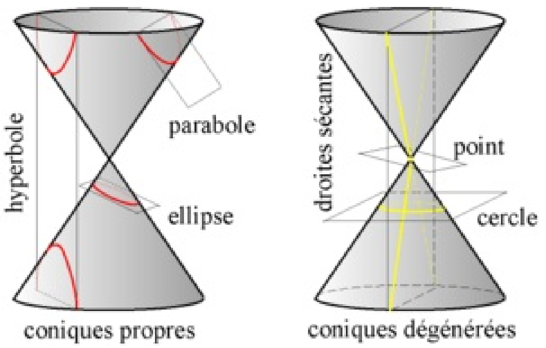
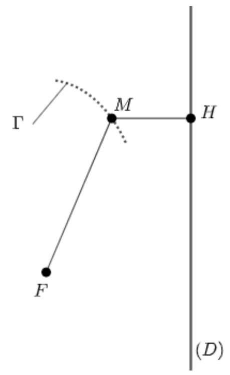
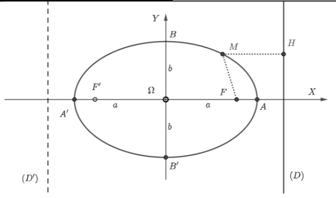
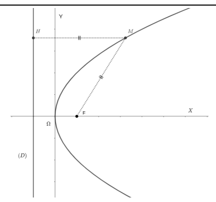
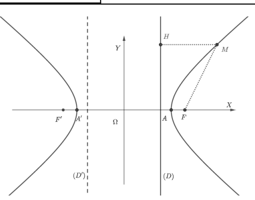
LES CONIQUES

Table des matières

Trois définitions possibles pour le terme CONIQUE

intersection d'un cône et d'un plan	foyer, directrice, excentricité	courbe du 2nd degré
		$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$
✘	✓	✓
pas au programme	"vraies" coniques	"vraies" coniques & coniques "dégénérées"

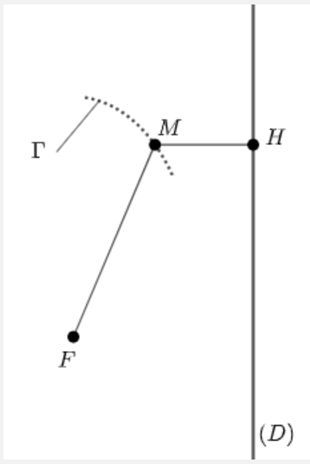
Il existe 3 et seulement 3 "vraies" coniques

ellipse	parabole	hyperbole
$e < 1$	$e = 1$	$e > 1$
$\boxed{\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1}$ avec $a > b > 0$	$\boxed{Y^2 = 2pX}$ avec $p > 0$	$\boxed{\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1}$ avec $a > 0$ et $b > 0$
		

légende: "Γ est une parabole lorsqu'il existe un repère orthonormé dans lequel Γ a pour équation cartésienne $Y^2 = 2pX$ avec $p > 0$"

1 Définition géométrique des coniques

définition 1: définition géométrique des coniques



Soient:
- D une droite
- F un point n'appartenant pas à D
- e un réel strictement positif.

On appelle conique de directrice D, de foyer F et d'excentricité e l'ensemble des points M du plan tels que $\dfrac{d(M,F)}{d(M,D)} = e$

$$\boxed{\Gamma = \{M \in \mathbb{R}^2, \mid d(M,F) = e.d(M,(D))\}}$$

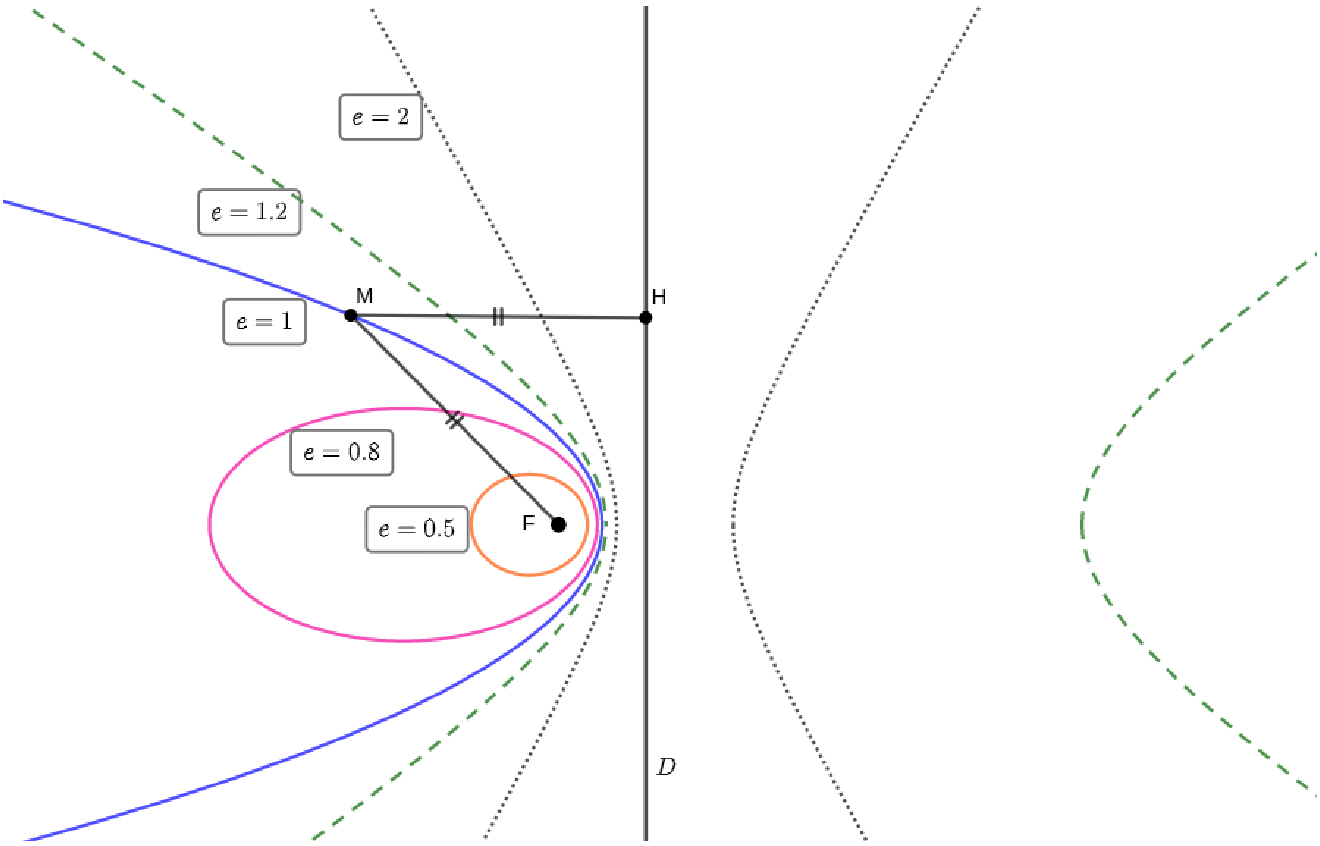
Lorsque

i) $e < 1$ *la conique est appelée* ELLIPSE

ii) $e = 1$ *la conique est appelée* PARABOLE

iii) $e > 1$ *la conique est appelée* HYPERBOLE

rem: avec cette définition géométrique, les seules coniques sont les ellipses, les hyperboles et les paraboles.



exemple 1:

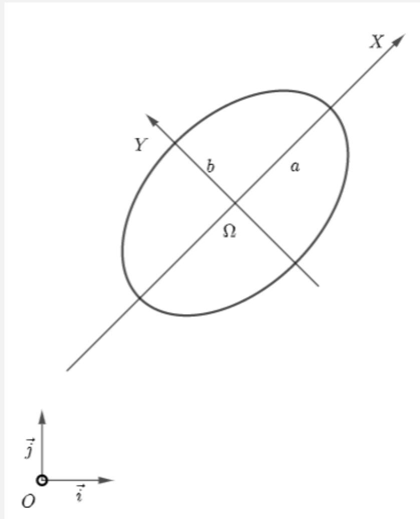
Déterminer l'équation cartésienne de la conique de foyer $F(0,1)$, de droite directrice l'axe des abscisses et d'excentricité $e > 0$.

