Révisions de 1ère année
Applications linéaires

Serge Lemarquis

Table des matières

$\mathbb{K}$ désignera comme toujours le corps commutatif $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Avertissement:

- Dans les espaces de fonctions, on se souviendra toujours que la fonction est nommée par son nom usuel ou par une seule lettre (par exemple f), et non pas par $f(x)$ (qui correspond à l'image de x par la fonction f)
- Par exemple, la fonction sinus sera notée $\boxed{\sin}$ et elle correspond à $\boxed{\begin{array}{rcl} \sin : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}}$
- Ainsi le sev $\boxed{\mathrm{vect}(\sin, \cos, \exp)}$ correspond à l'ensemble des fonctions de la forme

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a\sin(x) + b\cos(x) + c.e^x \end{array}} \text{ avec } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$$

- En revanche, on rappelle qu'un polynôme peut s'écrire aussi bien P que $P(X)$

rappels:

- *$f : E \to G$ est bijective ssi f est injective et surjective, càd ssi tout élément de G possède un et un seul antécédent par f*
- *$f : E \to G$ est bijective ssi il existe une application $g : G \to E$ telle que $f \circ g = g \circ f = id_E$.*
  Dans ce cas, g est appelée application réciproque de f, et est notée $g = f^{-1}$

1 Applications linéaires (R001)

définition 1: application linéaire ou morphisme

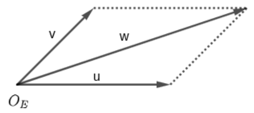
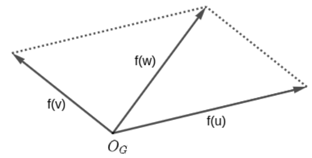
Soient E et G deux espaces vectoriels sur le le corps $\mathbb{K}$, et f une application de $E \longrightarrow G$.
On dit que f EST UNE APPLICATION LINÉAIRE lorsque

$$\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2, f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y})$$

remarque 1

- *On a comme définitions équivalentes*
  i) f *est une application linéaire lorsque*

$$\forall\lambda \in \mathbb{K}, \forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2, \text{ on a } \begin{cases} f(\vec{x}+\vec{y}) & = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \\ f(\lambda\vec{x}) & = \lambda f(\vec{x}) \end{cases}$$

 *si* $w = u + v \ldots$	 $\ldots$ *alors* $f(w) = f(u) + f(v)$
 *si* $v = \lambda.u$	 *alors* $f(v) = \lambda.f(u)$

  ii) f *est une application linéaire lorsque*

$$\forall\lambda \in \mathbb{K}, \forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2, f(\lambda\vec{x} + \vec{y}) = \lambda f(\vec{x}) + f(\vec{y})$$

- *si* f *est une application linéaire alors on a toujours*
  - $f(\vec{0}) = \vec{0}$ *et pour tout* $\vec{x} \in E$ *on a* $f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})$
  - *ainsi que*

$$f(\lambda_1\vec{x}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{x}_n) = \lambda_1 f(\vec{x}_1) + \ldots + \lambda_n f(\vec{x}_n)$$

définition 2:

- lorsque $f : E \to E$ on dit que f EST UN ENDOMORPHISME DE E
- lorsque $f : E \to G$ et f est bijective, on dit que f EST UN ISOMORPHISME DE E SUR G
- lorsque $f : E \to E$ et f est bijective, on dit que f EST UN AUTOMORPHISME DE E

remarque 2

On note :

- $\boxed{\mathcal{L}(E,G)}$ *l'ensemble des applications linéaires de* $E \to G$
- $\boxed{\mathcal{L}(E)}$ *l'ensemble des endomorphismes de* E
- $\boxed{GL(E)}$ *l'ensemble des automorphismes de* E, *on l'appelle* LE GROUPE LINÉAIRE DE E

théorème 1: composée d'applications linéaires

1. la composée de deux applications linéaires est encore une application linéaire.
2. la réciproque d'une application linéaire bijective est encore une application linéaire.

càd

- *si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$*
- *si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et bijective alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$*

théorème 2:

Soient E et FG deux $\mathbb{K}$-ev

1. $(\mathcal{L}(E,G), +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$
2. L'ensemble des ENDOMORPHISMES DE E, càd $\mathcal{L}(E)$, est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, stable par la loi $\circ$
3. L'ensemble DES AUTOMORPHISMES DE E, càd $GL(E)$, est stable par la loi $\circ$ et par passage à l'inverse. *On dit encore que* $(GL(E),\circ)$ *est un* GROUPE (HP)

rem: pour info, dire que $(GL(E),\circ)$ est un GROUPE *signifie que :*

i) la composée de deux éléments de $GL(E)$ est encore un élément de $GL(E)$

ii) l'inverse d'un élément de $GL(E)$ est encore un élément de $GL(E)$

iii) id_E est un élément de $GL(E)$

rem: pour $(f,g) \in GL(E)$, on a $\boxed{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}}$

rem: $GL(E)$ n'est pas un espace vectoriel

	stable par C.L(donc structure ev)	stable par $\circ$	stable par $^{-1}$
$\mathcal{L}(E,G)$	✓	pas de sens	pas de sens
$\mathcal{L}(E)$	✓	✓	pas de sens
$GL(E)$	✗	✓	✓

proposition 1 (***règles de calcul***)

- *si f, g, h sont des applications linéaires et si les compositions sont possibles (càd que les espaces de départ et d'arrivées respectifs sont compatibles) alors*

  $f \circ (\lambda.g + h) = \lambda.f \circ g + f \circ h$ *et* $(\lambda.g + h) \circ f = \lambda.g \circ f + h \circ f$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$

- *si f est un endomorphisme de E, on note $f^0 = id_E$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$*

- *si f est un automorphisme de E, on note pour $k \leqslant 1, f^k = (f^{-1})^{-k} = \underbrace{f^{-1} \circ f^{-1} \circ \cdots \circ f^{-1}}_{-k \text{ fois}}$*

- *si f et g sont 2 endomorphismes de E tels que : $\underline{f \circ g = g \circ f}$ alors*

  i) $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad (f+g)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f^k \circ g^{p-k}}$ (FORMULE DU BINÔME DE NEWTON*(important)*)

  ii) $\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad f^p - g^p = (f-g) \circ (\sum_{k=0}^{p-1} f^k \circ g^{p-k-1})$ *(moins important à retenir)*

- *Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont des isomorphismes alors $g \circ f$ est un isomorphisme et* $\boxed{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}}$

démonstration du théo 1

1. Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.
   Notons $h = g \circ f$, et montrons que h est une application linéaire.
   Soit $(\vec{x},\vec{y},\lambda) \in E^2 \times \mathbb{K}$.
   On a

$$\begin{aligned} h(\lambda.\vec{x}+\vec{y}) &= g(f(\lambda.\vec{x}+\vec{y})) & \\ &= g(\lambda f(\vec{x}) + f(\vec{y})) & \text{par linéarité de } f \\ &= \lambda g(f(\vec{x})) + g(f(\vec{y})) & \text{par linéarité de } g \\ &= \lambda h(\vec{x}) + h(\vec{y}) & \end{aligned}$$

2 Noyau, ensemble image

définition 3:

Soit f une application linéaire de $E \to G$.

