Révisions de 1ère année:
Sous-espaces vectoriels

Table des matières

Dans tout ce polycopié, $\mathbb{K}$ désignera comme toujours le corps commutatif $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

exemple 1: Les espaces vectoriels sont partout!

1. $(\mathbb{R}^n,+,.)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (de dimension n)
2. $(\mathbb{C}^n,+,.)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ (de dimension n)
3. $(\mathbb{C}^n,+,.)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (de dimension $2n$)
4. $(\mathbb{R}[X],+,.)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (de dimension infinie)
5. $(\mathbb{R}_n[X],+,.)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (de dimension $n+1$)
6. $(\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),+,.)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (de dimension $p\times q$)
7. $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{K})=\mathbb{K}^{\mathbb{R}}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. (de dimension infinie)
8. $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{K})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, avec I intervalle réel (de dimension n)
9. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites à valeurs réelles est un $\mathbb{R}-$ev. (de dimension infinie)
10. $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites à valeurs complexes est un $\mathbb{C}-$ev. (de dimension infinie)
11. Plus généralement, l'ensemble des fonctions définies sur un ensemble(intervalle) I et à valeurs dans un espace vectoriel est aussi un espace vectoriel.

Comme on appelle VECTEUR *tout élément d'un ev; un polynôme, une fonction, une matrice,... sont des vecteur*

remarque 1 (*mini-memento*)

- *famille génératrice = existence de la décomposition pour tout vecteur*
- *famille libre = unicité de la décomposition*
- *somme de sev = existence de la décomposition pour tout vecteur*
- *somme directe de sev = unicité de la décomposition*

1 Espaces vectoriels

1.1 Définition et règles de calcul (R005)

définition 1: espace vectoriel(à NE PAS retenir)

Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}$-ev, est un triplet $(E, +, .)$ dans lequel E est un ensemble non vide muni de deux lois l'addition : "+" et la multiplication : "." telles que

1. "+"est une loi interne : $(x,y) \in E \times E \to x + y \in E$ qui vérifie :
   - $\forall (x,y) \in E \times E, \quad x + y = y + x$ commutativité
   - $\forall (x,y,z) \in E^3, \quad (x + y) + z = x + (y + z)$ associativié
   - il existe un élément dans E noté $\vec{0}$ tel que $\forall x \in E, x + \vec{0} = \vec{0} + x = x$. $\vec{0}$ est l'élément neutre pour "+"
   - Pour tout $x \in E$ il existe un élément dans E noté $-x$ appelé le symétrique de E tel que $x + (-x) = (-x) + x = \vec{0}$

   autrement dit $(E,+)$ est un groupe commutatif
2. "." est une loi externe : $(\lambda,x) \in \mathbb{K} \times E \to \lambda.x \in E$ qui vérifie :
   - $\forall (\lambda,\mu,x) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times E, \quad (\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$ distributivité
   - $\forall (\lambda,y,x) \in \mathbb{K} \times E \times E, \quad \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$ distributivité
   - $\forall (\lambda,\mu,x) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times E, \quad (\lambda\mu).x = \lambda.(\mu.x)$ associativité
   - $\forall x \in E, \quad 1.x = x$ 1 est neutre pour "."

   rem: on peut écrire $\lambda\vec{x}$ au lieu de $\lambda.\vec{x}$

On a alors aussi:

- $\forall (\lambda,x) \in \mathbb{K} \times E, \quad \lambda.x = \vec{0} \iff x = \vec{0}$ ou $\lambda = 0$
- $\forall (\lambda,\vec{x}) \in \mathbb{K} \times E, \quad (-\lambda).x = -(\lambda.x) = \lambda.(-x)$
- $\forall (\lambda,\mu,x,y) \in \mathbb{K}^2 \times E^2, \quad \lambda.(x - y) = \lambda.x - \lambda.y$ et $(\lambda - \mu).x = \lambda.x - \mu.x$

définition 2: vecteurs et scalaires

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. On appelle

- VECTEURS les éléments de E.
- SCALAIRES les éléments de $\mathbb{K}$.(càd les réels ou les complexes)

Suivant l'humeur, on notera les vecteurs avec une flèche ou sans.

définition 3: combinaison linéaire

Soit $\mathcal{F} = (\vec{x}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille finie de n vecteurs de E.

On appelle COMBINAISON LINÉAIRE DE VECTEURS DE $\mathcal{F}$ toute somme de la forme $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k.\vec{x}_k$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont n scalaires.

rem: en algèbre linéaire la notion de COMBINAISON LINÉAIRE *est fondamental*

1.2 Sous-espace vectoriel

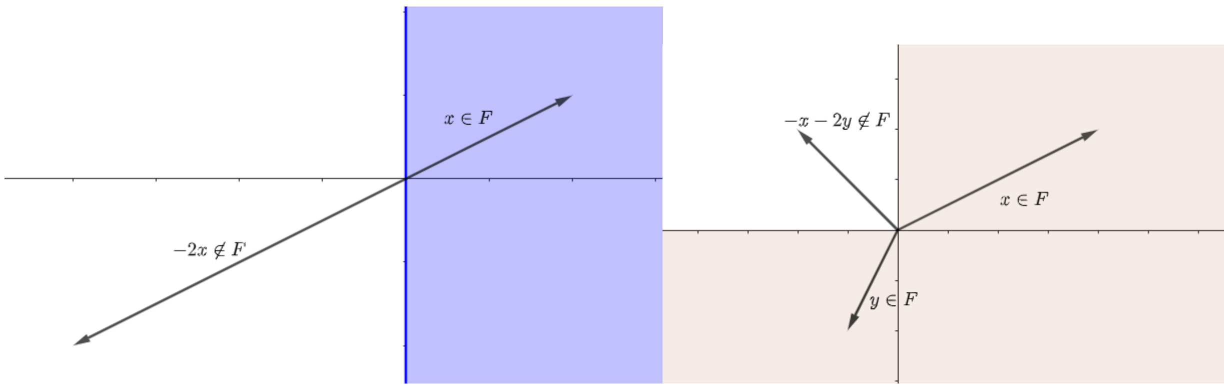
définition 4: sous-espace vectoriel

Soit F une partie (= sous-ensemble) non vide d'un $\mathbb{K}$-ev E.
On dit que F EST UN SOUS-ESPACE VECTORIEL [SEV] DE E lorsque $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in F^2, \forall\lambda \in \mathbb{K}, \lambda.\vec{x}+\vec{y} \in F$
un sev de E est une partie de E non vide, stable par combnaisons linaires

remarque 2

On a comme définition(s) équivalente(s) :

- *F est un sous-espace vectoriel de E lorsque $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in F^2, \forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda.\vec{x} + \mu.\vec{y} \in F$*
- *F est un sous-espace vectoriel de E lorsque $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in F^2, \forall\lambda \in \mathbb{K}, \vec{x} + \vec{y} \in F$ et $\lambda.\vec{x} \in F$*



un demi-plan ou un 3/4 de plan NE sont PAS des sev

remarque 3

1. *F est un sev de E lorsque pour toute famille finie de scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et pour toute famille finie de vecteurs $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$,* DE F *: on a $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k.\vec{x}_k \in F$*

   On dit que $\boxed{F \text{ DOIT ÊTRE STABLE PAR COMBINAISON LINÉAIRE.}}$
2. *Si F est un sev de E, alors les lois "+" et "." de E induisent dans F des lois qui donnent à F une structure de $\mathbb{K}$-ev.*
   Ceci signifie qu'une fois que lorsque l'on a montré que F est un sev de E, on a aussi montré que que F est un espace-vectoriel.
3. *Dans la pratique, pour justifier qu'un ensemble est un espace vectoriel, on montre qu'il est non vide, inclus dans un* ESPACE VECTORIEL CONNU*, et stable par combinaison linéaire.*

exemple 2: $\mathbb{R}_n[X]$ est un sev de $\mathbb{R}[X]$ (démonstration)

- $\mathbb{R}_n[X]$ est inclus dans $\mathbb{R}[X]$
- $\mathbb{R}_n[X]$ est non vide car il contient le polynôme nul qui est bien de degré inférieur ou égal à n
- $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par combinaison linéaire car si P et Q sont deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ et λ un réel alors $\lambda.P + Q$ est bien encore un polynôme de degré inférieur ou égal à n.

ici, pour démontrer la stabilité par combinaison linéaire on s'est appuyé sur nos connaissances sur les polynômes

exemple 3:

Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - 2z = 0\}$. Montrer que F est un sev de $\mathbb{R}^3$.