2 Ellipse

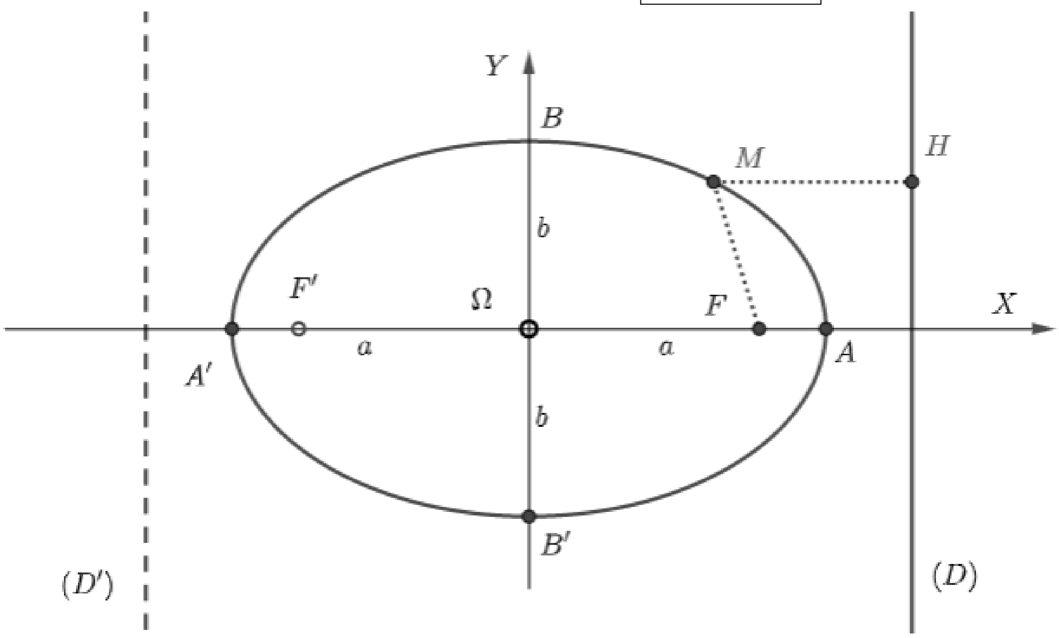
théorème 1: équation reduite d'une ellipse

Soit Γ une courbe plane.
La courbe Γ est une ellipse lorsqu'il existe un repère orthonormé $(\Omega,\vec{I},\vec{J})$ dans lequel Γ possède comme équation cartésienne $\boxed{\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}=1}$ avec $a>b>0$.

- les axes (AA') et (BB') sont les axes de symétries de l'ellipse
- Ω est le centre de symétrie de l'ellipse
- le segment $[\Omega A]$ s'appelle le demi-grand axe
- le segment $[\Omega B]$ s'appelle le demi-petit axe
- a est la longueur du demi-grand axe
- b est la longueur du demi-petit axe
- *la représentation paramétrique possible de cette ellipse est :* $\boxed{\begin{cases} X = & a\cos t \\ Y = & b\sin t \end{cases}}$ *avec* $t \in [-\pi,+\pi]$(*ou* $[0,2,\pi]$ *ou* ...)



dessin à mémoriser pour l'ellipse d'équation réduite $\boxed{\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}=1}$ **avec** $a>0$ **et** $b>0$



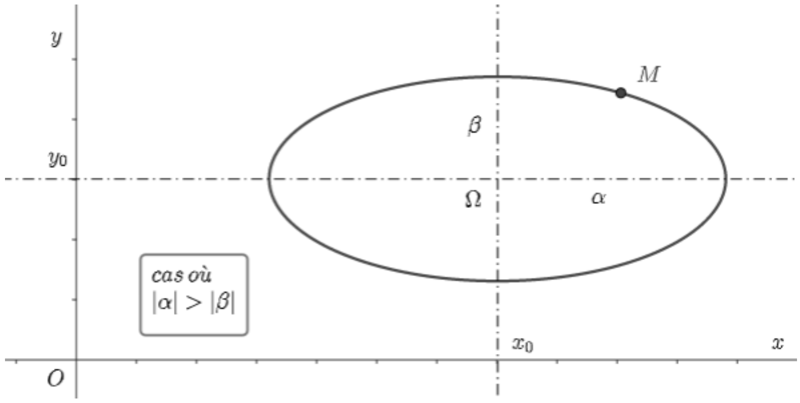
- Les 4 sommets sont $A(a,0)$, $A'(-a,0)$ $B(0,b)$ et $B'(0,-b)$
- Les résultats suivants sont HP
  - $c=\sqrt{a^2-b^2}$ s'appelle la distance focale. On a $F(c,0)$ et $e=\dfrac{c}{a}$
  - La directrice a pour équation $X=\dfrac{a^2}{c}$
  - Cette ellipse est également la conique de foyer $F'(-c,0)$, de directrice (D') d'équation $X=\dfrac{-a^2}{c}$ et de même excentricité e

remarque 1 (***des résultats immédiats par changement de repère***)

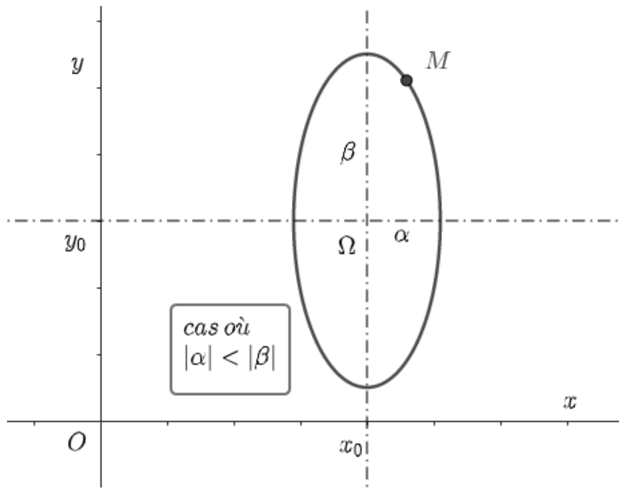
1. *Soit* Γ *courbe d'équation cartésienne* $\boxed{\dfrac{(x-x_0)^2}{\alpha^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{\beta^2}=1}$.