1. On appelle NOYAU DE f, et on note $\ker(f)$, l'ensemble des vecteurs $\vec{x}$ de E tels que $f(\vec{x}) = \vec{0}$.

$$\ker(f) = \{\vec{x} \in E \,|\, f(\vec{x}) = \vec{0}\}$$

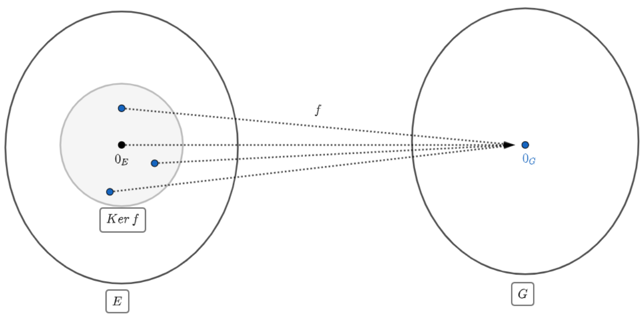
2. On appelle ENSEMBLE IMAGE DE f, et on note $\mathrm{Im}(f)$, l'ensemble des éléments de G qui possèdent au moins un antécédent par f

$$\mathrm{Im}(f) = \{\vec{y} \in G, |\, \exists\, \vec{x} \in E, f(\vec{x}) = \vec{y}\} = \{f(\vec{x}) \,|\, \vec{x} \in E\}$$

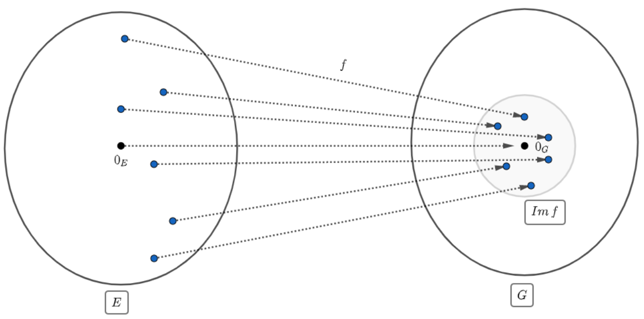
théorème 3:

Soit f une application linéaire de $E \to G$.

1. $\ker(f)$ est un sev de E
2. $\mathrm{Im}(f)$ est un sev de G



- le noyau représente l'ensemble des "racines" de f (mais on N'utilise PAS ce terme en algèbre linéaire)
- le noyau est un sev (ce qui n'est pas le cas pour l'ensembles des "racines" d'une application NON linéaire)



- l'ensemble image est défini de la même manière que pour une application NON linéaire
- quand l'application est linéaire, l'ensemble image est TOUJOURS un sev (ce qui n'est pas le cas pour une application quelconque)

remarque 3

Pour tous $\lambda \in \mathbb{K}^*$ *on a* $\ker(\lambda.f) = \ker(f)$ *et* $\mathrm{Im}(\lambda.f) = \mathrm{Im}(f)$

démonstration 1

1.
   - *par définition,* $\boxed{\ker(f) \subset E}$
   - $\boxed{\vec{0} \in \ker(f)}$ *car comme f est linéaire, on a $f(\vec{0}) = \vec{0}$*
   - $\boxed{\ker(f) \text{ est stable par combinaison linéaire.}}$
     Soient $(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\mathbb{K}) \in \ker(f) \times \ker(f) \times \mathbb{K}$.
     On a ainsi $f(\vec{x}_1) = f(\vec{x}_2) = \vec{0}$ et grâce à la linéarité de f, on peut écrire

     $$f(\lambda.\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \lambda.f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2) = \lambda.\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

     ce qui prouve que $\lambda.\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in \ker(f)$
2.
   - *par définition* $\boxed{\mathrm{Im}(f) \subset G}$
   - $\boxed{\vec{0} \in \mathrm{Im}(f)}$ *car comme f est linéaire, on a $f(\vec{0}) = \vec{0}$*
   - $\boxed{\mathrm{Im}(f) \text{ est stable par combinaison linéaire}}$.
     Soient $(\vec{y}_1,\vec{y}_2,\mathbb{K}) \in \mathrm{Im}(f) \times \mathrm{Im}(f) \times \mathbb{K}$.
     Comme $\vec{y}_1 \in \mathrm{Im}(f)$, on sait qu'il existe $\vec{x}_1$ tel que $f(\vec{x}_1) = \vec{y}_1$.
     Comme $\vec{y}_2 \in \mathrm{Im}(f)$, on sait qu'il existe $\vec{x}_2$ tel que $f(\vec{x}_2) = \vec{y}_2$.
     On a donc par linéarité de f

     $$\lambda.\vec{y}_1 + \vec{y}_2 = \lambda.f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2) = f(\lambda.\vec{x}_1 + \vec{x}_2)$$

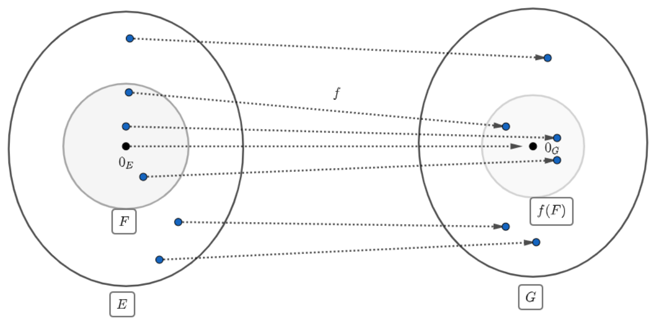
     Comme E est un sev et que $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ sont deux éléments de E, on peut affirmer que $\lambda.\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in E$.
     En notant $\vec{x}_3$ ce dernier vecteur, on a bien montré qu'il existe $\vec{x}_3 \in E$ tel que $\lambda.\vec{y}_1 + \vec{y}_2 = f(\vec{x}_3)$,càd $\lambda.\vec{y}_1 + \vec{y}_2$

théorème 4: démo en classe

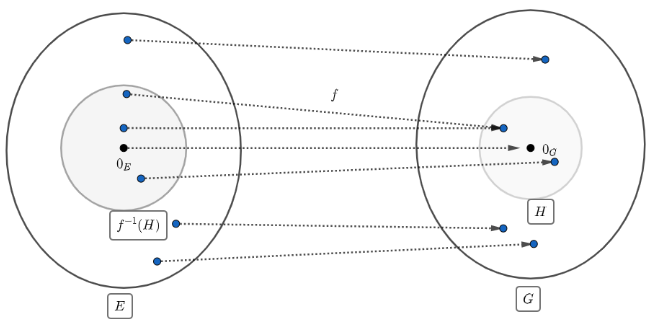
Soit f une application linéaire de $E \to G$, deux sevs.