- *F est bien inclus dans* $\mathbb{R}^3$
- *F n'est pas vide* car contient $(0,0,0)$ (puisque $0 + 0 - 2.0 = 0$)
- *F est stable par combinaison linéaire.*
  En effet, soit $u = (x_1,y_1,z_1)$ et $v = (x_2,y_2,z_2)$ deux éléments de F et $\lambda \in \mathbb{R}$.
  Notons $w = \lambda.u + v$
  On a donc $w = (x_3,y_3,z_3) = (\lambda.x_1 + x_2, \lambda.y_1 + y_2, \lambda.z_1 + z_2)$.
  Pour vérifier que $w \in F$, nous allons vérifier que $x_3 + y_3 - 2z_3 = 0$.
  On a
  $$\begin{aligned} x_3 + y_3 - 2z_3 &= (\lambda.x_1 + x_2) + (\lambda.y_1 + y_2) - 2(\lambda.z_1 + z_2) \\ &= \lambda.(x_1 + y_1 - 2z_1) + (x_2 + y_2 - 2z_2) \end{aligned}$$
  Or $x_1 + y_1 - 2z_1 = 0$ et $x_2 + y_2 - 2z_2 = 0$ car u et v appartiennent à F,
  d'où $x_3 + y_3 - 2z_3 = \lambda.0 + 0 = 0$
  ce qui prouve que $w \in F$!

théorème 1: intersection de sous-espaces vectoriels

Soient $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. (I peut être un ensemble infini d'indices)
Alors :

$$\bigcap_{i \in I} F_i \text{ est un sous-espace vectoriel de E}$$

on retient que "L'intersection de sev est encore un sev"
Attention! En général la réunion de sev n'est pas un sev! (d'où la définition 6=

démonstration 1

Soient $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E.
Notons $G = \bigcap_{i \in I} F_i$.

- *Comme tous les F_i sont des sous-ensembles de E, leur intersection est encore un sous -ensemble de E. Ceci prouve déjà que G est un* sous-ENSEMBLE *de E.*
- *Comme les F_i sont des sev, ils contiennent chacun le vecteur nul: le vecteur nul est donc également présent dans leur intersection. Ceci prouve que G est un ensemble non vide.*
- *Soient $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux éléments de G, et λ un scalaire.*
  Considérons $z = \lambda.\vec{x} + \vec{y}$.
  Comme $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont des éléments de G, ceci signifie qu'ils appartiennent à chacun des F_i. Or chaque F_i est un sev et est donc stable par combinaison linéaire, ceci nous permet d'affirmer que $\lambda\vec{x} + \vec{y}$ est dans tous les F_i, et par conséquent dans leur intersection: ceci prouve que $\lambda\vec{x} + \vec{y} \in G$

définition 5: espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs

Soit $\mathcal{F} = \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\} = (\vec{x}_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une famille finie de vecteurs de E
L'ensemble de <u>toutes</u> les combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de E, noté $\mathrm{vect}(\mathcal{F})$ et appelé ESPACE VECTORIEL ENGENDRÉ PAR $\mathcal{F}$:

$$\boxed{\mathrm{vect}(\mathcal{F}) = \mathrm{vect}(\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}) = \mathrm{vect}(\vec{x}_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} = \{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k.\vec{x}_k \,|\, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}}$$

On montre que c'est le plus petit sev qui contient tous les vecteurs $\vec{x}_i$ avec $i \in [\![1,n]\!]$
càd que tout sev contenant les $\vec{x}_k$ continent aussi $\mathrm{vect}(\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\})$

démonstration 2

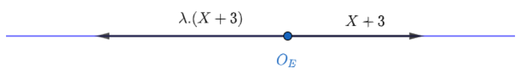
- *Il est facile de montrer que* $\{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k.x_k \,|\, (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}$ *est un sev de* E *en effectuant les vérifications usuelles (non vide, inclus dans* E *et stable par combinaisons linéaires)*
- *Montrons qu'il s'agit du plus petit sev (au sens de l'inclusion)qui contient tous les vecteurs* $\vec{x}_i$ *.*
  Considérons pour cela un sev F *qui qui contient tous les vecteurs* $\vec{x}_i$*,*
  et montrons que $\mathrm{vect}(\{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n\}) \subset F$
  Soit $\vec{x} \in \mathrm{vect}(\{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n\})$
  Il existe donc $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{K}$ *tels que* $\vec{x} = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k.\vec{x}_k$
  Comme F *est stable par combinaison linéaire (car par hypothèse c'est un sev) et que les* $\vec{x}_k$ *sont des éléments de* F*, on en déduit que* $\vec{x} \in F$*.*
  On a prouvé que tout élément de $\mathrm{vect}(\{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n\})$ *était forcément un élément de* F*,*
  ce qui équivaut à dire que $\mathrm{vect}(\{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n\}) \subset F$ *(cqfd)*
  rem: on a prouvé l'implication $\vec{x} \in \mathrm{vect}(\{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n\}) \Longrightarrow \vec{x} \in F$

exemple 4: droites et plans vectoriels

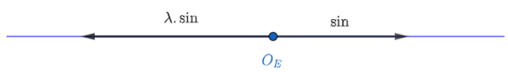
Soient x_1 et x_2 deux vecteurs d'un espace vectoriel E.

- on a $\mathrm{vect}(\vec{0}) = \{\vec{0}\}$. Le singleton $\{\vec{0}\}$ est le plus petit sev du monde!
- si $\vec{x}_1 \neq \vec{0}$ alors $\boxed{\mathrm{vect}\,\vec{x}_1 =< \vec{x}_1 >= \{\lambda.\vec{x}_1 \,|\, \lambda \in \mathbb{K}\}}$ est LA DROITE VECTORIELLE ENGENDRÉE PAR $\vec{x}_1$
- si $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ ne sont pas colinéaires alors
  $\boxed{\mathrm{vect}(\vec{x}_1,\vec{x}_2) =< \vec{x}_1,\vec{x}_2 >= \{\lambda.\vec{x}_1 + \mu.\vec{x}_2 \,|\, (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2\}}$ est LE PLAN VECTORIEL ENGENDRÉ PAR $\vec{x}_1$ ET $\vec{x}_2$

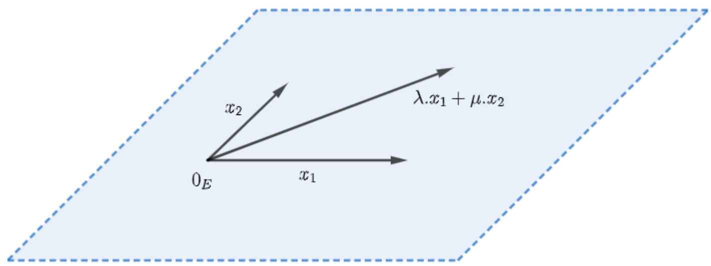
droites vectorielles



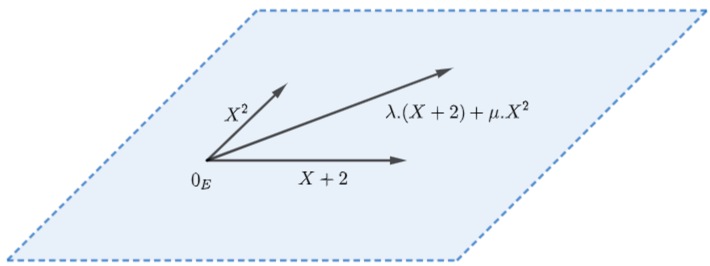
dans un espace de polynômes



dans un espace de fonctions



plans vectoriels



dans un espace de polynômes

exemple 5: un exemple dans $\mathbb{R}^4$

- Soit $E = \mathbb{R}^4$. On considère $\vec{x}_1 = (1,0,0,0), \vec{x}_2 = (0,1,0,0)$ et $\vec{x}_3 = (0,0,1,0)$
- On a par définition

$$\text{vect}(\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3\}) = \{\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda\vec{x}_2 + \lambda_3\vec{x}_3 | (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3\} = \{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,0) \,|\, (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3\}$$

  L'ev engendré par $\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3\}$ est donc l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ qui ont leur quatrième composante nulle(et les trois autres indépendantes entre elles)
- rem: cet espace n'est pas pour autant $\mathbb{R}^3$!

méthode 1: comment montrer qu'un ensemble est un sev II

Pour montrer qu'un sous-ensemble F de l'ev E est un sev il suffit de pouvoir écrire F comme "vect" d'une certaine famille.