   - *lorsque* $\boxed{\alpha^2=\beta^2}$, Γ *est le cercle de centre* (x_0,y_0) *et de rayon* $|\alpha|$
   - *lorsque* $\boxed{\alpha^2\neq\beta^2}$

     i) si $|\alpha|>|\beta|$, Γ *est une ellipse d'axe principal la droite d'équation* $y=y_0$



     ii) si $|\alpha|<|\beta|$, Γ *est une ellipse d' axe principal la droite d'équation* $x=x_0$



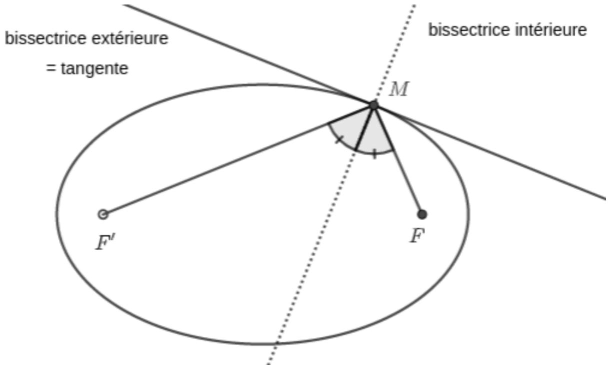
     iii) dans les deux cas, le centre de l'ellipse est le point Ω *de coordonnées* (x_0,y_0)

2. *la courbe qui possède l'équation cartésienne ci-dessus a la représentation paramétrique suivante:*

$$\begin{cases} x= & x_0+\alpha\cos(t) \\ y= & y_0+\beta\sin(t)\end{cases} \text{ avec } t\in[-\pi,+\pi]$$

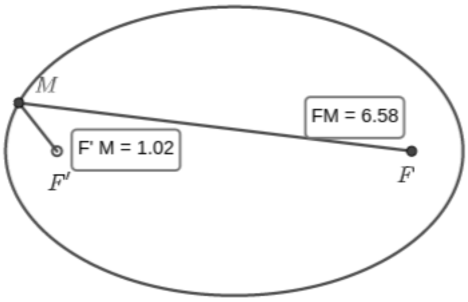
propriété géométrique de la tangente à une ellipse (HP)

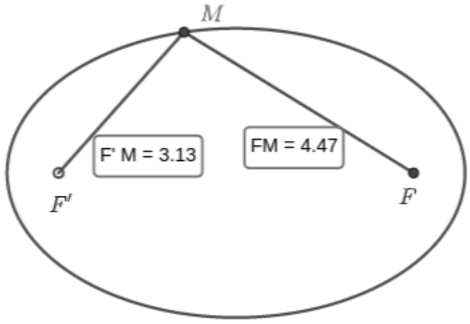
- La tangente à l'ellipse au point M est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{F'MF}$

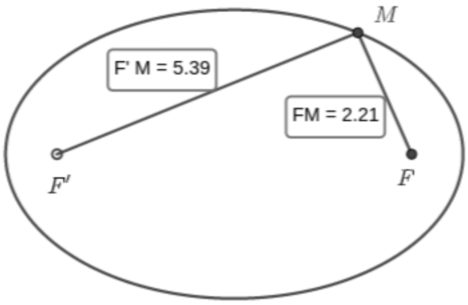


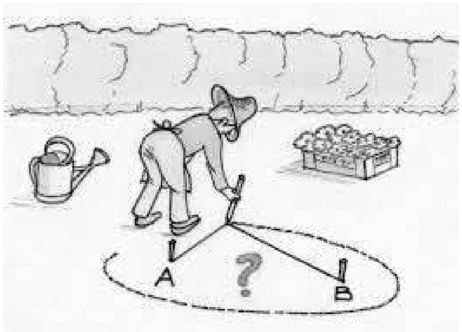
définition bifocale de l'ellipse (HP)

- L'ellipse d'équation $\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}=1$ est aussi l'ensemble des point M tels que $FM+F'M=2a$









3 Hyperbole

définition 2: équation réduite d'une hyperbole

On dit que la courbe Γ est <u>une hyperbole</u> lorsqu'il existe un repère orthonormée $(\Omega,\vec{I},\vec{J})$ dans lequel Γ possède comme équation cartésienne $\boxed{\dfrac{X^2}{a^2}-\dfrac{Y^2}{b^2}=1}$ avec $a>0$ et $b>0$.

- les axes (ΩX) et (ΩY) sont les axes de symétries de l'hyperbole
- Ω est le centre de symétrie de l'hyperbole
- les deux sommets de l'hyperbole sont $A(a{,}0)$ et $A'(-a{,}0)$
- les droites d'équation $Y=\dfrac{b}{a}X$ et $Y=\dfrac{-b}{a}X$ sont les droites asymptotes de l'hyperbole.

une représentation paramétrique possible : $\boxed{\begin{cases}X= & \epsilon.a\,\mathrm{ch}\,t\\ Y= & b\,\mathrm{sh}\,t\end{cases}}$ *avec* $t\in\mathbb{R}$ *et* $\epsilon=\pm1$

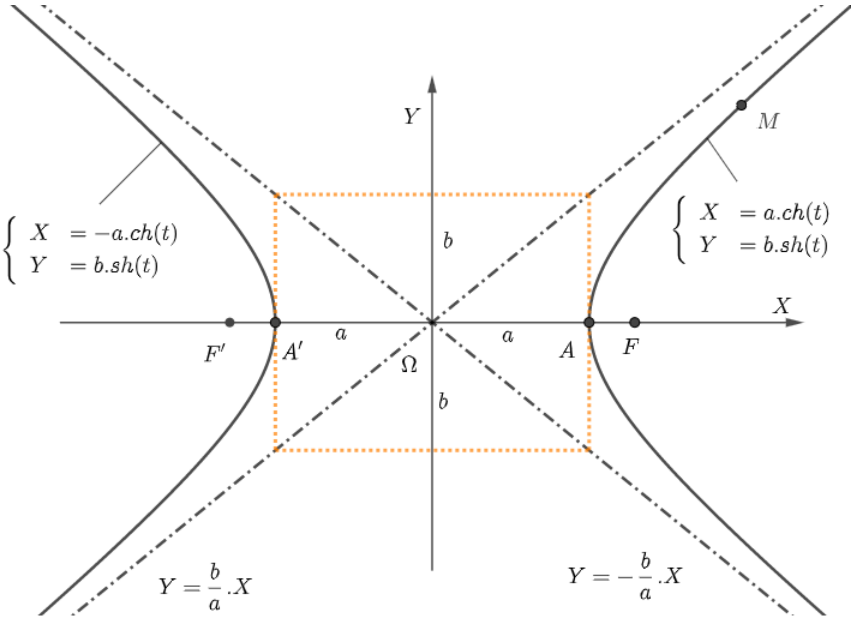
- Les résultats suivants sont HP
  - $c=\sqrt{a^2+b^2}$ s'appelle la distance focale. On a $F(c{,}0$ et $e=\dfrac{c}{a}$
  - La directrice a pour équation $X=\dfrac{a^2}{c}$
  - Cette hyperbole est également la conique de foyer $F'(-c{,}0)$, de directrice (D') d'équation $X=\dfrac{-a^2}{c}$ et de même excentricité

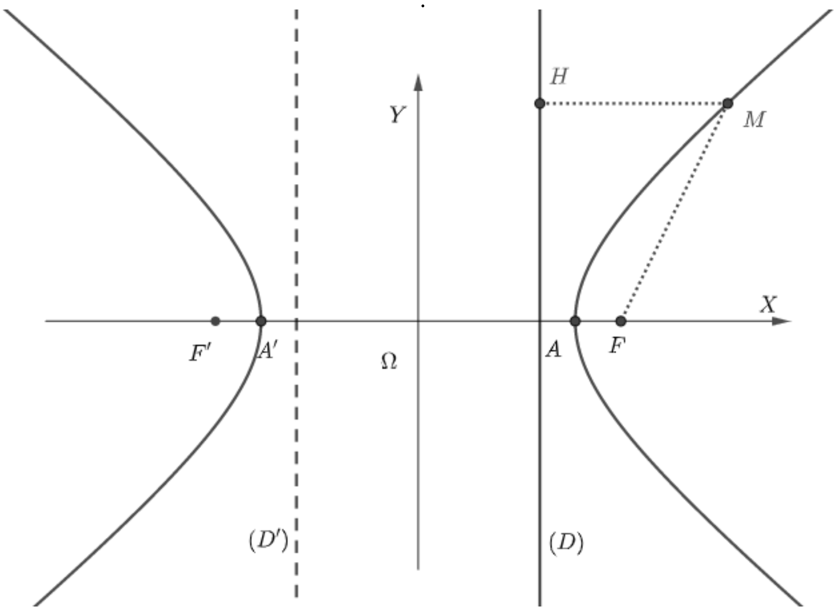
exemple 2:

Soit Γ la courbe d'équation $\dfrac{(x^2-2x+1}{4}-\dfrac{y^2-4x+4}{9}=1$

1. Indiquer un repère dans lequel Γ a une équation du type $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$
2. Dessiner Γ

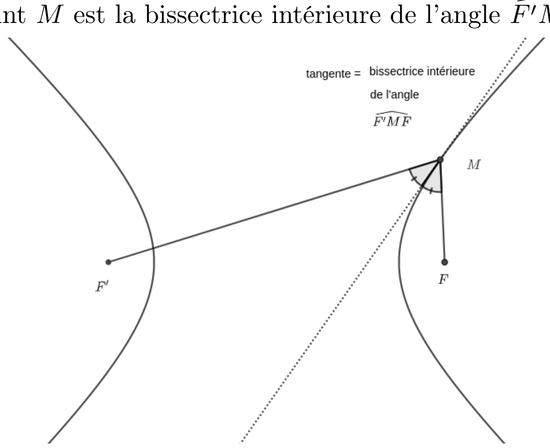
dessins à mémoriser pour l'hyperbole d'équation réduite $\boxed{\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1}$





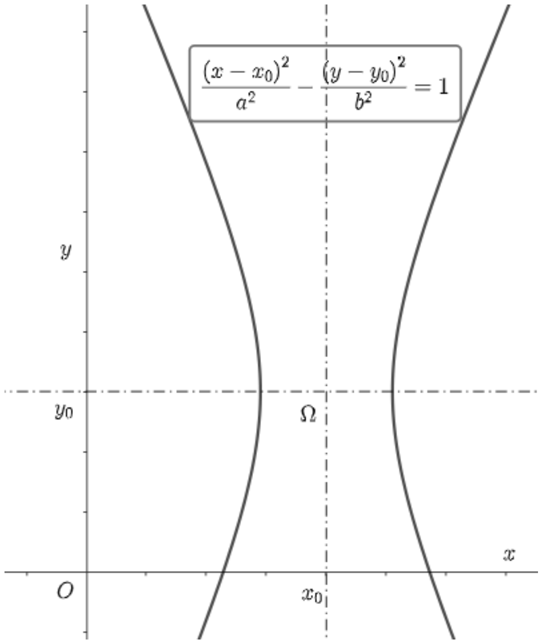
propriété géométrique de la tangente à une hyperbole (HP)

- La tangente à l'ellipse au point M est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{F'MF}$

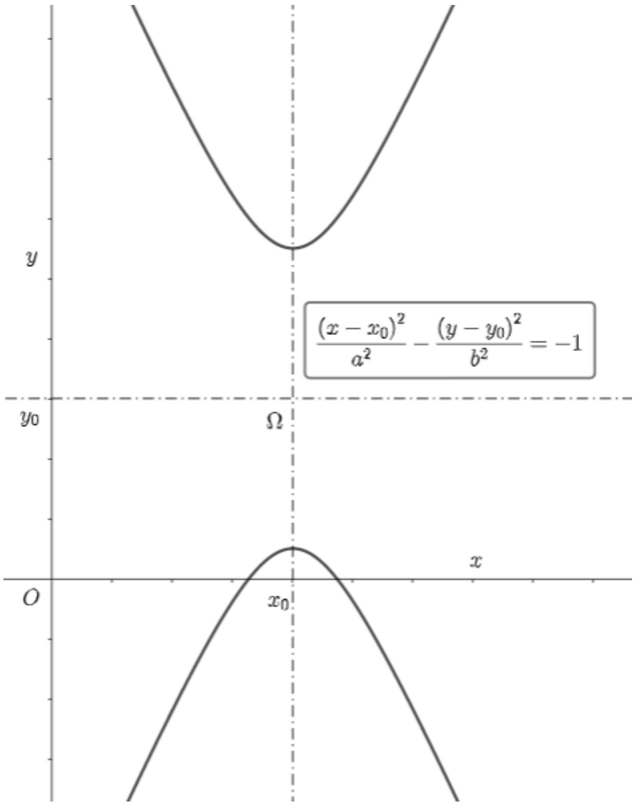


remarque 2 (***des résultats immédiats par changement de repère***)

- *La courbe d'équation* $\boxed{\dfrac{(x-x_0)^2}{\alpha^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{\beta^2} = 1}$ *est une hyperbole*



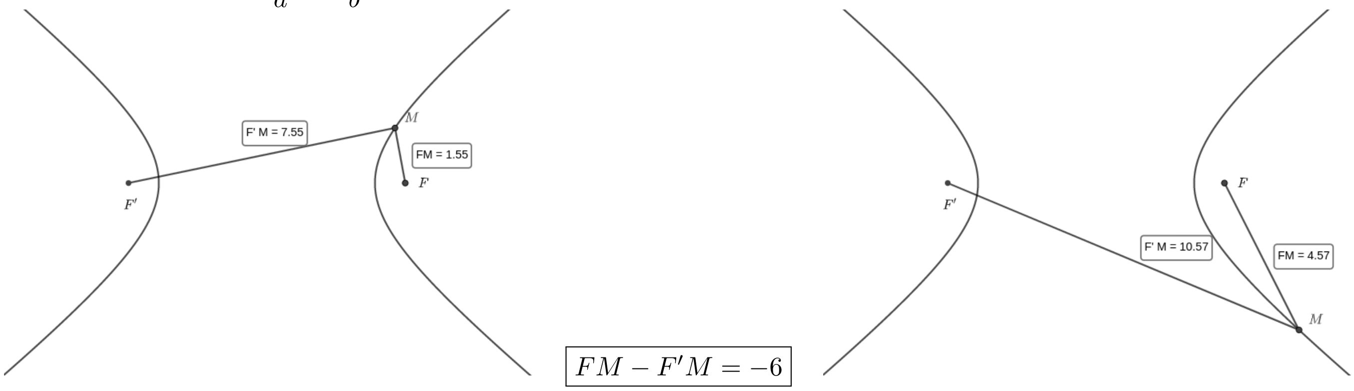
- *La courbe d'équation* $\boxed{\dfrac{(x-x_0)^2}{\alpha^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{\beta^2} = -1}$ *est une hyperbole*