1. L'image d'un sev de E par f est un sev de G
   si F est un sev de E alors $\boxed{f(F) = \{f(\vec{x}) | \vec{x} \in F\}}$ *est un sev de G.*

2. L'image réciproque d'un sev de G par une application linéaire est un sev de E
   si H est un sev de G alors $\boxed{f^{-1}(H) = \{\vec{x} \in E | f(\vec{x}) \in H\}}$ *est un sev de E*

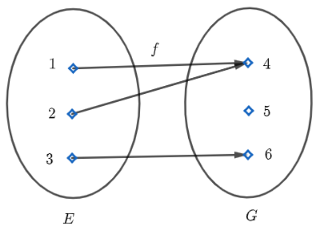
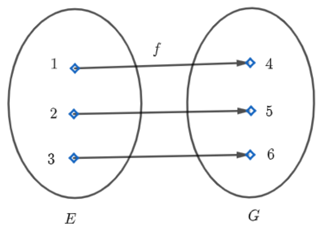


- les images des vecteurs de F par f constituent un sev de G
- on retient qu'*une application linéaire envoie un sev sur un sev*



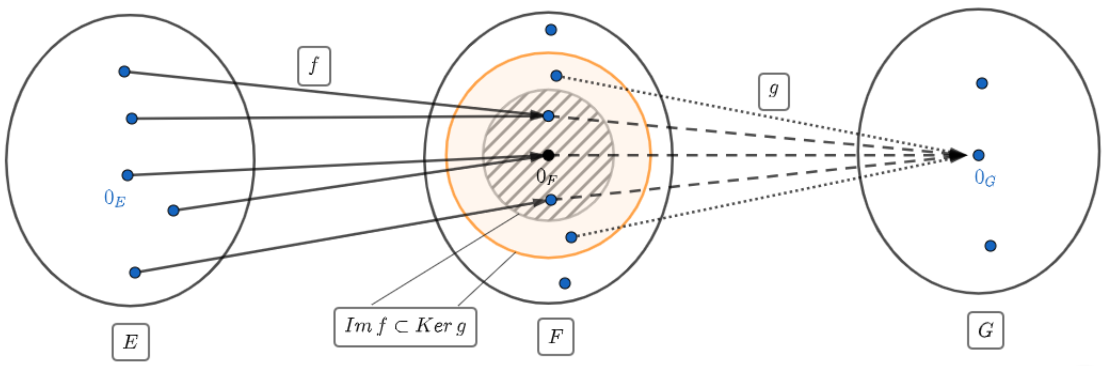
- les images réciproques de H par f constituent un sev de E

remarque 4 (***précision importante à propose de la notation f^{-1}***)

	
f NON bijective	*f bijective*
$f^{-1}(4)$ *N'a PAS de sens*	$f^{-1}(4) = 1$
$f^{-1}(\{4\}) = \{1{,}2\}$	$f^{-1}(\{4\}) = \{1\}$
$f^{-1}(\{5\}) = \{\}$	$f^{-1}(\{5\}) = \{2\}$
$f^{-1}(\{6\}) = \{3\}$	$f^{-1}(\{6\}) = \{3\}$
$f^{-1}(\{4{,}5\}) = \{1{,}2\}$	$f^{-1}(\{4{,}5\}) = \{1{,}2\}$
lorsque l'on écrit $f^{-1}(\vec{y})$ ceci exige que f soit bijective: $f^{-1}(\vec{y})$ désigne alors l'image du vecteur $\vec{y}$ par la fonction f^{-1}	*lorsque l'on écrit $f^{-1}(\{\vec{y}\})$ ceci n'exige pas que f soit bijective: $f^{-1}(\vec{y})$ désigne l'ensemble des vecteurs $\vec{x}$ tels que $f(\vec{x}) = \vec{y}$. Dans le cas où $\vec{y}$ ne possède pas d'antécédent par f, on note alors $f^{-1}(\{\vec{y}\} = \emptyset$*

remarque 5 (***illustration d'une équivalence classique***)

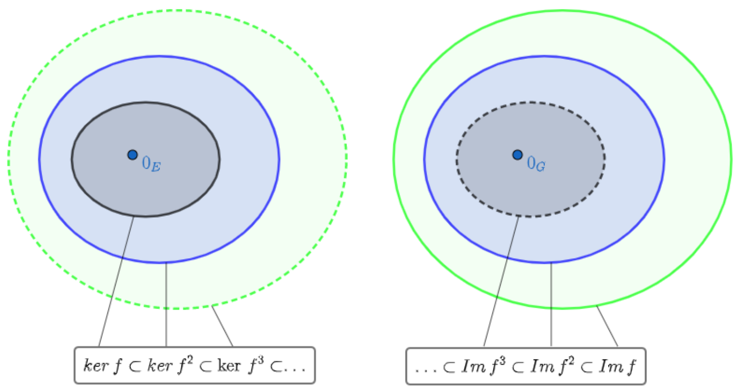
$$g \circ f = 0 \Longleftrightarrow Imf \subset \ker g$$



remarque 6 (***illustration des noyaux et des images itérés***)

Lorsque f est un endomorphisme de E, on a classiquement

$$\ker f \subset \ker f^2 \subset \ker f^3 \subset \dots \qquad \textit{et} \qquad \dots \subset \operatorname{Im} f^3 \subset \operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$$



3 Equations linéaires (R003)

Soient E et G deux ev, ainsi que f une application linéaire de $E \to G$.
On appelle $\boxed{\text{ÉQUATION LINÉAIRE}}$**, une équation de la forme** $\boxed{f(u)=a}$ **où u est l'inconnue (à chercher dans E), et a un vecteur donné (de G).**