Exemple:

Montrer que $F = \{(x + y,x - y,2x + y)|(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$.

Il suffit d'écrire que

$$F = \{(x+y,x-y,2x+y)|(x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1,1,2)+y(1,-1,1)|(x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{vect}((1,1,2),(1,-1,1))$$

F est le sev engendré par les vecteurs $(1,1,2)$ et $(1,-1,1)$

exemple 6: un exemple dans $\mathbb{R}_2[X]$

- On considère $E = \mathbb{R}_2[X]$ et les deux vecteurs $P_1 = P_1(X) = X - 1$ et $P_2 = P_2(X) = X^2 - 1$.
- Les combinaisons linéaires de P_1 et P_2 sont par définition les polynômes P qui s'écrivent $P = aP_2 + bP_1 = a(X^2 - 1) + b(X - 1)$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
  On a donc
  $$\boxed{\text{vect}(\{P_1,P_2\}) =< P_1,P_2 >= \{aX^2 + bX - a - b|(a,b) \in \mathbb{R}^2\}}$$
- Notons G l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à deux qui ont un comme racine.
  i) on a $\boxed{\text{vect}(\{P_1,P_2\}) \subset G}$.
  En effet, soit P un élément de $\text{vect}(\{P_1,P_2\})$
  Ceci signifie qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P = P(X) = a(X^2 - 1) + b(X - 1)$.
  On a $P(1) = a(1^2 - 1) + b(1 - 1) = 0$ et on constate alors que P est un polynôme de degré au plus deux qui possède un comme racine, càd que $P \in G$

  ii) on a $\boxed{G \subset \text{vect}(\{P_1,P_2\})}$.
  En effet, soit P un élément de G.
  Par définition, il existe 3 réels a,b et c tel que $P = aX^2 + bX + c$ et $P(1) = 0$.
  On en déduit donc que $c = -a-b$ et ainsi que $P = aX^2+bX-a-b = a(X^2-1)+b(X-1)$.
  ce qui prouve que P est un élément de $\text{vect}(\{P_1,P_2\})$

  $\boxed{\text{Conclusion: vect}(\{P_1,P_2\}) = G}$

1.3 Somme de deux sous-espaces vectoriels (R006)

définition 6: somme de 2 sev

Soient F_1 et F_2 étant deux sev de E.

i) On appelle ESPACE VECTORIEL SOMME DE F_1 ET F_2, et on note F_1+F_2, l'ensemble :

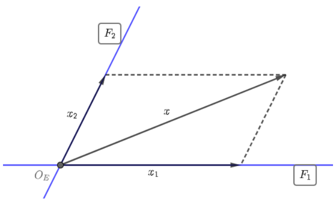
$$\boxed{F_1+F_2=\{\vec{x}_1+\vec{x}_2 | \vec{x}_1\in F_1 \text{ et } \vec{x}_2\in F_2\}}$$

on montre que c'est le plus petit sev de E qui contient à la fois F_1 et F_2,
càd $\boxed{F_1+F_2=\operatorname{vect}(F_1\cup F_2)}$

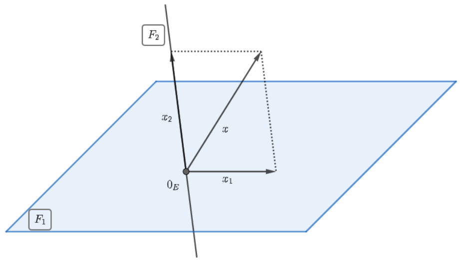
ii) On dit que F_1 ET F_2 SONT EN SOMME DIRECTE, et on note $F_1\oplus F_2$, lorsque **la décomposition de tout vecteur de F_1+F_2 comme somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2 est unique**.

càd $\forall\vec{x}\in F_1+F_2, \exists!(\vec{x}_1,\vec{x}_2)\in F_1\times F_2, \vec{x}=\vec{x}_1+\vec{x}_2$ (L'ÉCRITURE EST UNIQUE)

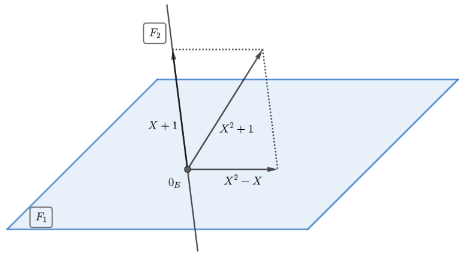
rem: pour tout $\vec{x}\in F_1+F_2$ on sait par définition qu'il existe une décomposition de la forme $\vec{x}=\vec{x}_1+\vec{x}_2$ avec $(\vec{x}_1,\vec{x}_2)\in F_1\times F_2$. Lorsque la décomposition est toujours unique on dira que F_1 et F_2 sont en somme directe



somme de deux droites



somme d'un plan et d'une droite



somme d'un plan et d'une droite

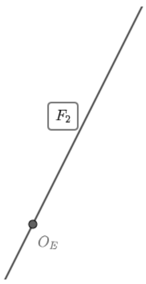
remarque 4 (*Il ne faut surtout pas confondre l'ensemble F_1+F_2 et l'ensemble $F_1\cup F_2$!*)

Pour vous en convaincre considérer l'exemple suivant :

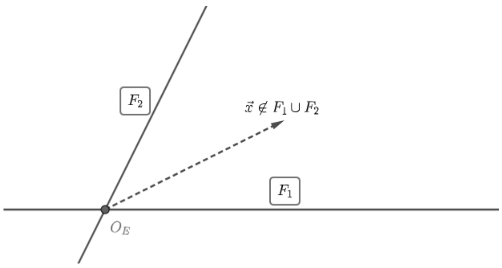
$E=\mathbb{R}^2$, $F_1=\{(x,0)|x\in\mathbb{R}\}$, $F_2=\{(0,x)|x\in\mathbb{R}\}$

- $F_1+F_2=\mathbb{R}^2$ *est le plan tout entier*
- $F_1\cup F_2$ *est simplement la réunion des deux axes.*

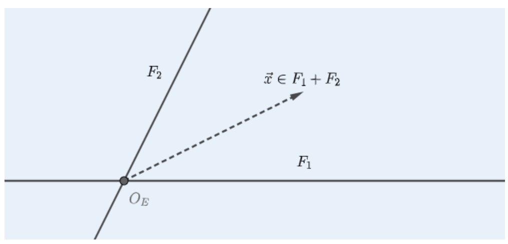
F_1 est une droite



F_2 est une droite



$F_1\cup F_2$ est juste la réunion des 2 droites



F_1+F_2 est un plan

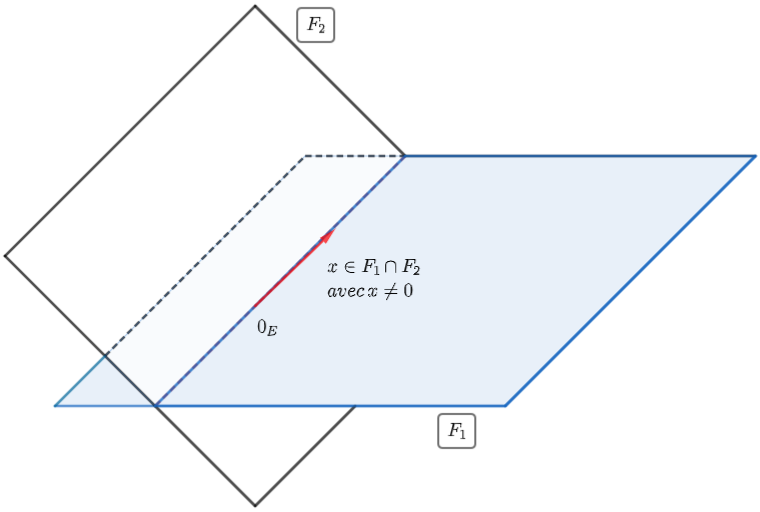
théorème 2: démo en exo

Il y a équivalence entre les trois propriétés suivantes :

i.) F_1 et F_2 sont en somme directe

ii.) La décomposition de $\vec{0}$ est unique.
(càd que si $\vec{0}$ s'écrit $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ avec $\vec{x}_1 \in F_1$ et $\vec{x}_2 \in F_2$ alors forcément $\vec{x}_1 = \vec{0}$ et $\vec{x}_2 = \vec{0}$.)