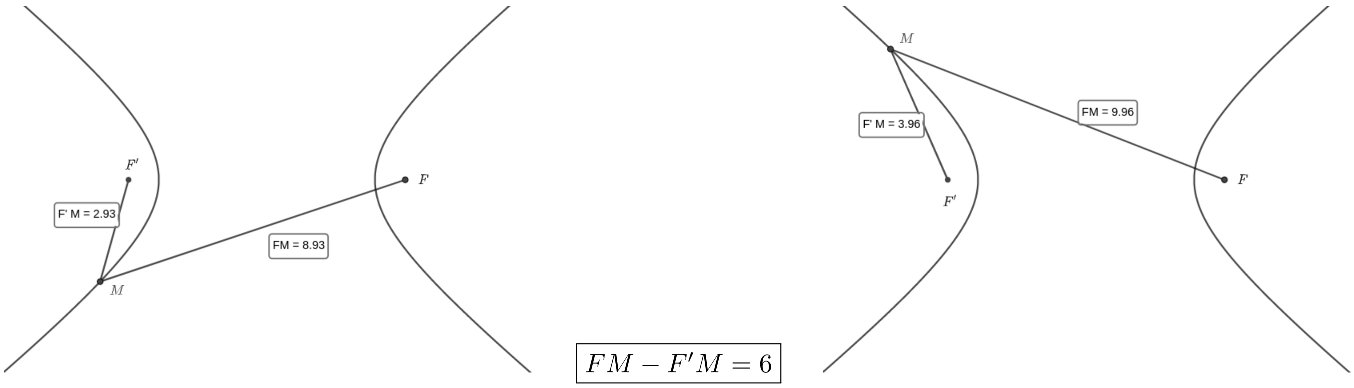
- *les hyperboles ci-dessus possèdent respectivement les représentations paramétriques suivantes:*
$\begin{cases} x = & x_0 + \varepsilon\alpha\,\mathrm{ch}(t) \\ y = & y_0 + \beta\,\mathrm{sh}(t) \end{cases}$ *avec* $t \in \mathbb{R}$ *et* $\varepsilon = \pm 1$ *et* $\begin{cases} x = & x_0 + \beta\,\mathrm{sh}(t) \\ y = & y_0 + \varepsilon\alpha\,\mathrm{ch}(t) \end{cases}$ *avec* $t \in \mathbb{R}$ *et* $\epsilon = \pm 1$
- *les hyperboles ci-dessus ont les mêmes droites asymptotes:* $y - y_0 = \dfrac{\pm b}{a}.(x - x_0)$

définition bifocale de l'hyperbole (HP)

- L'hyperbole d'équation $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ est aussi l'ensemble des point M tels que $|FM - F'M| = 2a$



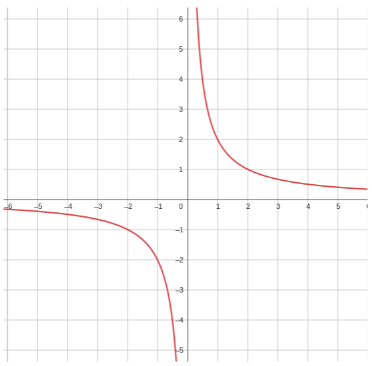
$FM - F'M = -6$



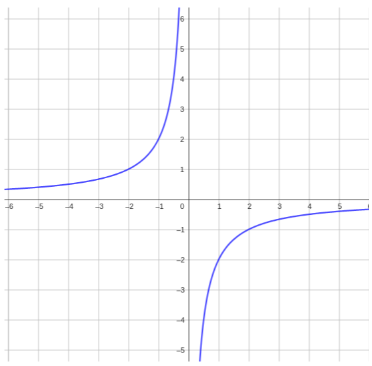
$FM - F'M = 6$

théorème 2:

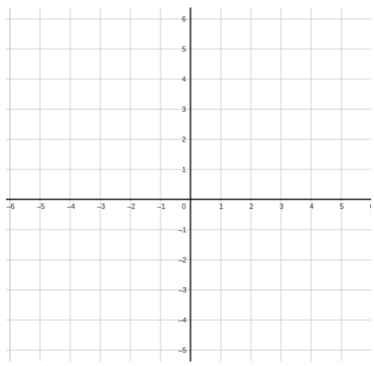
Soit k un réel NON nul.
La courbe d'équation $xy = k$ est une hyperbole dont les asymptotes sont les axes du repère.
rem: dans le cas où $k = 0$, le courbe n'est pas une hyperbole mais simplement la réunion de deux droites (l'axe (Ox) et l'axe (Oy)



$k > 0$



$k < 0$



$k = 0$

exemple 3: hyperbole équilatère (HP)

On dit qu'une hyperbole est équilatère lorsque ses asymptotes sont perpendiculaires.

1. Montrer qu'une hyperbole est équilatère ssi $a = b$ dans son équation réduite
2. Montrer que si une hyperbole est équilatère alors il existe un repère orthonormé $(\Omega_1, \vec{I_1}, \vec{J_1})$ dans lequel son équation est du type $X_1.Y_1 = k$ avec k constante réelle non nulle.
   Etablir la réciproque

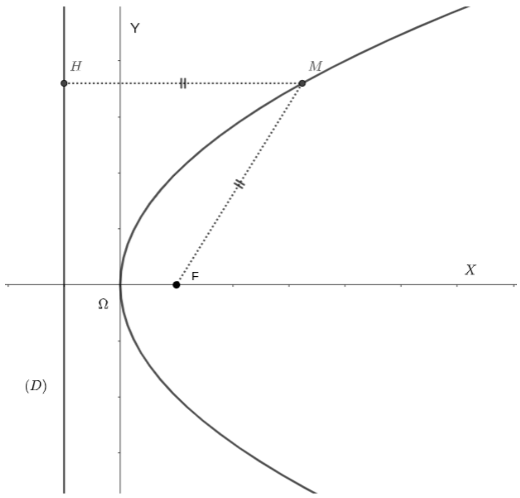
4 Parabole

définition 3: équation réduite d'une parabole

On dit que la courbe Γ est une parabole lorsqu'il existe un repère orthonormé $(\Omega,\vec{I},\vec{J})$ dans lequel Γ possède comme équation cartésienne $\boxed{Y^2 = 2pX}$ avec $p > 0$

- la droite (ΩX) est l'axe de symétrie de la parabole
- $\Omega(0,0)$ est le sommet de la parabole.
- *une représentation paramétrique possible est alors* $\boxed{\begin{cases} X &= \dfrac{t^2}{2p} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \\ Y &= t \end{cases}}$

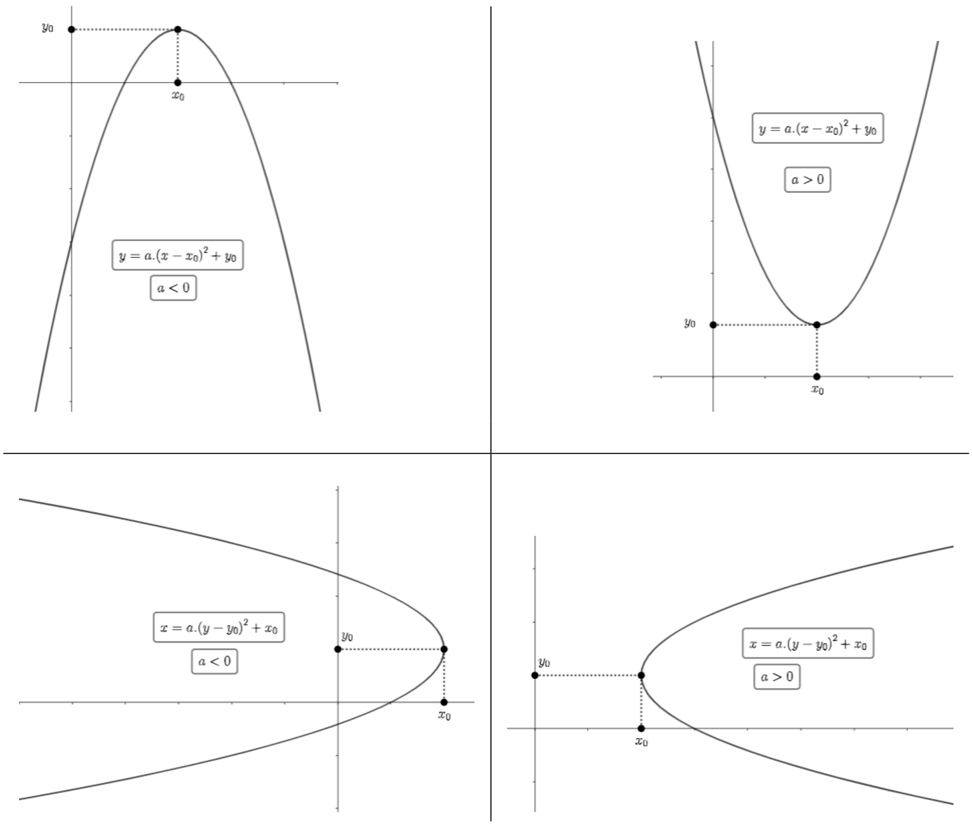
dessin à mémoriser pour la parabole d'équation réduite $\boxed{Y^2 = 2pX}$