$\begin{cases} 2x+y & =-1 \\ 3x+2y & =2 \end{cases}$	$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & 2x+y,3x+2y) \end{array}$	$u=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$a=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3 & =4 \\ 2x_1+x_2-x_3 & =5 \end{cases}$	$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^3 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1+3x_2+x_3 \\ 2x_1+x_2-x_3 \end{pmatrix} \end{array}$	$u=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$a=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$
$\begin{cases} a_{1,1}x_1+\cdots+a_{1,p}x_p=y_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1+\cdots+a_{n,p}x_p=y_n \end{cases}$	$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1+\cdots+a_{1,p}x_p=y_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1+\cdots+a_{n,p}x_p=y_n \end{pmatrix} \end{array}$	$u=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$	$a=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$
$\forall x \in \mathbb{R}, y''+2y'+4y=\sin(x)$	$\boxed{f: \begin{array}{ccc} C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ y & \longmapsto & y''+2y'+4y \end{array}}$	$u=y$	$a=\sin$
$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2}+2.u_{n+1}+u_n=0$	$\boxed{f: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}}$ avec $v_n=u_{n+2}+2.u_{n+1}+u_n$	$u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$	$a=0$

Des situations très diverses, mais structurellement elles sont identiques!

théorème 5: solution d'une équation linéaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E,G)$ et $a \in G$.
On considère l'équation linéaire $\boxed{f(u)=a}$ d'inconnue u

1. L'équation a au moins une solution $\boxed{\text{SSI}}$ $a \in \mathrm{Im}(f)$
2. Dans ce cas, si u_0 est une solution particulière, on a l'équivalence

$$\boxed{u \text{ est solution si et seulement si } u \text{ s'écrit } u=u_0+v \text{ avec } v \in \ker(f)}$$

c'est à dire que::
LA SOLUTION GÉNÉRALE D'UNE ÉQUATION LINÉAIRE EST DONNÉE PAR LA SOMME D'UNE SOLUTION PARTICULIÈRE ET DE LA SOLUTION GÉNÉRALE DE L'ÉQUATION SANS SECOND MEMBRE*:*

on utilise parfois un abus d'écriture en écrivant que l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S}=u_0+\ker(f)=\{u_0+v \,|\, v \in \ker(f)\}$$

démonstration 2

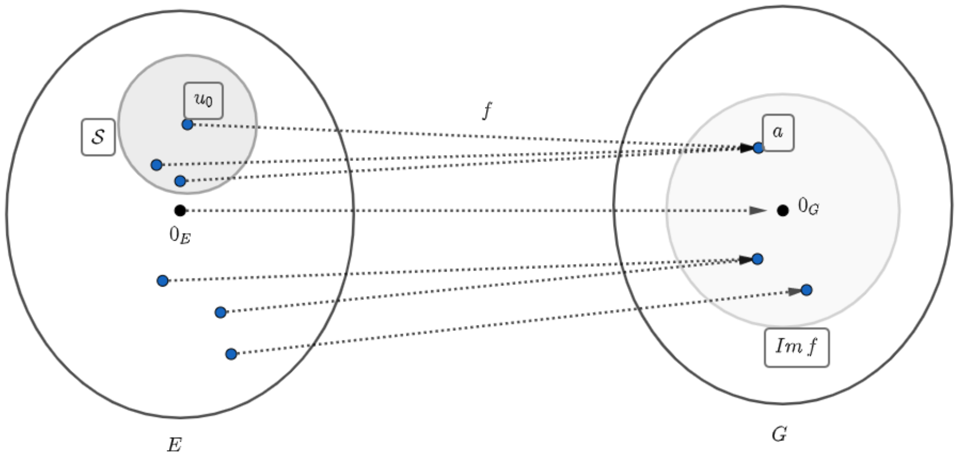
Soit f une application linéaire d'un ev E dans un ev G.
Soit a un élément donné de G

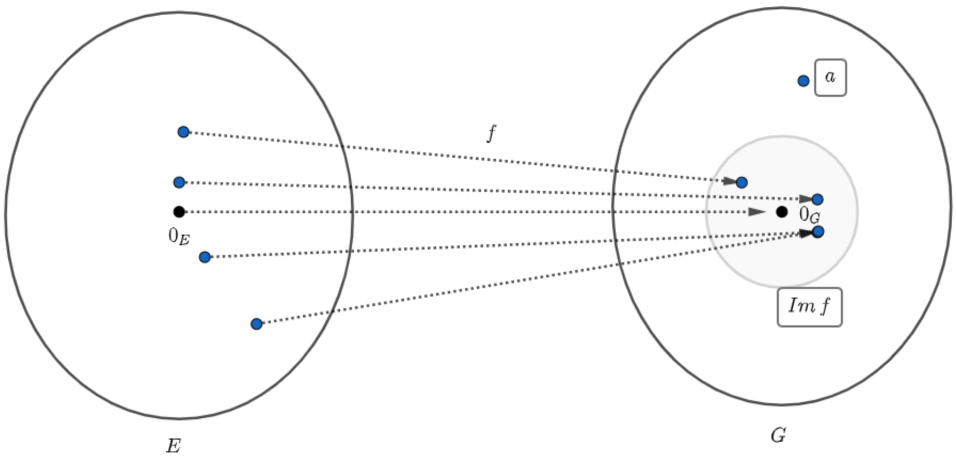
1. *trivial*
2. *soit u_0 une solution particulière.*
   On a les équivalences suivantes:

$$f(u)=a \Longleftrightarrow f(u)=f(u_0) \Longleftrightarrow f(u)-f(u_0)=0 \Longleftrightarrow f(u-u_0)=0 \Longleftrightarrow u-u_0 \in \ker(f)$$

Ce qui s'écrit encore

$$f(u)=a \Longleftrightarrow u-u_0 \in \ker(f) \Longleftrightarrow \exists v \in \ker(f), u-u_0=v \Longleftrightarrow \exists v \in \ker(f), u=u_0+v$$





4 Applications linéaires définies sur un sev de dimension finie (R004)

théorème 6: image d'une famille de vecteurs par une application linéaire.

Soit f une application linéaire de $E \to G$, où E est un espace vectoriel de dimension finie. Alors:

i) **si** $(\overrightarrow{x_1},\dots,\overrightarrow{x_n})$ est une famille liée **alors** $(f(\vec{x}_1),f(\vec{x}_2),\dots,f(\vec{x}_n))$ est une famille liée.

ii) **si** $(f(\vec{x}_1),f(\vec{x}_2),\dots,f(\vec{x}_n))$ est une famille libre **alors** $(\overrightarrow{x_1},\dots,\overrightarrow{x_n})$ est une famille libre.

iii) **si** $(\vec{x}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille génératrice de E **alors** $(f(\vec{x}_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$

iv) **si** F est un sev de E et **si** $\mathcal{B}$ est une base de F, **alors** $f(\mathcal{B})$ est une famille **génératrice** de $f(F)$ (on en déduit donc que $\dim f(F) \leqslant \dim F$)

démonstration 3

Soit f une application linéaire de E dans G.