iii.) $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$



méthode 2: pour montrer que deux sev sont en somme directe

En général, on montre que l'intersection $F_1 \cap F_2$ est réduit au vecteur nul.
exemple:
Montrer que $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + 2z = 0\}$ et $F_2 = \{(2\lambda,\lambda,3\lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}$ sont en somme directe.
Soit $\vec{u} \in F_1 \cap F_2$
Comme $\vec{u} \in F_2$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = (2\lambda,\lambda,3\lambda)$
Et comme de plus $\vec{u} \in F_1$ on a alors $2\lambda + \lambda + 2.3\lambda = 0$, ce qui donne $\lambda = 0$
et donc en reportant $\vec{u} = (0,0,0) = \vec{0}$
Nous venons de prouver que $F_1 \cap F_2 \subset \{\vec{0}\}$, et donc que F_1 et F_2 sont en somme directe

remarque 5 (*attention à la généralisation*)

En revanche, on verra que pour montrer que n sev sont en somme directe, on NE pourra PAS considérer les intersections mais qu'il faudra justifier de l'unicité de la décomposition du vecteur nul

exemple 7:

- Considérons $E = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$
- Notons $F_1 = \{f \in E | f^{(3)} + f^{(2)} + f' + f = 0\}$ et $F_2 = \{f \in E | f$ est 2π périodique$\}$
- On remarque que la fonction sin est dans F_1 et dans F_2
  et donc on en déduit que F_1 et F_2 ne sont pas en somme directe.

définition 7: espaces supplémentaires

On dit que F_1 ET F_2 SONT SUPPLÉMENTAIRES DANS E lorsque $F_1 \oplus F_2 = E$
Il ne faut pas confondre SUPPLÉMENTAIRES ET COMPLÉMENTAIRES
Le complémentaire d'un sev n'est jamais un sev car il ne contient pas le vecteur nul!

théorème 3: démo en exo

Il y a équivalence entre les 4 propriétés ci-dessous :

i.) F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E

ii.) $F_1 + F_2 = E$ et $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$

iii.) $\forall \vec{x} \in E\,,\exists!(\vec{x}_1,\vec{x}_2) \in F_1 \times F_2\,,\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$

iv.) $\forall \vec{x} \in E\,,\exists(\vec{x}_1,\vec{x}_2) \in F_1 \times F_2\,,\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ et $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$

autrement dit, F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E lorsque TOUT VECTEUR $\vec{x}$ DE E PEUT S'ÉCRIRE DE MANIÈRE UNIQUE COMME LA SOMME D'UN VECTEUR $\vec{x}_1$ DE F_1 ET D'UN VECTEUR $\vec{x}_2$ DE F_2.

rem: il existe aussi d'autres caractérisation importantes en dimension finie. (voir plus loin)

théorème 4: admis

Tout sev de F de E admet un supplémentaire dans E

- *c'est à dire qu'il existe une sev G de E tel que $F \oplus G = E$*
- *si F n'est pas l'espace E lui-même, ni le singleton vecteur nul, alors il n'y a pas unicité du sev supplémentaire G*

exemple 8: supplémentaire dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

1. Soit $E = \mathbb{R}^2$ et F une droite vectorielle de E.
   Un supplémentaire de F dans E est toute droite différente de F
2. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et F une droite vectorielle de E.
   Un supplémentaire de F dans E est tout plan ne contenant pas F
3. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et F un plan vectoriel de E.
   Un supplémentaire de F dans E est toute droite non incluse dans le plan

1.4 Familles génératrices (R007)

définition 8: famille génératrice finie

Soit $\mathcal{F} = (\vec{x}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille (finie) de vecteurs d'un espace vectoriel E.
On dit que la famille $\mathcal{F}$ EST UNE FAMILLE GÉNÉRATRICE DE E lorsque $E = \text{vect}(\mathcal{F})$
cád

$$\forall \vec{x} \in E\,,\exists(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n \text{ tels que } \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.\vec{x}_i$$

càd $\mathcal{F}$ ***est une famille génératrice de E lorsque tout vecteur $\vec{x}$ de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{F}$****.(cette décomposition n'étant pas forcément unique)*

théorème 5: utile dans la pratique

i) Toute sur-famille d'une famille génératrice est encore une famille génératrice.

ii) Si un vecteur de la famille génératrice est combinaison linéaire des autres alors en le retirant de la famille on obtient encore une famille génératrice

mais attention car en général, une sous-famille d'une famille génératrice n'est pas génératrice

remarque 6 (*vocabulaire: sous-famille, sur-famille*)

- *la proposition précédente doit vous sembler évidente... car elle l'est!*
- *une* SOUS-FAMILLE *d'une famille $\mathcal{F}$ n'est rien d'autre qu'un sous-ensemble de $\mathcal{F}$.*
- *une* SUR-FAMILLE *d'une famille $\mathcal{F}$ est un ensemble qui contient $\mathcal{F}$*

exemple 9:

Soit $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de E

Si $\text{vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{u} + 3\vec{v}) = E$ alors on peut affirmer que $E = \text{vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ car dans la première famille, le quatrième vecteur $(\vec{u} + 3\vec{v})$ est combinaison linéaire des deux premiers

exemple 10: un exemple à méditer

Soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + 3y = 0\}$ et $E' = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x + 3y = 0\}$

Déterminer une famille génératrice de E et une de E'.

- $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + 3y = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = -3y\} = \{(-3y,y,z) | (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$
  Ainsi
  $$E = \{y(-3,1,0) + z(0,0,1) | (y,z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{vect}((-3,1,0),(0,0,1))$$
- $E' = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x + 3y = 0\} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x = -3y\} = \{(-3y,y,z,t) | (y,z,t) \in \mathbb{R}^3\}$
  Ainsi
  $$E' = \{y(-3,1,0,0) + z(0,0,1,0) + t(0,0,0,1) | (y,z,t) \in \mathbb{R}^3\} = \text{vect}((-3,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$$

rem: E et E' sont des hyperplans: on verra cette année un théorème qui nous permet de donner directement la dimension de ces espaces

1.5 Familles libres. Familles liées (R008)

définition 9: famille libre

Soit $\mathcal{F} = (\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n})$ une famille de vecteurs de E.

i) on dit que LA FAMILLE $\mathcal{F} = (\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n})$ EST LIBRE lorsque

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, (\lambda_1.\vec{x}_1 + \cdots + \lambda_n.\vec{x}_n = \vec{0} \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0)$$

ii) on appelle FAMILLE LIÉE toute famille qui n'est pas libre.

càd qu'une famille est libre ssi la seule combinaison linéaire nulle de vecteurs de $\mathcal{F}$ est obtenue avec des scalaires tous nuls.

remarque 7

- *toute famille contenant le vecteur nul est liée.*
- *la famille $\{\vec{x}\}$ est libre ssi $\vec{x} \neq \vec{0}$.*
- *toute famille contenant deux fois le même vecteur est liée.*

proposition 1

Il y a équivalence entre :

i.) la famille $(\vec{x}_1,\vec{x}_2)$ est liée.

ii.) $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ sont proportionnels. (ou $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ sont colinéaires)

iii.) $\vec{x}_1 = \vec{0}$ ou $\exists\lambda \in \mathbb{K}\,, \vec{x}_2 = \lambda\vec{x}_1$

mais ce n'est pas équivalent à dire seulement que $\exists\lambda \in \mathbb{K}\,, \vec{x}_2 = \lambda\vec{x}_1$.
En effet, considérons $\vec{x}_1 = \vec{0}$ et $\vec{x}_2$ un vecteur non nul.