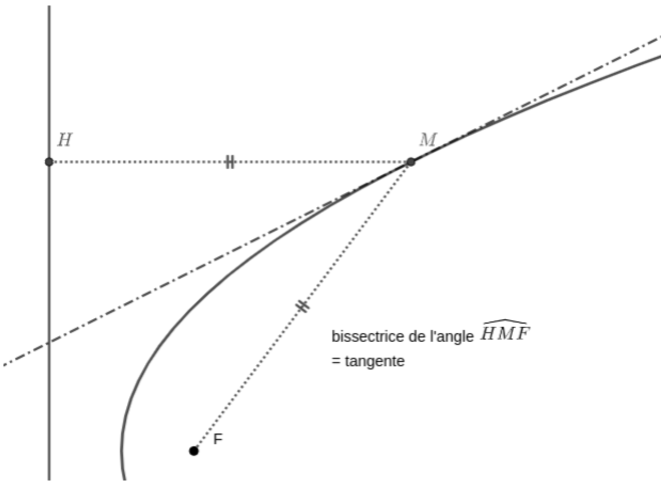
- Les résultats suivants sont HP
  - le foyer $F(\frac{p}{2},0)$
  - la directrice a pour éq. $D = \frac{-p}{2}$
  - $e = 1$ biens sûr

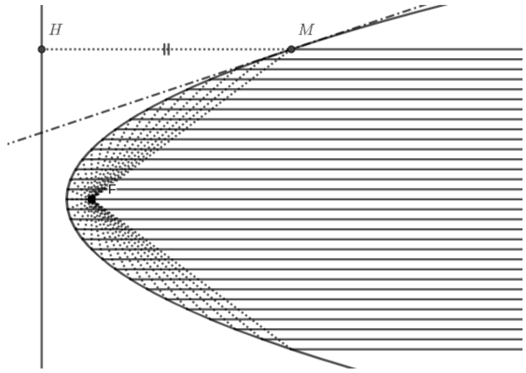
théorème 3:

Une courbe Γ est une parabole lorsqu'il existe un repère orthonormé dans lequel une des coordonnées est une fonction du second degré de l'autre.



propriété géométrique de la tangente à une parabole: miroir parabolique





5 Réduction des coniques

définition 4: dêfinition de 'conique' à notre programme (rappel)

On appelle CONIQUE, ou COURBE DU SECOND DEGRÉ, toute courbe Γ qui possède une équation du type

$$\boxed{ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0}$$

où (a,b,c,d,e,f) sont des constantes réelles avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$

La question qui se pose est la question dite de **la réduction de la conique**:
Il s'agit à partir d'une équation du seconde degré de donner la nature de la conique.
Suivant que le terme dit croisé xy est présent ou pas, on procédera de manières différentes
La question qui se pose est la question dite de **la réduction de la conique**:

Il s'agit à partir d'une équation du seconde degré de donner la nature de la conique et ses éléments.

Suivant que le terme dit croisé xy est présent ou pas, on procédera de manières différentes:

1. PAS DE TERME EN xy?
Une simple translation de l'origine du repère suffit pour conclure: la méthode employée est celle de la mise sous forme canonique.

méthode 1: réduction d'une conique sans terme croisé

Lorsque $b = 0$ on met les termes en x et en y sous forme canonique: puis on interprète, grâce aux équations réduites de référence, le résultat trouvé.

exemple 4: λ est un paramètre réel

Déterminer la nature de la courbe $\Gamma_\lambda : (\lambda+1)x^2 + (\lambda+1)x + \lambda^2 y^2 + y + \dfrac{1}{4} = 0$

exemple 5:

(a) Déterminer la nature et les éléments de la courbe Γ_m d'équation $9x^2 + my^2 - 18x + 16y - 11 = 0$ avec $m \in \mathbb{R}$

(b) Même question avec $\Gamma_m\ :\ mx^2 + 4mx + (m-1)y^2 + 2 = 0$

Pour chacune de ces deux équations, on pourra s'intéresser également aux nombre de courbes Γ_m qui passe(nt) par un point (x,y) fixé.

2. **PRÉSENCE DU TERME EN xy?**
   Une rotation du repère avec éventuellement un changement d'origine est nécessaire: la méthode employée est celle de la réduction des matrices, et éventuellement de la mise sous forme canonique. (voir ce qui suit)

Dans le repère orthonormé direct $(0,\vec{i},\vec{j})$, on considère la courbe Γ d'équation

$$\boxed{ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad \text{(E)}}$$

Ecriture de l'équation sous forme matricielle

On pose

$$U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix}$$

En identifiant $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$, on a

$$U^T.A.U = ax^2 + 2bxy + xy^2 \qquad \text{et} \qquad L.U = dx + ey$$

Ainsi l'équation (E) s'écrit $\boxed{U^T.A.U + L.U + f = 0 \qquad (E)}$

remarque 3

La matrice A est une matrice symétrique à coefficients réels, elle est donc diagonalisable à l'aide d'une matrice de passage orthogonal (théorème spectral)

exemple 6:

Soit Γ la courbe d'équation $2x^2 + 4xy - y^2 + 3x - 2y + 5 = 0$
Ecrire cette équation à l'aide de matrices.

remarque 4 (*genre d'une conique (Nostradamus?)*)

On dit que la conique Γ est :

- ***du genre hyperbole*** *lorsque* $\det A < 0$
  Dans ce cas, si la conique n'est pas dégénérée, c'est une hyperbole
- ***du genre parabole*** *lorsque* $\det A = 0$
  Dans ce cas, si la conique n'est pas dégénérée, c'est une parabole
- ***du genre ellipse*** *lorsque* $\det A > 0$
  Dans ce cas, si la conique n'est pas dégénérée, c'est une ellipse

exemple 7: genre $\neq$ nature

Donner le genre et la nature des coniques suivantes

1. Γ_1 d'équation $xy = 1$
2. Γ_2 d'équation $xy = 0$
3. Γ_3 d'équation $(x + y)(x - 2y + 1) = 0$

méthode 2: réduction d'une conique avec un terme en xy

Γ désigne la courbe d'équation $\boxed{ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \quad (E) \text{ dans } (0,\vec{i},\vec{j})}$

1. On écrit les matrices $U=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ $\quad L=\begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix}$

   Dans $(0,\vec{i},\vec{j})$, l'équation s'écrit $\boxed{U^T.A.U+L.U+f=0}$

2. On diagonalise la matrice A sous la forme $P.D.P^{-1}$ avec $P \in O_2(\mathbb{R})$
   - On calcule le polynôme caractéristique de A et on cherche ses racines λ_1 et λ_2
   - On cherche le sep associé à λ_1: il s'agit d'une droite dont on considérera un vecteur directeur UNITAIRE $\overrightarrow{I}=\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$
   - Le deuxième vecteur propre étant forcément orthogonal, on prend $\overrightarrow{J}=\begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$
   - On note $P=\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la bon $(\vec{i},\vec{j})$ à la bon $(\vec{I},\vec{J})$
   - On a $A=P.D.P^{-1}$ avec $D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ et $P \in O_2(\mathbb{R})$

   "les vecteurs propres de A donnent la direction des axes de la conique"

3. On se place dans le nouveau repère $(O,\vec{I},\vec{J})$ et on écrit l'équation dans ce repère
   Dans ce repère, les coordonnées sont notées (X,Y)

   1er cas: si $L=0$ (càd pas de terme du premier ordre) .
   On peut directement dire que l'équation est

   $$\lambda_1.X^2+\lambda_2.Y^2+f=0$$

   2nd cas: sinon .