i) Soit $(\overrightarrow{x_1},\dots,\overrightarrow{x_n})$ une famille liée de E.
Ceci signifie qu'il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \neq (0,\dots,0)$ tel que $\lambda_1.\vec{x}_1 + \cdots + \lambda_n.\vec{x}_n = \vec{0}$.
En composant chaque membre de cette égalité par l'application f, et en tenant compte de sa linéarité, cela donne $\lambda_1.f(\vec{x}_1) + \cdots + \lambda_n.f(\vec{x}_n) = \vec{0}$.
Comme $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \neq (0,\dots,0)$ cette dernière égalité permet d'affirmer que la famille $(f(\vec{x}_1),\dots,f(\vec{x}_n))$ est une famille liée.

ii) c'est la contraposée de i)

iii) Soit $(\vec{x}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille génératrice de E.
On a donc $E = \operatorname{vect}(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$.
Par linéarité de l'application f on a donc

$$\operatorname{Im} f = f(E) = \{f(\lambda_1\vec{x}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{x}_n)|(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n\} = \{\lambda_1 f(\vec{x}_1) + \cdots + \lambda_n f(\vec{x}_n)|(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}$$

On reconnait alors bien que $\operatorname{Im} f = \operatorname{vect}(f(\vec{x}_1),\dots,f(\vec{x}_n))$

théorème 7: application linéaire entièrement définie sur une base

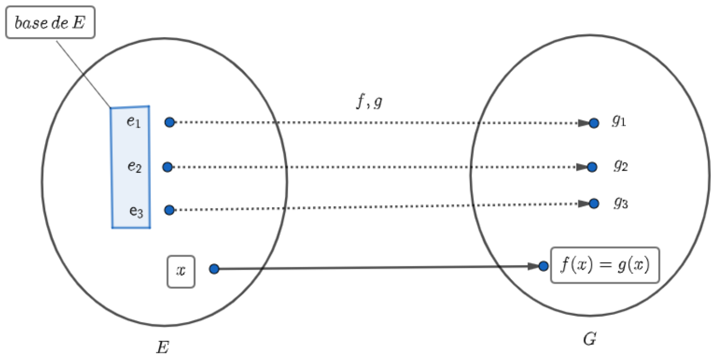
1. Soient $(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})$ une base de E, et $(\overrightarrow{g_1},\dots,\overrightarrow{g_n})$ une famille de vecteurs de l'espace G.

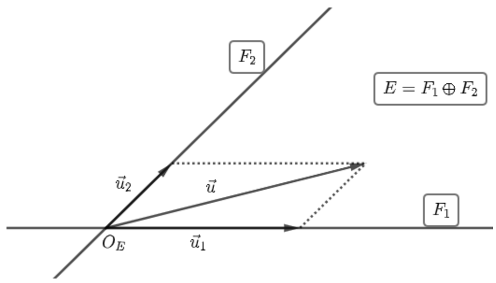
   Alors, il existe une unique APPLICATION LINÉAIRE $f: E \to G$ telle que $\forall p \in [\![1,n]\!], f(\vec{e}_p) = \vec{g}_p$

2. Une application linéaire définie sur $E = F_1 \oplus F_2$ est entièrement déterminée par ses restrictions à F_1 et à F_2 (*"si on sait comment f agit sur F_1 et F_2 alors on sait comment f agit sur E."*)

3. Si $E = F_1 \oplus F_2$ et si $f_1 \in \mathcal{L}(F_1,G)$ et $f_2 \in \mathcal{L}(F_2,G)$ alors il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,G)$ coïncidant avec f_1 sur F_1 et f_2 sur F_2

rem: La première proposition signifie, entre autre, qu'une application linéaire définie sur une ev E de dimension finie est entièrement caractérisée par l'image d'une base de E. Ceci est vraiment propre aux applications linéaires : pour n'importe quelle autre application, la connaissance de l'image d'un nombre fini (ou même infini) de correspondances ne permet pas de connaitre complètement l'application.(par exemple il ne suffit pas de savoir que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\sin(k\pi) = 0$ pour avoir une idée de la fonction $\sin$!)





définition 4:

On appelle RANG DE L'APPLICATION LINÉAIRE f, et on note $\operatorname{rg} f$, la dimension de $\operatorname{Im} f$.
c'est à dire que l'on a $\boxed{\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im} f)}$

exemple 1:

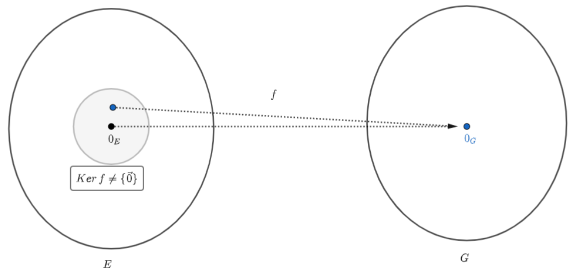
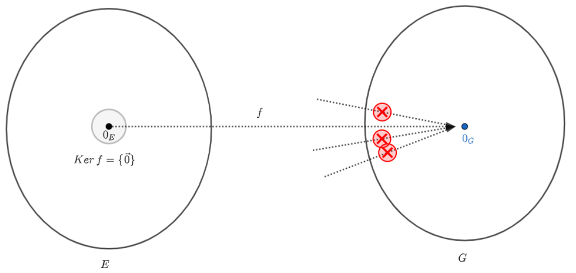
Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que $f((1,2,1,0)) = (1,1)$ et $f((0,1,2,3)) = (1,0)$. Déterminer le rang de f.

- *ce que l'on peut dire déjà, comme* $\operatorname{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$, *c'est que* $\operatorname{rg}(f) \leqslant \dim \mathbb{R}^2 = 2$
- textitDe plus $\operatorname{Im}(f)$ contient les vecteurs $(1,1)$ et $(1,0)$ qui sont linéairement indépendants, donc $\dim \operatorname{Im}(f) \geqslant 2$
- *Des deux points précédents, on en déduit que* $\operatorname{rg}(f) = 2$.
  et l'on peut alors affirmer de plus que $\operatorname{rg}(f) = \mathbb{R}^2$
  car on sait que $\operatorname{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$ *et que* $\dim \operatorname{Im}(f) = \dim \mathbb{R}^2$ *!*

théorème 8: caractérisation des applications injectives

Soit f une application linéaire de $E \to G$. Il y a équivalence entre :

i) $\ker f = \{\vec{0}\}$.
ii) f est injective.
les caractérisations suivantes sont hors-programme
iii) pour tout sev F de E, on a $\dim f(F) = \dim F$
iv) $\operatorname{rg}(f) = \dim(E)$
v) pour toute famille libre $(\vec{x}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E, la famille $(f(\vec{x}_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille libre de G

		
f injective?	✗ $\ker f \neq \{\vec{0}\}$	✓ $\ker f = \{\vec{0}\}$

démonstration 4

Soit f une application linéaire de E dans G.