- *$(\vec{x}_1,\vec{x}_2)$ est une famille liée, car elle contient le vecteur nul*
- *$\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ sont colinéaires, en effet $\vec{x}_2 = 0.\vec{x}_1$*
- *mais il n'existe pas de scalaire λ tel que $\vec{x}_2 = \lambda.\vec{x}_1$*

exemple 11: un exemple dans $\mathbb{R}^4$

Soit $\delta \in \mathbb{R}$.
Dans $E = \mathbb{R}^4$ on considère les vecteurs $\vec{x}_1 = (1,1,1,0)$, $\vec{x}_2 = (2,3,0,2)$ et $\vec{x}_3 = (1,3,-3,\delta)$.
Nous allons étudier, suivant les valeurs de δ la liberté de la famille $(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3)$

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a\vec{x}_1 + b\vec{x}_2 + c\vec{x}_3 = \vec{0}$

On a donc $a(1,1,1,0) + b(2,3,0,-2) + c(1,3,-3,\delta) = (0,0,0,0)$

ce qui équivaut au système $\begin{cases} a+2b+c &= 0 \\ a+3b+3c &= 0 \\ a-3c &= 0 \\ 2b+\delta.c &= 0 \end{cases} \iff \cdots \iff \begin{cases} a &= 3c \\ b &= -2c \\ (\delta-4)c &= 0 \end{cases}$

i) si $\delta \neq 4$ le système précédent équivaut á $a = b = c = 0$.
Dans ce cas, la famille est donc libre

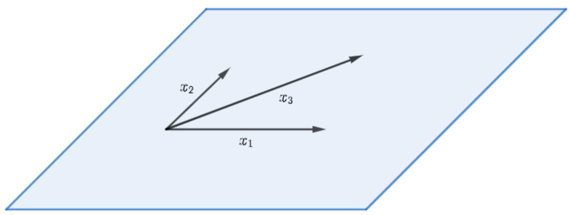
ii) si $\delta = 4$ le système précédent équivaut á $\begin{cases} a &= 3c \\ b &= -2c \end{cases}$.
Comme ce système admet une infinité de solutions (et donc pas seulement $a = b = c = 0$) on en déduit que dans ce cas, la famille est liée

Conclusion: $\boxed{\text{la famille est libre ssi } \delta \neq 4}$

remarque: dans le cas où $\delta = 4$ on a $3\vec{x}_1 - 2\vec{x}_2 + \vec{x}_3 = 0$
On voit qu'il est alors ICI possible d'exprimer chacun des vecteurs en fonction des deux autres.
par exemple $\vec{x}_2 = \dfrac{3}{2}\vec{x}_1 + \dfrac{1}{2}\vec{x}_3$

remarque 8 (*liberté et colinéarité*)

Attention! On voit sur l'exemple précédent qu'il NE suffit PAS de vérifier la non-colinéarité 2 à 2 pour avoir la liberté de la famille $(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3)$!



théorème 6: démo en exercice

Si $(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_k,\vec{x}_{k+1},\dots,\vec{x}_n)$ est une famille libre de E alors les sous-espaces vectoriels $\mathrm{vect}(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_k)$ et $\mathrm{vect}(\vec{x}_{k+1},\dots,\vec{x}_n)$ sont en somme directe.

théorème 7:

Il y a équivalence entre :

i) la famille $\mathcal{F}$ est liée.

ii) l'un des vecteurs $\vec{x}$ de $\mathcal{F}$ est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille

iii) $\exists\, \vec{x} \in \mathcal{F}$,tel que $\vec{x} \in \mathrm{vect}(\mathcal{F} - \{\vec{x}\})$ (simple écriture mathématique de ii))

Attention ! On ne peut pas choisir quel vecteur est combinaison linéaire des autres.

démonstration 3

Notons $\mathcal{F} = (\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$

- $\boxed{i \Rightarrow ii)}$

  On suppose la famille $\mathcal{F}$ liée.

  C'est à dire qu'il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \neq (0,\dots,0)$ *tel que* $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{x}_k = \vec{0}$

  On sait qu'il existe (au moins) un indice j pour lequel $\lambda_j \neq 0$, en isolant le terme d'indice j puis en divisant chaque membre de l'égalité par λ_j, cela donne $\vec{x}_j = \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \dfrac{-\lambda_k}{\lambda_j}\vec{x}_k$

  Le vecteur $\vec{x}_j$ est combinaison linéaire des autres vecteurs.

- $\boxed{i) \Rightarrow ii)}$

  On suppose qu'un vecteur est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille, c'est à dire qu'il existe un indice j et des scalaires (λ_k) tels que $\vec{x}_j = \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \lambda_k \vec{x}_k$

  Notons $\mu_j = -1$ et $\forall k \neq j, \mu_k = \lambda_k$,

  on a alors $\sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k \vec{x}_k = \vec{0}$ et $(\mu_1,\dots,\mu_n) \neq (0,\dots,0)$. *ce qui prouve que $\mathcal{F}$ est liée.*

remarque 9 (*démontrée en exercice*)

Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs et $\vec{x}$ un vecteur.
Si $\{\vec{x}\} \cup \mathcal{F}$ *est liée* ***et si*** $\mathcal{F}$ *est libre* ***alors*** $\vec{x}$ *est combinaison linéaire de $\mathcal{F}$*
autrement dit : ***si*** $\mathcal{F}$ *est une famille libre* ***et si*** $\vec{x} \notin \mathrm{vect}(\mathcal{F})$ ***alors*** $\mathcal{F} \cup \{\vec{x}\}$ *est une famille libre.*

théorème 8: propriétés des sous-familles, des sur-familles

i) Toute sous-famille d'une famille libre est libre .

ii) Toute sur-famille d'une famille liée est liée

théorème 9: des familles libres de référence très pratiques

1. Toute famille de polynômes de degrés distincts deux à deux et ne contenant pas le polynôme nul est libre.
   On dit encore *"toute famille de polynômes échelonnée en degré est libre"*
2. Toute famille échelonnée de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ ne contenant pas le vecteur nul est libre

exemple 12: application du théorème précédent

1. la famille de polynômes $(X^5 + 4X^3 - 2X, X^3 + 12X + 4, 2X^2 - 9, -3X + 4, 5)$ est libre
2. la famille de vecteurs $((1,0,0,0),(3,2,0,0),(2,1,4,0))$ est libre
3. la famille de vecteurs $((0,0,0,3),(0,0,1,5),(0,1,2,7))$ est libre

1.6 Bases (R009)

définition 10:
Une BASE DE E est une famille à la fois libre et génératrice de E.

théorème 10: cas d'une base de cardinal fini
Il y a équivalence entre :
i.) la famille $\mathcal{B} = (\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n})$ est une base de E
ii.) $\forall \vec{x} \in E, \exists!(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.\vec{x}_i$ (LA DÉCOMPOSITION EXISTE ET EST UNIQUE)
"$\mathcal{B}$ est une base de E ssi tout vecteur de E peut se s'écrire, de manière unique, comme une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$"

remarque 10

- *Les scalaires du théorème 10 $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ s'appellent* LES COMPOSANTES *(ou* LES COORDONNÉES*) du vecteur $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}$:* L'ORDRE DES λ_i EST IMPORTANT !
- *Dans le cas d'une base de cardinal fini, les coordonnées d'un vecteur sont alors un $n-$uplet de scalaires. On les note aussi bien horizontalement $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ que verticalement* $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

vecteur▼	$((1,0),(0,1))$	$((2,0),(0,3))$	$((1,1),(0,1))$	<-*base de* $\mathbb{R}^2$ *choisie*
$\vec{x} = (2,3)$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	<-coordonnées

vecteur▼	$(1,X)$	$(3X,2)$	$(X+1,X)$	<-*base de* $\mathbb{R}_1[X]$ *choisie*
$P = 3X + 2$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	<-coordonnées

vecteur▼	$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$	$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\right)$	<-*base de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$
$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$	<-coordonnées

exemple 13: base canonique de $\mathbb{K}^n$

Considérons les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ suivant :

$$\vec{e}_1 = (1,0,\ldots,0), \vec{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0), \ldots\ldots, \vec{e}_k = \underbrace{(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)}_{\text{le 1 est au rang } k}, \ldots\ldots, \vec{e}_n = (0,\ldots,0,1)$$

On appelle BASE CANONIQUE DE $\mathbb{K}^n$ la base $(\overrightarrow{e_1},\ldots,\overrightarrow{e_n})$. Dans cette base, les composantes du vecteur $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ de $\mathbb{K}^n$ sont $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$! *(en effet,* $(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k \vec{e}_k$*)*

La base $(\vec{e}_n,\vec{e}_{n-1},\ldots,\vec{e}_2,\vec{e}_1)$ est une autre base de $\mathbb{K}^n$.

Dans cette base, les composantes du vecteur $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ de $\mathbb{K}^n$ sont $\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

rem: le vecteur $(1,2) \in \mathbb{R}^2$ *a pour coordonnées* $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^2$*!*

exemple 14: base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$

Considérons les vecteurs de $\mathbb{K}_n[X]$ suivant :

$$P_0 = P_0(X) = 1, P_1 = P_1(X) = X, P_2 = P_2(X) = X^2, \ldots, P_k = P_k(X) = X^k, \ldots, P_n = P_n(X) = X^n$$

On appelle BASE CANONIQUE DE $\mathbb{K}_n[X]$ la base $(P_0,P_1,P_2,\ldots,P_n) = (1,X,X^2,\ldots,X^n)$.