   - On écrit que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$. (on peut noter $V=\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$et l'on a $U=P.V$)
   - On écrit que l'équation dans le nouveau repère est

   $$\lambda_1.X^2+\lambda_2.Y^2+L.P.V+f=0$$

   - On calcule LPV dans l'équation et l'on met sous forme canonique les trinômes comme dans la méthode "Les Coniques I"

4. *Si l'on demande le tracé: on dessine le système d'axes du nouveau repère (dans le nouveau repère) et l'on peut ainsi facilement dessiner la conique*

5. *Si l'on demande les sommets et les axes de symétries: on les détermine dans le nouveau repère, puis on "revient" dans l'ancien repère avec* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=P^{-1}.\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=P^T.\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

exemple 8: premier cas, sans partie linéaire $(L=0)$

Réduire la conique Γ d'équation (E) : $x^2+8xy-5y^2-3=0$ dans le repère $(0,\vec{i},\vec{j})$

1. - On note $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ et $U=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. *(rem: pas de besoin de définir L ici)*
   - L'équation s'écrit $U^T.A.U-3=0$
   - On a $\det(A)=-21<0$ donc la conique est "du genre hyperbole"

2. Recherche des éléments propres de A
   - $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -4 \\ -4 & X+5 \end{vmatrix} = (X-1)(X+5) - 16 = X^2 + 4X - 21$ qui a pour racines $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = -7$
   - La recherche de $E_3(A)$ donne $E_3(A) = \text{vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi on pose $\boxed{\overrightarrow{I} = \frac{1}{\sqrt{5}}.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{i} + \vec{j})}$
   - On pose alors $\boxed{\overrightarrow{J} = \frac{1}{\sqrt{5}}.\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-\vec{i} + 2\vec{j})}$ et l'on sait que $\vec{J} \in E_{-7}(A)$ car les sep sont $\perp$
3. - Dans le repère $(O,\vec{I},\vec{J})$, l'équation de Γ est donc

$$3X^2 - 7Y^2 - 3 = 0 \qquad \text{càd} \qquad \boxed{\frac{X^2}{1^2} - \frac{Y^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)^2} = 1}$$

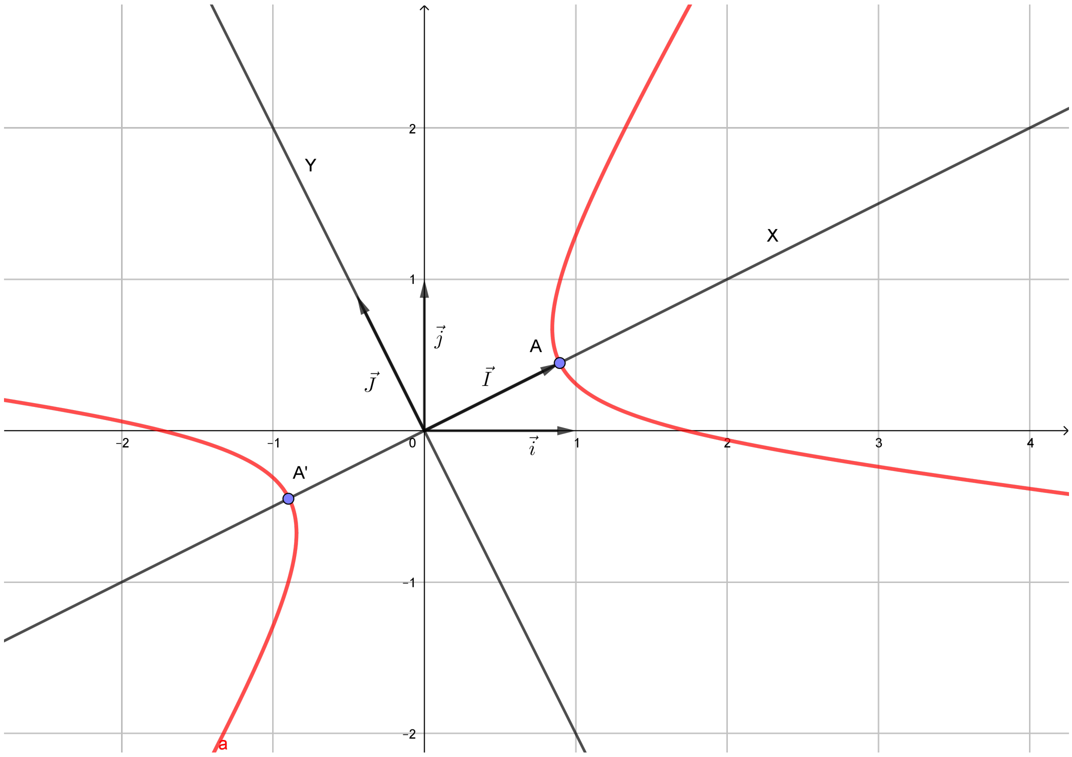
   - On reconnait l'équation d'une HYPERBOLE.
   - *Les axes de symétries sont les droites d'équations* $X = 0$ *et* $Y = 0$
   - *Les asymptotes sont les droites d'équations* $Y = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}X$
4. Pour écrire les équations dans l'ancien repère des droites ci-dessus:
   - On note P la matrice de passage de la bon $(\vec{i},\vec{j})$ à la bon $(\vec{I},\vec{J})$.
     On a ainsi $\boxed{P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})}$
   - La formule de changement de base pour les vecteurs donne

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P^{-1}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P^T.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2x + y \\ -x + 2y \end{pmatrix}$$

   - Les axes de symétries sont donc les droites d'équations $2x + y = 0$ et $-x + 2y = 0$
   - Les asymptotes sont donc les droites d'équations

$$-x + 2y = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.(2x + y) \qquad \text{càd} \qquad (2\sqrt{3} + \sqrt{7})x + (\sqrt{3} - 2\sqrt{7})y = 0$$

$$-x + 2y = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.(2x + y) \qquad \text{càd} \qquad (2\sqrt{3} - \sqrt{7})x + (\sqrt{3} + 2\sqrt{7})y = 0$$



exemple 9: deuxième cas, avec partie linéaire

Soit Γ *d'équation* (E) : $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y - 6 = 0$ *dans le repère* $(0,\vec{i},\vec{j})$.

1.
   - On note $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ et $L = (-2\sqrt{2} \quad -2\sqrt{2})$ ainsi que $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
   - L'égalité (E) s'écrit alors $U^T.A.U + LU - 6 = 0$
   - On a $\det(A) = 16 > 0$ donc la conique est "du genre ellipse".

