nilpotente car $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = O_n$
- Les matrices triangulaires supérieures[inférieures] avec que des 0 sur la diagonale sont des matrices nilpotentes.
  (et à chaque puissance calculée, une pseudo diagonale de 0 *s'ajoute en direction Nord-Est!)*

remarque 12

- *Une matrice nilpotente n'est pas inversible.*
  En effet, on sait que le produit de matrices inversibles est encore une matrice inversible, donc si A *est inversible on a toute puissance de* A *qui est encore inversible, et donc ne peut être égal à la matrice nulle!*
- *Une matrice non inversible n'est pas forcément nilpotente*
- *On retrouve souvent les matrices nilpotentes lorsque l'on est amené à utiliser la formule du binôme de Newton*
  Si A *est une matrice nilpotente telle que* $A^3 = 0$, *on a pour tout* $n \in \mathbb{N}$

$$(I_3 + A)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k . I_3^{n-k} = \underbrace{\binom{n}{0} . A^0}_{} = I_n + \underbrace{\binom{n}{1} . A^1}_{n.A} + \underbrace{\binom{n}{2}}_{\frac{n(n-1)}{2}} . A^2$$

La formule du binôme de Newton a pu être utilisée car les matrices I_n ***et*** A ***commutent (précision indispensable dans votre rédaction)***

4 Formules de changement de bases

Il y a deux formules Ã retenir:

- la formule de changement de base pour les vecteurs
- la formule de changement de base pour les endomorphismes

définition 15:

Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
On appelle MATRICE DE PASSAGE DE $\mathcal{B}$ À $\mathcal{B}'$ la matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.
On la note $\boxed{P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \text{ ou } P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}}$.
On a donc $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$

Traditionnellement, on appelle ancienne base la base $\mathcal{B}$ et nouvelle base la base $\mathcal{B}'$

méthode 6: comment écrire une matrice de passage

On écrit colonne par colonne les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base exprimées dans l'ancienne base.
un exemple dans $\mathbb{R}^3$:
considérons la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ainsi que la base $\mathcal{B}' = (\vec{k}, -\vec{i}, 2\vec{j}+\vec{i})$.
On a alors $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Si l'on souhaite écrire $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ nous allons devoir exprimer les vecteurs de $\mathcal{B}$ en fonction des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$. Ici ce n'est pas très compliqué car on remarque que

$$\vec{i} = -(-\vec{i}) \quad , \quad \vec{j} = \frac{1}{2}(2\vec{j}+\vec{i}) + \frac{1}{2}(-\vec{i}) \quad \text{et} \quad \vec{k} = \vec{k}$$

On a donc $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

théorème 26: deux propriétés des matrices de passage

1. Si $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ sont trois bases de E , alors $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}.P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}$ *(formule de Chasles - (HP?))*
2. La matrice de passage $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est inversible et son inverse est $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$

remarque 13 (*Astuce utile pour le théorème suivant!*)

On se rappelle que multiplier à droite une matrice M par la matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ *revient à en extraire la première colonne, multiplier par* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ *revient à en extraire la deuxième colonne etc.*

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

théorème 27: formule de changement de base <u>pour les vecteurs</u> (par coeur)

Soient:

- $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1},\ldots,\overrightarrow{e_n})$ et $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{e'_1},\ldots,\overrightarrow{e'_n})$ deux bases de E.
- $\vec{x}$ un vecteur de E.

On note:

- P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
- X [resp. X'] la matrice de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}$ [resp. $\mathcal{B}'$].

On a alors la formule $\boxed{X = P.X'}$

rem: bien noter que l'on a les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles

théorème 28: formule de changement de base <u>pour les endomorphismes</u> (par coeur)

Soit u un endomorphisme de E, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$, ainsi que P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Alors on a la formule $\boxed{A' = P^{-1}AP}$

cette formule équivaut à la formule $A = P.A'.P^{-1}$ (que l'on préférera retenir)

exemple 26:

Soit E un espace vectoriel de dimension 2, de base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$

Soient $\mathcal{B}' = (\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2)$ avec $\vec{\varepsilon}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ et $\vec{\varepsilon}_2 = \vec{e}_2$

On considère également le vecteur $\vec{x} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$. *(On a ainsi $Mat_{\mathcal{B}}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$)*

1. Donner la matrice associée à $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}'$ de deux manières différentes.
2. Donner la matrice associée à f dans la base $\mathcal{B}'$ en utilisant une formule de changement de base

- *La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est* $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- *Il est aisé de déterminer l'inverse de cette matrice, on trouve* $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. (a) *En utilisant la définition:*
   On a $\vec{x} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 = \vec{\varepsilon}_1 - 2\varepsilon_2$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