Dans cette base, les composantes du polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ sont $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

exemple 15: base canonique de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$

On rappelle que $E = \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ *désigne l'ensemble des matrices à coefficients réels ayant deux lignes et trois colonnes.*

Considérons les matrices suivantes

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La famille $(M_i)_{1\leqslant i\leqslant 6}$ s'appelle LA BASE CANONIQUE DE $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$

Dans cette base, les composantes de la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ sont $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix}$

coordonnées▼	$(1,X)$	$(X,1)$	$((0,1),(1,2))$	$\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)$	$((1,0,0),(1,1,1))$	<-bases
$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$	$3X+2$	$2X+3$	$(3,8)$	$\begin{pmatrix}2&3\\3&2\end{pmatrix}$	$(5,3,3)$	<-vecteurs

dès qu'on se fixe une base, les composantes d'un vecteur définissent le vecteur

2 Espaces vectoriels de dimension finie (R010)

définition 11: ev de dimension finie

On dit qu'un ESPACE VECTORIEL E EST DE DIMENSION FINIE lorsque E admet une famille génératrice finie, (c'est à dire une famille génératrice de cardinal fini.)
rem: par convention $\{\vec{0}\}$ *est de dimen sion* 0

théorème 11: théorème de la base extraite

Soit E un $\mathbb{K}-$ev différent de $\{\vec{0}\}$.
De toute famille génératrice de E on peut extraire une base de E

exemple 16:

On admet que $\mathcal{F}=((1,2,0),(0,-1,1),(1,1,1),(2,4,-3))$ est une famille génératrice de $E=\mathbb{C}^3$

1. Est-ce une base de E?
2. Donner une base de E grâce au théoràme de la base extraite.

1. *card*$(\mathcal{F})=4$ *et* $\dim E=3$, *donc* $\mathcal{F}$ *ne peut être une base de* E.
2. *D'après le théorème de la base extraite, on sait qu'en retirant* ***judicieusement*** *un vecteur de* $\mathcal{F}$, *on obtiendra une base de* E. *On ne peut choisir ce vecteur au hasard: il faut retirer un vecteur qui est combinaison linéaire des autres.*
   On remarque que $(1,1,1)=(1,2,0)+(0,-1,1)$,
   on peut donc affirmer que $((1,2,0),(0,-1,1),(2,4,-3))$ *est une base de* E.
   rem: [*ici*, on n'aurait pu retirer n'importe lequel des 3 premiers vecteurs mais surtout pas le quatrième!

théorème 12: théorème de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{K}-$ev différent de $\{\vec{0}\}$.
Toute famille libre de E peut être complétée en une base.

théorème 13: un théorème plus puissant mais peu utilisé

Soit E un $\mathbb{K}-$ev différent de $\{\vec{0}\}$ et $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E.
Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E, et de plus les vecteurs ajoutés peuvent être choisis dans $\mathcal{G}$

théorème 14:

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

i) E possède au moins une base

ii) toutes les bases de E ont le même cardinal, que l'on appelle LA DIMENSION DE E.

iii) toute famille libre de E a un cardinal $\leqslant \dim E$

iv) toute famille libre de cardinal $\dim E$ est une base de E

v) toute famille génératrice de E a un cardinal $\geqslant \dim E$

vi) toute famille génératrice de cardinal $\dim E$ est une base de E

en dimension quelconque

$$\boxed{\mathcal{B} \text{ base de } E} \Longleftrightarrow \boxed{\begin{cases} \mathcal{B} \text{ famille libre de } E \\ \mathcal{B} \text{ famille génératrice de } E \end{cases}} \Longleftrightarrow \boxed{\forall x \in E, \exists!\,(x_1,x_2) \in F_1 \times F_2, x = x_1 + x_2}$$

$$\boxed{\mathcal{B} \text{ base de } E} \Longleftrightarrow \boxed{\begin{cases} \mathcal{B} \text{ famille libre de } E \\ \text{"la décomposition existe"} \end{cases}} \Longleftrightarrow \boxed{\begin{cases} \text{"la décomposition est unique"} \\ \mathcal{B} \text{ famille génératrice de } E \end{cases}}$$

en dimension finie

$$\boxed{\mathcal{B} \text{ base de } E} \Longleftrightarrow \boxed{\begin{cases} \mathcal{B} \text{ famille libre de } E \\ card(\mathcal{B}) = \dim E \end{cases}} \Longleftrightarrow \boxed{\begin{cases} \mathcal{B} \text{ famille génératrice de } E \\ card(\mathcal{B}) = \dim E \end{cases}}$$

exemple 17: exemples fondamentaux...

- le $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{K}^n$ est de dimension n
- le $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}^n$ est de dimension n
- le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}^n$ est de dimension $2n$
- le $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension $n+1$
- le $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie
- $\dim(E_1 \times \cdots \times E_n) = \dim(E_1) + \cdots + \dim(E_n)$
- on convient que l'espace vectoriel $\{\vec{0}\}$ est de dimension nulle.

exemple 18: d'autres exemples fondamentaux issus de l'analyse

- L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants est un espace vectoriel de dimension 1
- L'ensemble des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants est un espace vectoriel de dimension 2

théorème 15: $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des espaces vectoriels également!

1. $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}-$ev de dimension un
2. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}-$ev de dimension un mais un $\mathbb{R}-$ev de dimension 2

En effet:

i) $\mathbb{R} = \{a.1 | a \in \mathbb{R}\} = \text{vect}(1)$ *et* $\mathbb{C} = \{z.1 | z \in \mathbb{C}\} = \text{vect}(1)$

ii) $\mathbb{C} = \{a.1 + b.i | (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{vect}(1,i)$ *avec* $(1,i)$ *famille libre pour un* $\mathbb{R}-$*ev.*
(il n'existe pas deux réels $(a,b) \neq (0,0)$ *tels que* $a.1 + b.i = 0$*)*

méthode 3: comment montrer qu'une famille est une base d'un sev de dim. finie

D'après la définition, pour montrer qu'une famille est une base de E, il faut et il suffit de montrer que cette famille est libre génératrice de E.
Cependant, si l'on connait la dimension de E, IL SUFFIT DE VÉRIFIER SEULEMENT QUE C'EST UNE FAMILLE LIBRE (ET DE CITER LE THÉORÈME 14 IV)) ou bien DE VÉRIFIER SEULEMENT QUE C'EST UNE FAMILLE GÉNÉRATRICE(ET DE CITER LE THÉORÈME 14 VI))

exemple:

- *D'après le théorème 9, on peut affirmer que la famille* $\mathcal{F} = (X^3 - 3X, X^2 - 2X, X - 1, 1)$ *est une famille libre de* $\mathbb{R}_3[X]$ *car de degrés echelonnés.*
- *Or on sait que* $\mathbb{R}_3[X]$ *est un espace vectoriel de dimension 4*
- *Comme card*$(\mathcal{F}) = 4$*, on peut affirmer que* $\mathcal{F}$ *est une base de* $\mathbb{R}_3[X]$

théorème 16:

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Alors :

i.) tout sev F de E est de dimension finie et l'on a $\dim F \leqslant \dim E$

ii.) $(F = E) \Longleftrightarrow (F \subset E \text{ et } \dim F = \dim E)$

iii.) si F_1 et F_2 sont deux sev de E alors $\boxed{\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2)}$
(la formule précédente est connue sous le nom de FORMULE DE GRASSMAN)

iv.) si $F_1 \oplus F_2 = E$ alors $\dim E = \dim F_1 + \dim F_2$

les deux premiers points du théorème précédent peuvent s'exprimer encore de la manière suivante :
TOUT SEV F D'UN ESPACE VECTORIEL DE DIMENSION FINIE E EST DE DIMENSION FINIE ET $\dim F \leqslant \dim E$, AVEC ÉGALITÉ SI ET SEULEMENT SI $F = E$

théorème 17:

Soient F_1 et F_2 deux sev de E.
Il y a équivalence entre :

i.) F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E

ii.) $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$ et $\dim E = \dim F_1 + \dim F_2$

iii.) $F_1 + F_2 = E$ et $\dim E = \dim F_1 + \dim F_2$

$$\boxed{F_1 \oplus F_2 = E} \Longleftrightarrow \boxed{\begin{cases} F_1 + F_2 = E \\ \dim F_1 + \dim F_2 = \dim E \end{cases}} \Longleftrightarrow \boxed{\begin{cases} F_1 \cap F_2 = \{0_E\} \\ \dim F_1 + \dim F_2 = \dim E \end{cases}} \Longleftrightarrow \boxed{(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \text{ base de } E}$$

différentes caractérisation de $F_1 \oplus F_2 = E$ *spécifique à la dim.finie*

théorème 18: concaténation de deux bases, version de première année

Soient F_1 et F_2 deux sev de bases respectives $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.
Alors

$$\boxed{\text{la somme } F = F_1 + F_2 \text{ est directe } \textbf{ssi } (\mathcal{B}_1\ ,\ \mathcal{B}_2) \text{ est une base de } F}$$

$$\boxed{\text{em particulier,}\quad F_1 \text{ et } F_2 \text{ sont supplémentaires } \textbf{ssi } (\mathcal{B}_1\ ,\ \mathcal{B}_2) \text{ est une base de } E}$$

Dans ce cas, on dit que la base $(\mathcal{B}_1\ ,\ \mathcal{B}_2)$ est UNE BASE ADAPTÉE *à la somme directe $F_1 \oplus F_2$*

théorème 19: complément au théorème 18

Soient F_1 et F_2 deux sev de familles génératrices respectives $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$
Alors :

$$\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \text{ est une famille génératrice de } F_1 + F_2$$

càd que si $F_1 = \operatorname{vect}(\mathcal{F}_1)$ et $F_2 = \mathcal{F}_2$ alors $F_1 + F_2 = \operatorname{vect}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$

définition 12: rang d'une famille de vecteurs

Soit $\mathcal{F} = (\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n})$ une famille de vecteurs de E.
On appelle RANG DE LA FAMILLE DE VECTEURS $\mathcal{F} = (\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n})$ la dimension de $\operatorname{vect} \mathcal{F} = \operatorname{vect}(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n})$
càd la dimension de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs de la famille $\mathcal{F}$
Le rang de la famille $\mathcal{F}$ est donc le nombre MAXIMAL *de vecteurs de $\mathcal{F}$ qui forment une famille libre*

théorème 20: propriétés du rang d'une famille de vecteurs

Soit $\mathcal{F} = (\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n})$ une famille finie de vecteurs de E.
On a:

1. $\operatorname{rg}(\mathcal{F}) \leqslant \min(n, \dim(E))$
2. $\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = card(\mathcal{F}) \iff \mathcal{F}$ est une famille libre
3. $\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = \dim(E) \iff \mathcal{F}$ est une famille génératrice de E

càd

1. *le rang d'une famille de vecteurs est toujours inférieur nombre de ses vecteurs .*
   le rang d'une famille de vecteurs est toujours inférieur à la dimension de l'espace auquel ils appartiennen
2. *une famille est libre ssi son rang est égal à son nombre d'éléments*
3. *une famille est génératrice ssi son rang est égal à la dimension de l'espace*

- comme $\operatorname{vect}(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n}) \subset E$, on a $\dim(\operatorname{vect}(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n})) \leqslant \dim E$, càd $\operatorname{rg}(\mathcal{F}) \leqslant \dim E$
- comme la dimension d'un espace est toujours majoré par le cardinal d'une famille génératrice, on a $\dim(\operatorname{vect}(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n})) \leqslant n$, càd $\operatorname{rg}(\mathcal{F}) \leqslant n$
- comme $\mathcal{F} = (\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n})$ est une famille génératrice de $\operatorname{vect}(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n})$, on a les équivalences suivantes:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \text{ famille libre} &\iff \mathcal{F} \text{ base de } \operatorname{vect}(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n}) \\ &\iff \mathcal{F} \text{ famille génératrice et } card(\mathcal{F}) = \dim(\operatorname{vect}(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n})) \\ &\iff card(\mathcal{F}) = \dim(\operatorname{vect}(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n})) \end{aligned}$$

- comme $\operatorname{vect}(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n}) \subset E$, on a $\operatorname{vect}(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n}) = E$ ssi $\dim(\operatorname{vect}(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n})) = \dim E$, c'est à dire ssi $rg(\operatorname{vect}(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n})) = \dim E$

3 Complément de 2ème année

3.1 Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels

définition 13: (...et théorème!)

Soient $E_1, \ldots, E_p$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- On définit sur le produit cartésien $E_1 \times \cdots \times E_p$ les opérations suivantes:

  i) $\forall(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p, \forall(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$

  $$(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p) + (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p) = (\vec{u}_1 + \vec{v}_1, \ldots, \vec{u}_p + \vec{v}_p)$$

  ii) $\forall(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p, \forall\lambda \in \mathbb{K}$

  $$\lambda.(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p) = (\lambda.\vec{u}_1, \ldots, \lambda.\vec{u}_p)$$

- On considère le vecteur nul $(\vec{0}_{E_1}, \ldots, \vec{0}_{E_p}) \in E_1 \times \cdots \times E_p$

Avec cette structure $E_1 \times \cdots \times E_p$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, appelé ESPACE VECTORIEL PRODUIT

théorème 21: dimension d'un produit de sev

Si $E_1, \ldots, E_p$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie alors

i) $E_1 \times \cdots \times E_p$ est un ev de dimension finie

ii) $\dim(E_1 \times \cdots \times E_p) = \dim E_1 + \cdots + \dim E_p$

exemple 19:

On considère $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_1[X]$

1. Donner quelques éléments de cet ensemble
2. Justifier qu'il s'agit d'un espace vectoriel de dimension fini; en donner la dimension et une base.

3.2 Somme de p sous-espaces vectoriels (=généralisation de la somme de 2 sev

définition 14: somme de p sev

Soit $(F_i)_{i\in\{1,\ldots,p\}}$ une famille de p sev de E.

i) On appelle ESPACE VECTORIEL SOMME DES F_i , et on note $F_1 + \cdots + F_p$ ou $\sum_{i=1}^{p} F_i$, l'ensemble :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{p} F_i = F_1 + \cdots + F_p = \{\vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_p \,|\, \vec{x}_i \in F_i\}}$$

on montre que c'est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient tous les F_i.
càd que $\boxed{F_1 + F_2 + \cdots + F_p = \text{vect}(F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_p)}$

ii) On dit que LES F_i SONT EN SOMME DIRECTE, et on note $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ ou $\bigoplus_{i\in\{1,\ldots,p\}} F_i$, lorsque

$$\forall\vec{x} \in \sum_{i=1}^{p} F_i, \quad \exists!\,(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p, \quad \vec{x} = \sum_{i=1}^{p} \vec{x}_i$$

c'est à dire, la somme de n sev est directe lorsque la décomposition(=l'écriture) de tout vecteur est UNIQUE

théorème 22: pas de caractérisation avec les intersections pour la somme de p sev!

Il y a équivalence entre les deux propriétés suivantes :

i. la famille $(F_i)_{i\in\{1,\dots,p\}}$ est en somme directe

ii. la décomposition de $\vec{0}$ est unique. *(càd que si $\vec{0}=\vec{x}_1+\vec{x}_2+\cdots+\vec{x}_p$ avec $\vec{x}_i\in F_i$ alors $\vec{x}_i=\vec{0}$)*

rem: "la décomposition de tout vecteur est unique ssi celle du vecteur nul est unique"
rem: si la famille $(F_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ est en somme directe alors pour tout (i,j) tel que $i\neq j$ $F_i\cap F_j=\{\vec{0}\}$
mais attention $\boxed{\textit{la réciproque est fausse}}$

exemple 20:

Soit $E=\mathbb{R}^4$.
On considère $F_1=\{(a,a,0,0)|\,a\in\mathbb{R}\}$, $F_2=\{(0,0,b,b)|\,b\in\mathbb{R}\}$ et $F_3=\{(c,c,c,c)|\,c\in\mathbb{R}\}$

1. Que valent les intersections deux à deux de ces espaces?
2. La somme $F_1+F_2+F_3$ est-elle une somme directe?

exemple 21:

Soit $E=\mathbb{R}^4$.
On considère $F_1=\{(a,a,0,0)|a\in\mathbb{R}\}$, $F_2=\{(0,b,b,0)|b\in\mathbb{R}\}$ et $F_3=\{(0,0,c,c)|c\in\mathbb{R}\}$