- On suppose que $\ker f = \{\vec{0}\}$ et on va montrer que f est injective.
  Soient $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ deux vecteurs de E tel que $f(\vec{x}_1) = f(\vec{x}_2)$.
  On peut écrire que $f(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_2) = \vec{0}$, et donc que $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 \in \ker f$.
  Mais comme le noyau est réduit au vecteur nul ceci signifie que $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 = \vec{0}$.
  On a bien montré l'implication $f(\vec{x}_1) = f(\vec{x}_2) \iff \vec{x}_1 = \vec{x}_2$!
- On suppose que f est injective et on va montrer que $\ker f = \{\vec{0}\}$
  Soit $\vec{x} \in \ker f$
  On a donc $f(\vec{x}) = \vec{0}$, mais on a aussi $f(\vec{0}) = \vec{0}$.
  Ainsi $f(\vec{x}) = f(\vec{0})$! Et par injectivité de f on peut affirmer que $\vec{x} = \vec{0}$.
  On vient de prouver que $\ker f \subset \{\vec{0}\}$
  Comme l'autre inclusion est toujours vraie pour une application linéaire, on en déduit bien que $\ker f = \{\vec{0}\}$

exemple 2:

Etudier l'injectivité de l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_{[}X] \\ P & \longmapsto & XP' - 2P \end{array}$

- il est clair que f est une application linéaire
- déterminons le noyau de f.
  Soit $P = aX^2 + bX + c$ un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_2[X]$, on a les équivalences suivantes

$$P \in \ker(f) \iff f(P) = 0 \iff X.(2aX + b) - 2(aX^2 + bX + c) = 0 \iff bX - 2c = 0$$

  or on sait qu'un polynôme est le polynôme nul ssi tous ses coefficients sont nuls, ce qui donne l'équivalence

$$P \in \ker(f) \iff b = c = 0$$

  On trouve donc que $\boxed{\ker(f) = \{aX^2 | a \in \mathbb{R}\} = \text{vect}(X^2)}$
  Comme le noyau n'est pas réduit au vecteur nul, on peut en déduire d'après le théorème précédent que f n'est pas injective.
  remarque: sans déterminer complètement le noyau, si au départ vous aviez remarqué que $f(X^2) = 0$ cela suffisait pour affirmer que f n'était pas injective!

remarque 7 (*injectivité, surjectivité: rappel des définitions*)

Soit f une application de $E \longrightarrow G$.
Par définition:

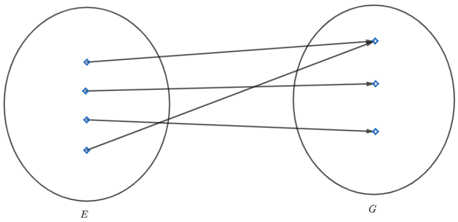
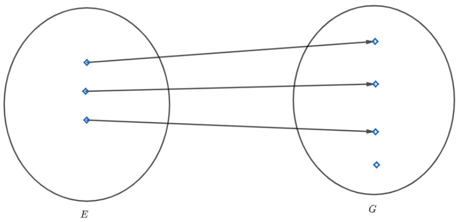
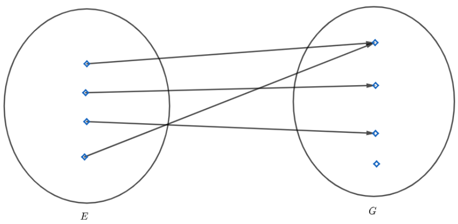
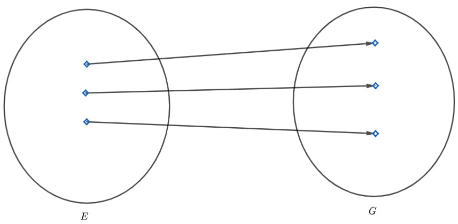
- *f est injective* ***lorsque*** $\boxed{\forall (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in E^2\,, (f(\vec{x}_1) = f(\vec{x}_2) \Rightarrow \vec{x}_1 = \vec{x}_2)}$

  f est injective lorsque tout élément de G possède au plus un antécédent.

- *f est surjective* ***lorsque*** $\text{Im}\, f = G$ **càd** $\boxed{\forall \vec{y} \in G\,, \exists \vec{x} \in E\,, f(\vec{x}) = \vec{y}}$

  f est surjective lorsque tout élément de G possède au moins un antécédent.

application	E	G	*injectif*	*surjectif*
$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	✗	✗
$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$[-1{,}1]$	✗	✓
$x \mapsto \sin x$	$[0, \frac{\pi}{2}]$	$[-1{,}1]$	✓	✗
$x \mapsto \sin x$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$[-1{,}1]$	✓	✓
$x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	✗	✗
$x \mapsto x^2$	$[-2, +\infty[$	$[0, +\infty[$	✗	✓
$x \mapsto x^2$	$[0, +\infty[$	$[0, +\infty[$	✓	✓

	injectif	*surjectif*
	✗	✓
	✓	✗
	✗	✗
	✓	✓

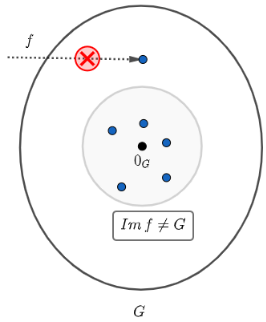
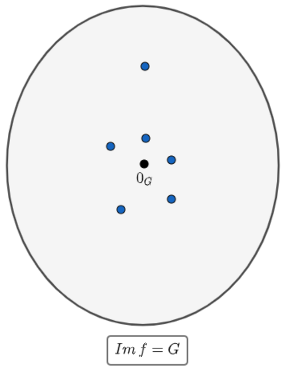
théorème 9: caractérisation des applications surjectives

Soit f une application linéaire de $E \to G$. Il y a équivalence entre :

i) f est surjective

ii) $\operatorname{Im} f = G$

iii) $\operatorname{rg}(f) = \dim(G)$ (lorsque $\dim G$ est finie bien sûr)

		
f surjective?	✗	✓
	un élément de G N'a PAS d'antécédent Im $f \neq G$	tous les éléments de G ont des antécédents Im $f = G$

théorème 10: caractérisation des isomorphismes en dimension finie

Soit f une application linéaire de $E \to G$ avec $\dim E = \dim G < \infty$*(hyp. très importante!)*.
Il y a équivalence entre :

i) f est injective ($\Longleftrightarrow \ker f = \{\vec{0}\}$)
ii) f est surjective($\Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) = G$)
iii) f est bijective (c'est un isomorphisme de E sur G)
iv) l'image d'une base de E par f est une base de G.
v) $\mathrm{rg}(f) = \dim(G) = \dim(E)$

exemple 3:

Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[X] \\ (a,b) & \longmapsto & (a+b)X + (a-b) \end{array}$

Montrer que f est un isomorphisme

- *Il est aisé de vérifier que f est une application linéaire.*
- *Justifions que* $\ker(f) = \{\vec{0}\}$
  Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
  On a les équivalences suivantes

$$(a,b) \in \ker f \Leftrightarrow f(a,b) = 0 \Leftrightarrow (a+b)X + (a-b) = 0_{\mathbb{R}[X]} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b &= 0 \\ a-b &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0$$

  Ceci prouve bien que $\ker f$ *est réduit au vecteur nul*
- *Comme* $\dim \mathbb{R}^2 = \dim \mathbb{R}_1[X] = 2$, *d'après le théorème de caractérisation des isomorphismes en dimension finie on peut alors affirmer que f est bijective*

théorème 11: caractérisation des automorphismes en dimension finie

Soit f un endomorphisme de E avec E un ev de dimension finie*(hyp. très importante!)*.
Il y a équivalence entre :

i) f est injective ($\Longleftrightarrow \ker f = \{\vec{0}\}$)
ii) f est surjective($\Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) = E$)
iii) f est bijective (c'est un automorphisme de E)
iv) l'image d'une base de E par f est encore une base de E.
v) $\mathrm{rg}(f) = \dim(E)$
vi) N'importe quelle matrice associée à f est inversible

rem: ce n'est qu'un cas particulier du théorème précédent!

$f : E \to G$ dimension quelconque	$f : E \to G$ $\dim E = \dim G < \infty$	$f : E \to E$ $\dim E < \infty$
f bijective $\Updownarrow$ f injectif ET f surjectif $\Updownarrow$ $\ker f = \{0\}$ ET $\operatorname{Im} f = G$	f bijective $\Updownarrow$ f injectif $\Updownarrow$ f surjectif $\Updownarrow$ $\ker f = \{0\}$ $\Updownarrow$ $\operatorname{Im} f = G$ $\Updownarrow$ $\operatorname{rg}(f) = \dim E$	f bijective $\Updownarrow$ f injectif $\Updownarrow$ f surjectif $\Updownarrow$ $\ker f = \{0\}$ $\Updownarrow$ $\operatorname{Im} f = E$ $\Updownarrow$ $\operatorname{rg}(f) = \dim E$ $\Updownarrow$ f(base de E)=base de E

définition 5: espaces isomorphes

Soient E et G deux $\mathbb{K}-$ev.
On dit que E ET G SONT ISOMORPHES lorsqu'il existe un isomorphisme de E sur G.

théorème 12: deux espaces sont isomorphes ssi ils ont même dimension finie

i. tout espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$
ii. deux ev E et G de dimension finie sont isomorphes si et seulement si $\dim E = \dim G$

exemple 4:

Soit $\boxed{\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[X] \\ & (a,b,c) & \longmapsto & (a+c)X + (c-b+a) \end{array}}$

f est-elle un isomorphisme?

- *Comme* $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ *et que* $\dim \mathbb{R}_1[X] = 2$, *l'application* f *ne peut être un isomorphisme!*

théorème 13: à savoir redémontrer

Soit $f \in \mathcal{L}(E,G)$ et F un supplémentaire de $\ker u$ dans E.
Alors f induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} u$
c'est à dire que la restriction de f *à* F *est un isomorphisme de* $F \to \operatorname{Im} f$

théorème 14: théoréme du rang

Soit E un ev de dimension finie, et $f : E \to G$ une application linéaire. Alors :

$$\boxed{\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \ker f + \operatorname{rg} f}$$

Attention! Une faute classique consiste à penser que ce théorème signifie que $\ker f$ *et* $\operatorname{Im} f$ *sont toujours supplémentaires dans* E*!*

théorème 15: une composition d'applications linéaires n'augmente pas le rang

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires. Alors

$$\boxed{\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant min(\mathrm{rg}(g), \mathrm{rg}(f))}$$

théorème 16: invariance du rang par composition par un isomorphisme

Soit f une application linéaire, et g_1 et g_2 deux isomorphismes.
Alors : $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f \circ g_1) = \mathrm{rg}(g_2 \circ f)$
"composer une application par un isomorphisme ne modifie pas son rang" (idem matrices!)

théorème 17: dimension de $\mathcal{L}(E,G)$

Si E et G sont deux espaces vectoriels de dimension finie, alors $\mathcal{L}(E,G)$ est aussi un espace vectoriel de dimension finie, et l'on a $\boxed{\dim \mathcal{L}(E,G) = (\dim E) \times (\dim G)}$
En particulier, l'ensemble des endomorphismes de E est un ev de dimension finie,

avec $\boxed{\dim \mathcal{L}(E) = (\dim E)^2}$

théorème 18: inversible à gauche[droite] implique inversible (en dim finie)

Soit E un ev de dimension **finie** et $f \in \mathcal{L}(E)$.
S'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = id_E$ alors f est un bijective et $f^{-1} = g$
ceci signifie que si $g \circ f = id_E$ alors forcément $f \circ g = id_E$ aussi (idem matrices!)

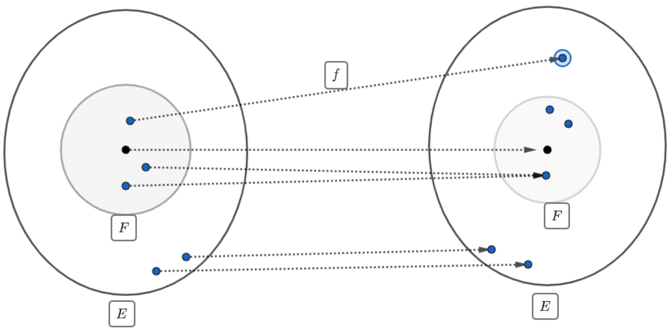
définition 6: sev stable par un endomorphisme, endomorphisme induit

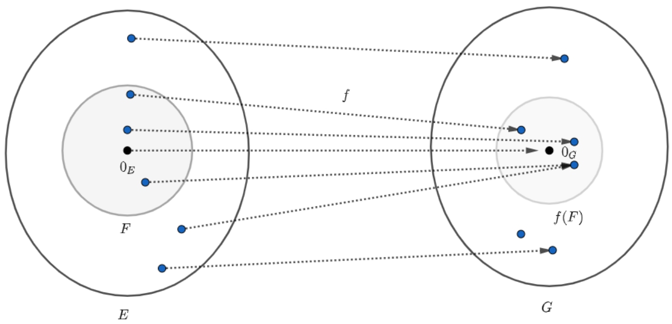
Soit E un $\mathbb{K}$-ev, et f un endomorphisme de E.
Soit F un sev de E