   (b) *D'après* ***la formule de changement de base pour les vecteurs****, on a*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\vec{x}) = X' = P^{-1}.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2. *D'après* ***la formule de changement de base pour les endomorphismes****, on a*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

théorème 29: formule de changement de bases pour les applications linéaires

Soient E un $\mathbb{K}-$ev, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
Soient F un $\mathbb{K}-$ev, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F.
Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u)$

Alors on a la formule: $\boxed{A' = P_{\mathcal{C}'\to\mathcal{C}}.A.P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}}$

5 Matrices semblables

définition 16:

Soient A et A' deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On dit que LA MATRICE A EST SEMBLABLE À LA MATRICE A' s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P.A'P^{-1}$

théorème 30:

"être semblable à " est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

C'est à dire que:

- toute matrice A est semblable à elle-même.
- si A est semblable à A' alors A' est semblable à A
- si A est semblable à B et B est semblable à C alors A est semblable à C

C'est pour cette raison que l'on dira plus simplement A ET A' SONT DEUX MATRICES SEMBLABLES.

exemple 27: à retenir

L'ensemble des matrices semblables à une matrice A donnée étant $\{P.A.P^{-1} | P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})\}$,
il est alors évident que

- la matrice I_n n'est semblable qu'à elle-même
- la matrice O_n n'est semblable qu'à elle-même
- d'une manière générale, pour tout scalaire $k \in \mathbb{K}$, la matrice $k.I_n$ n'est semblable qu'à elle-même.

En effet: $\{P.(k.I_n).P^{-1} | P \in GL_n(\mathbb{K})\} = \{k.P.P^{-1} | P \in GL_n(\mathbb{K})\} = \{k.I_n\}$

théorème 31: caractérisation des matrices semblables- Important!

Soient A et A' deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

1. A et A' sont semblables.
2. A et A' sont associées au même endomorphisme
   càd il existe un endomorphisme u d'un ev E de dimension n, et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E tels que $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$ et $A' = Mat_{\mathcal{B}'}(u)$

C'est autour de ce résultat que l'on travaillera dans le prochain chapitre: parmi toutes les matrices qui sont associées à un même endomorphisme, on cherchera les matrices qui sont les "plus simples" ...

théorème 32: démonstration par récurrence pour être rigoureux

$\boxed{\text{Si } B = P.A.P^{-1} \text{ alors pour tout } k \in \mathbb{N}, B^k = P.A^k.P^{-1}}$.

théorème 33:

Deux matrices semblables ont même determinant, même trace et même rang.
mais a priori elles n'ont pas même noyau ni même image

remarque 14 (*Attention !*)

mais deux matrices qui ont le même determinant, la même trace et le même rang ne sont pas necessairement semblables ! Chercher un contre-exemple.

6 Trace d'une matrice carrée

définition 17: trace d'une matrice

Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice carrée d'ordre n , on appelle TRACE DE A et on note $tr(A)$ la somme des coefficients diagonaux de A. On a donc $\boxed{tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}}$

Quelle que soit la valeur de n, la somme des coefficients diagonaux d'une matrice carrée A est toujours notée $\mathrm{tr}(A)$

exemple 28:

Quelle est la trace d'une matrice antisymétrique?

théorème 34: propriétés de l'application trace

i) l'application $\boxed{\begin{array}{rcl} tr : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \longmapsto & tr(A) \end{array}}$ est une forme linéaire(cÃ d une appli. lin. Ã valeurs dans $\mathbb{K}$)

ii) pour A et B matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a $\boxed{tr(AB) = tr(BA)}$

iii) deux matrices semblables ont la mÃªme trace

Attention! Contrairement à la formule valable pour les déterminants, on n'a pas $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(A).\mathrm{tr}(B)$

iii) mais la rÃ©ciproque est fausse!

exemple 29: noyau de l'application trace

On considère $\boxed{\begin{array}{rcl} \mathrm{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \longmapsto & \mathrm{tr}(A) \end{array}}$. Déterminer le noyau de l'application tr

1. dans le cas où $n = 2$
2. dans le cas où $n = 3$
3. dans le cas général

définition 18: trace d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}-$ev de dimension n et u un endomorphisme de E.
On appelle TRACE DE L'ENDOMORPHISME u, et on note $\mathrm{tr}(u)$, la trace de n'importe quelle matrice associée à u

exemple 30:

DÃ©terminer la trace de l'endomorphisme $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, x-y) \end{array}$

exemple 31: Des traces classiques. (on note $n = \dim E$)

Rappeler la trace de l'endomorphisme u lorsque:

1. u est l'homothétie de rapport k.
2. u est la projection sur F_1 parallèlement à F_2
3. u est la symétrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2

théorème 35: traduction du théorème 34

Soient u et v deux endomorphismes de E. On a $\boxed{\mathrm{tr}(u \circ v) = \mathrm{tr}(v \circ u)}$