1. Donner une CNS pour que le vecteur (x,y,z,t) appartienne à $F_1+F_2+F_3$
   On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t)\in F_1+F_2+F_3 &\iff \exists\vec{x}_1\in F_1,\exists\vec{x}_2\in F_2,\exists\vec{x}_3\in F_3,(x,y,z,t)=\vec{x}_1+\vec{x}_2+\vec{x}_3\\
&\iff \exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,(x,y,z,t)=(a,a,0,0)+(0,b,b,0)+(0,0,c,c)\\
&\iff \exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\begin{cases}x&=a\\ y&=a+b\\ z&=b+c\\ t&=c\end{cases}\\
&\iff \exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\begin{cases}a&=x\\ b&=y-x\\ c&=z-y+x\\ \mathbf{t}&=\mathbf{z\text{-}y+x}\end{cases}
\end{aligned}$$

On trouve donc que le vecteur (x,y,z,t) appartient à $\sum_{i=1}^{3}F_i$ **SSI** $t=z-y+x$

Conclusion $\boxed{F_1+F_2+F_3=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4|x-y+z-t=0\}}$

2. La somme $F_1+F_2+F_3$ est directe?

   Oui, car le système précédent a montré que pour un vecteur $(x,y,z,t)\in F_1+F_2+F_3$ fixé, il existe un unique triplet de vecteurs $(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3)\in F_1\times F_2\times F_3$ tel que

$$(x,y,z,t)=\vec{x}_1+\vec{x}_2+\vec{x}_3$$

théorème 23: les sep sont en somme directe

La somme d'une famille finie de sous-espaces propres (d'un endomorphisme) est directe

théorème 24: base adaptée à une décomposition en somme directe

Soient $F_1, \dots, F_p$ p sev (de E) de bases respectives $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$.
Alors

$$\boxed{\text{la somme } F = F_1 + \cdots + F_p \text{ est directe} \iff (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p) \text{ est une base de } F}$$

$$\boxed{\text{en particulier,} \quad E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p \iff (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p) \text{ est une base de } E}$$

Dans ce cas, on dit que la base $(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ obtenue par concaténation est UNE BASE ADAPTÉE *à la somme directe $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$*

théorème 25:

Soient $F_1, \dots, F_p$ p sev en somme directe.
Alors

$$\dim(F_1 \oplus \cdots \oplus F_p) = \dim F_1 + \cdots + \dim F_p$$

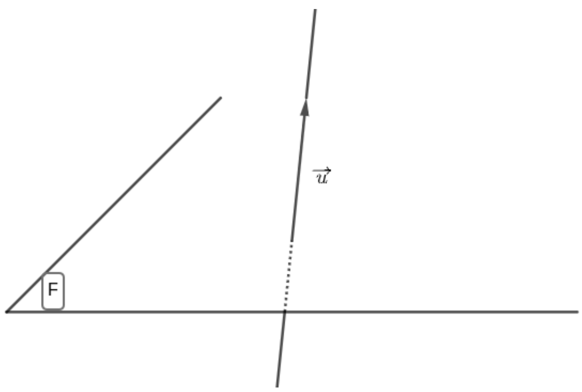
3.3 Hyperplans en dimension finie

Dans ce paragraphe E désigne un espace vectoriel de dimension finie n.

définition 15: hyperplan

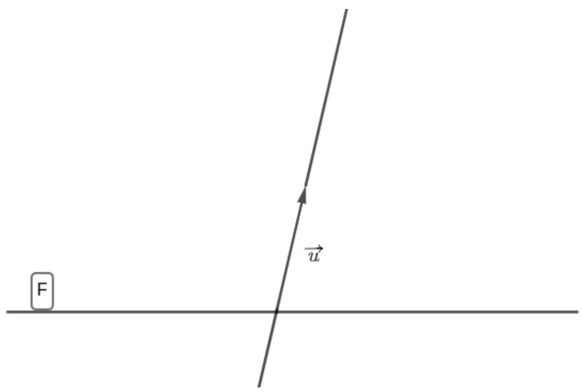
Soit F un sev de E.
On dit que F est UN HYPERPLAN DE E lorsque F admet une droite comme supplémentaire.

càd F est un HYPERPLAN DE *E lorsqu'il existe $\vec{u} \neq \vec{0}$ tel que $E = F \oplus \operatorname{vect} \vec{u}$*



cas où $\dim E = 3$

remarque: on réalise aussi ce schéma dans le cas $\dim E > 3$



cas où $\dim E = 2$

théorème 26: caractérisation des hyperplans par leur dimension

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sev de E.

$$F \text{ est un hyperplan de } E \iff \dim F = \dim E - 1$$

rem:
Dans $E = \mathbb{R}^2$, les hyperplans sont les droites vectorielles.
Dans $E = \mathbb{R}^3$, les hyperplans sont les plans vectoriels
Dans $E = \mathbb{R}_n[X]$, $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est un hyperplan (mais ce c'est pas le seul!)

théorème 27: caractérisation des hyperplans par une équation

Soient

- E un espace vectoriel de dimension finie
- F un sev de E
- $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E

Il y a équivalence entre:

i) F est un hyperplan de E

ii) $\exists (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n - \{(0, \dots, 0)\}$ tel que $F = \{\vec{x} = x_1.\vec{e}_1 + \cdots + x_n.\vec{e}_n \,|\, a_1.x_1 + \cdots + a_n.x_n = 0\}$

cette équation s'appelle UNE ÉQUATION DE L'HYPERPLAN F

rem: on retrouve le fait que:

- *dans $\mathbb{R}^2$, les droites vectorielles ont une équation du type $ax + by = 0$ avec $(a,b) \neq (0,0)$*
- *dans $\mathbb{R}^3$, les plans vectoriels ont une équation du type $ax + by + cz = 0$ avec $(a,b,c) \neq (0,0)$*

caractérisation des hyperplans en dimension finie

$$\boxed{F \text{ hyperplan de } E} \iff \boxed{\dim F = \dim E - 1}$$

$$\iff \boxed{\exists\, \vec{u} \neq \vec{0}, E = F \oplus \operatorname{vect} \vec{u}}$$

$$\iff \boxed{\text{Dans une base donnée, } F \text{ a une équation du type } a_1.x_1 + \cdots + a_n.x_n = 0}$$

exemple 22:

- $F = \{a.X^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X] \,|\, a - b + 2c + d = 0\}$ est un hyperplan de $E = \mathbb{R}_3[X]$
- $F = \{a.X^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X] \,|\, \begin{cases} a - b + +d & = 0 \\ b + c + d & = 0 \end{cases}\}$ est l'intersection de 2 hyperplans de $E = \mathbb{R}_3[X$
- $F = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,|\, a + d = 0\}$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
- $F = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,|\, \begin{cases} a + d & = 0 \\ b - 2c & = 0 \end{cases}\}$ est l'intersection de 2 hyperplans de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

remarque 11 (***rappel sur les manières de définir un sev***)

Un sev de E peut être défini

- *soit par une famille génératrice*
- *soit par une équation ou un système d'équations (ce qui s'apparente à des* CONDITIONS*)*

exemple 23: un même sev définie de 2 manières différentes

$$F = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{cases} x+y-z & = 0 \\ x-t & = 0 \end{cases} \} \qquad \text{définition par sys. d'éq.}$$

$$= \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \\ x \\ u \end{pmatrix} \mid (x,y,u) \in \mathbb{R}^3 \}$$

$$= \{ x.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (x,y,u) \in \mathbb{R}^3 \}$$

$$= \mathrm{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \qquad \text{définition par fam. géné}$$

exemple 24:

Montrer que l'intersection de deux hyperplans est soit un hyperplan, soit un sev de dimension $n-2$

théorème 28: sev vu comme l'intersection d'hyperplans

Soit E un espace vectoriel de dimension n.

1. L'intersection de p hyperplans est un sev de dimension supérieure ou égale à $n-p$.
2. Soit un entier p tel que $0 \leqslant p \leqslant n$ et F un sev de E de dimension $n-p$.
   Alors il possible de trouver p hyperplans tels que F soit l'intersection de ces hyperplans.
   "tout sev de dimension $n-p$ est l'intersection de p hyperplans bien choisis"

rem: on peut interpréter les hyperplans comme des contraintes: si elles sont indépendantes, elles abaissent chacune la dimension d'une unité ...

remarque 12 (***systèmes linéaires et intersection d'hyperplans***)

un système linéaire peut toujours s'interpréter comme une intersection d'hyperplans et réciproquement