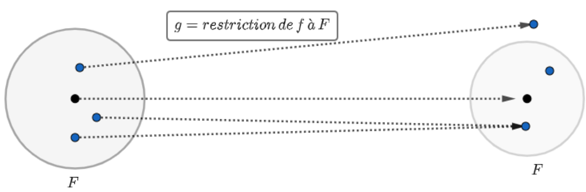
i) On dit que F EST UN SEV STABLE PAR f lorsque $f(F) \subset F$, càd $\forall x \in F, f(\vec{x}) \in F$

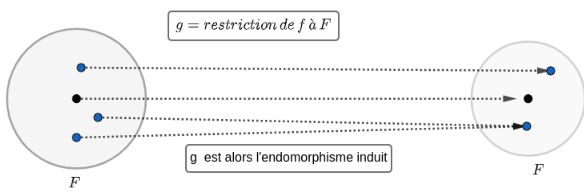
ii) On appelle RESTRICTION DE L'APPLICATION f À F l'application $\boxed{\begin{array}{rccl} f\big|_F : & F & \longrightarrow & E \\ & \vec{x} & \longmapsto & f(\vec{x}) \end{array}}$

iii) Dans le cas où F est stable par f, l'application $\boxed{\begin{array}{rccl} f\big|_F : & F & \longrightarrow & F \\ & \vec{x} & \longmapsto & f(\vec{x}) \end{array}}$ est un endomorphisme de F appelé ENDOMORPHISME INDUIT









5 Quelques démonstrations

- **démonstration du théorème 13**
  - Soit $f \in \mathcal{L}(E,G)$
    On note F un supplémentaire de $\ker f$ dans E.
    On considère u la restriction de f à F, càd $\boxed{\begin{array}{rcl} u : F & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}}$
  - **Nous allons montrer que** u **est un isomorphisme de** F **sur** $\operatorname{Im} f$
  - **montrons que** $\ker(u) \subset \{0\}$
    Soit $x \in \ker(u)$.
    Ainsi $u(x) = 0$, càd $f(x) = 0$ et donc $x \in \ker f$.
    Comme $\ker(u)$ est un sev de l'ensemble de départ de f, on a aussi $x \in F$.
    Ainsi $x \in F \cap \ker f$.
    Comme $F \oplus \ker f = E$, on a $F \cap \ker f = \{0\}$.
    On a prouvé que $x = 0$.

    On a montré que $\ker(u) \subset \{0\}$, et donc que $\ker(u) = \{0\}$ car l'inclusion réciproque est triviale.

    A ce point, on a prouvé **l'injectivité de** u

  - **montrons que** $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} u$
    Soit $y \in \operatorname{Im} f$.
    Il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
    Comme $E = F \oplus \ker f$, il existe $(x_1,x_2) \in F \times \ker f$ tel que $x = x_1 + x_2$.
    Ainsi $y = f(x) = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1)$ car $x_2 \in \ker f$.
    Comme $x_1 \in F$, on a $u(x_1) = f(x_1)$, et ainsi $y = u(x_1)$
    On a prouvé que $y \in \operatorname{Im} u$

    On a montré que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} u$, et donc que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} u$ car l'inclusion réciproque est triviale.

    Avec ce point, on a montré **la surjectivité de** u.

- **démonstration du théorème 14**
  - Soit $f \in \mathcal{L}(E,G)$ et E un ev. de dimension finie.
  - **Nous allons montrer que** $\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$
  - Notons F un supplémentaire de $\ker f$ dans E.
    On a donc $\dim E = \dim \ker f + \dim F$
  - D'après le théorème 13, on sait que F est $\operatorname{Im} f$ sont isomorphes,
    on a ainsi $\dim F = \dim \operatorname{Im} f$
  - Au final, cela donne bien $\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$

- **démonstration du théorème 15**
  - Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$
  - **Montrons que** $\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \operatorname{rg}(g)$
    Il est clair que $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$
    - *En effet:*

      $$\operatorname{Im}(g\circ f) = (g\circ f)(E) = \{g(f(x)) \,|\, x \in E\} = \{g(y) \,|\, y \in \operatorname{Im} f\} \underbrace{\subset}_{\operatorname{Im} f \subset F} \{g(y) \,|\, y \in F\} = g(F) = \operatorname{Im} g$$

    et donc en passant aux dimensions on a le résultat voulu.
  - **Montrons que** $\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \operatorname{rg}(f)$
    - On a $\operatorname{Im}(g \circ f) = g(f(E)) = g(\operatorname{Im} f)$
      or $\dim g(\operatorname{Im} f) \leqslant \dim \operatorname{Im} f$ car *une application linéaire N'augmente PAS la dimension de l'ev de départ*
      et ainsi $\dim \operatorname{Im}(g \circ f) \leqslant \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} f$

- **démonstration du théorème 16**
  - Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g_1 \in GL(E)$
  - **Montrons que** $\mathrm{rg}(f \circ g_1) \leqslant \mathrm{rg}(f)$
    On sait que $\mathrm{rg}(f \circ g_1) \leqslant \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g_1))$.
    Comme g_1 est bijective, on a $\mathrm{rg}(g_1) = \dim E$,
    et ainsi $\mathrm{rg}(f \circ g_1) \leqslant \min(\mathrm{rg}(f), \dim E) = \mathrm{rg}(f)$
  - **Montrons que** $\mathrm{rg}(f) \leqslant \mathrm{rg}(f \circ g_1)$
    On a
    $$f = f \circ (g_1 \circ g_1^{-1}) = (f \circ g_1) \circ g_1^{-1}$$
    et donc
    $$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}((f \circ g_1) \circ g_1^{-1}) \leqslant \min(\mathrm{rg}(f \circ g_1), \mathrm{rg}(g_1^{-1})) = \min(\mathrm{rg}(f \circ g_1), \dim E) = \mathrm{rg}(f \circ g_1)$$
- **démonstration du théorème 18**
  - Soi $f \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim E = n$ finie.
    On suppose qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = id_E$
  - On a
    $$n = \mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\mathrm{rg}(g), \mathrm{rg}(f)) \leqslant \mathrm{rg}(f) \leqslant n$$
    ce qui permet d'affirmer que $\mathrm{rg}(f) = n$, et donc que f est bijective.
  - Comme f est bijective, on sait que f^{-1} existe.
    On a ainsi
    $$f^{-1} = id_E \circ f^{-1} = (g \circ f) \circ f^{-1} = g \circ (f \circ f^{-1}) = g \circ id_E = g$$