2. Recherche des éléments propres de A
   - $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-5 & 3 \\ 3 & X+X-5 \end{vmatrix} = (X-5)^2 - 3^2 = (X-5+3)(X-5-3) = (X-2)(X-8)$
     Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 8$
   - La recherche de $E_2(A)$ donne $E_2(A) = \text{vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, on pose $\boxed{\vec{I} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}}$
   - On pose alors $\vec{J} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$ et l'on sait que $\vec{J} \in E_8(A)$ car les sep sont $\perp$
   - On pose $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$

3.
   - On note (X,Y) les coordonnées dans le nouveau repère $(O,\vec{I},\vec{J})$
   - La formule de changement de base donne $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P.\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$
   - L'équation dans le nouveau repère est donc
   $$\lambda_1.X^2 + \lambda_2.Y^2 + LP\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - 6 = 0$$
   - On a $L.P = (2\sqrt{2} \quad -2\sqrt{2})\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = (-4 \quad 0)$ et donc $LP\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = (4 \quad 0)\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = -4X$
   - L'équation de Γ dans le nouveau repère $(O,\vec{I},\vec{J})$ est donc
   $$2X^2 + 8Y^2 - 4X - 6 = 0 \qquad \text{càd} \qquad \boxed{X^2 + 4Y^2 - 2X - 3 = 0}$$

- Dans ce nouveau repère, l'équation cartésienne n'a plus le terme croisé: on procède alors par mise sous forme canonique!

$$X^2 - 2X - 3 = (X-1)^2 - 1 - 3 = (X-1)^2 - 4$$

d'où l'équation de Γ dans $(O,\vec{I},\vec{J})$ est

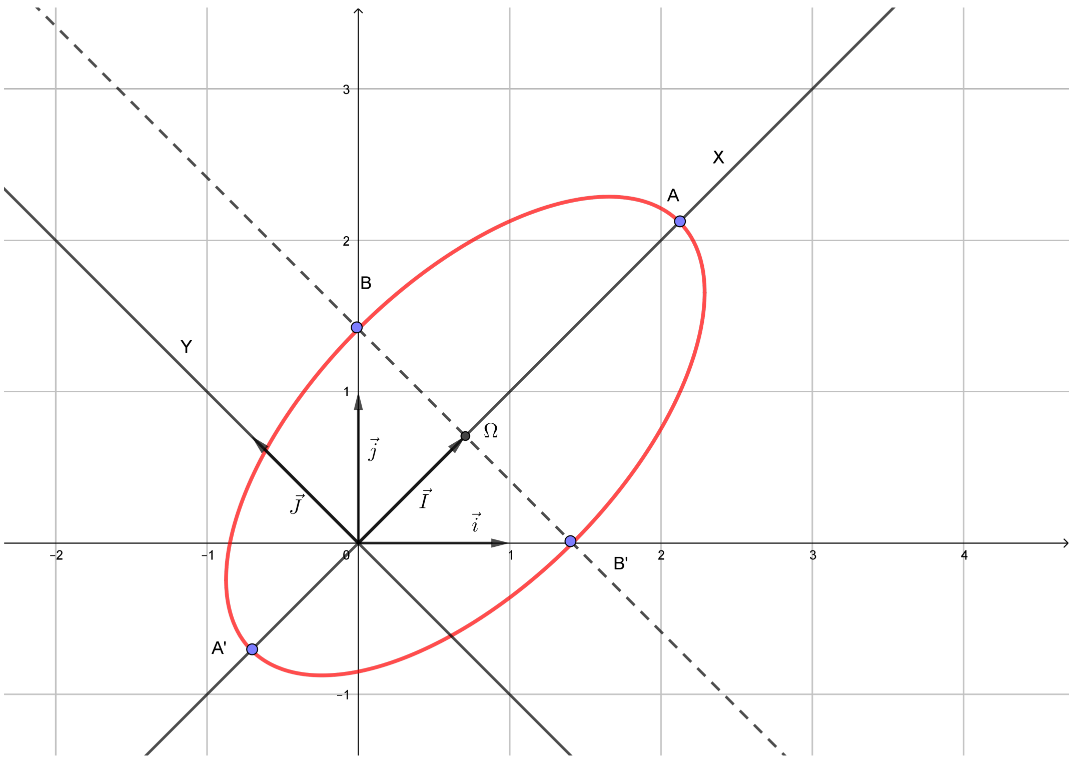
$$(X-1)^2 + 4Y^2 = 4 \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{(X-1)^2}{2^2} + Y^2 = 1}$$

- On reconnait l'éuation d'une ELLIPSE
- A partir de là, on reconnait UNE ELLIPSE avec les éléments géométriques suivants:
  (a) **Dans le repère** $(O,\vec{I},\vec{J})$**:**
    - Centre $\Omega(1{,}0)$
    - Sommets $A(3{,}0)$, $A'(-1{,}0)$, $B(1{,}1)$ et $B'(1,-1)$
    - Axes de symétrie $X = 1$ et $Y = 0$
    - Demi-grand axe $a = 2$ et demi-petit axe $b = 1$

  (b) **Dans le repère** $(0,\vec{i},\vec{j})$**,** avec la formule $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P.\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, cela donne
    - Centre $\Omega(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$
    - Sommets $A(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2})$, $A'(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$, $B(0,\sqrt{2})$ et $B'(\sqrt{2},0)$

  (c) **Dans le repère** $(0,\vec{i},\vec{j})$**,** avec la formule $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P^{-1}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P^T.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} x+y \\ -x+y \end{pmatrix}$
    - Les axes de symétries ont donc pour équations

$$i)\, 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \qquad \text{càd} \qquad x + y - \sqrt{2} = 0 \qquad\qquad \text{et } ii)\ -x+y=0$$



exemple 10: deuxième cas, avec partie linéaire

Soit Γ *d'équation* (E) : $x^2-2xy+y^2-6x-10y+9=0=0$ *dans le repère* $(0,\vec{i},\vec{j})$.

1.
   - On note $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ et $L=(-6 \quad -10)$ ainsi que $U=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$
   - L'égalité (E) s'écrit alors $U^T.A.U+L.U+9=0$
   - On a $\det(A)=0$ donc la conique est "du genre parabole"

2. Recherche des éléments propres de A
   - $\chi_A(X)=\begin{vmatrix}X-1 & 1\\ 1 & X-1\end{vmatrix}=X^2-2X=X(X-2)$ qui a pour racines $\lambda_1=2$ et $\lambda_2=0$
   - La recherche de $E_2(A)$ donne $E_2(A)=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$. Ainsi, on pose $\boxed{\vec{I}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}}$
   - On pose alors $\vec{J}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$ et l'on sait que $\vec{J}\in E_0(A)$ car les sep sont $\perp$
   - On pose $D=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\in O_2(\mathbb{R})$

3.
   - On note (X,Y) les coordonnées dans le nouveau repère $(O,\vec{I},\vec{J})$
   - La formule de changement de base donne $U=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=P.\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}$
   - L'équation dans le nouveau repère est donc

$$\lambda_1.X^2+\lambda_2.Y^2+LP\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}-6=0$$

   - On a $L.P=(-6 \quad -10)\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=(2\sqrt{2} \quad -8\sqrt{2})$
     et donc $LP\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=(2\sqrt{2} \quad -8\sqrt{2})\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=2\sqrt{2}X-8\sqrt{2}Y$
   - L'équation de Γ dans le nouveau repère $(O,\vec{I},\vec{J})$ est donc

$$2X^2+2\sqrt{2}X-8\sqrt{2}Y+9=0 \quad \text{ou encore} \quad Y=\frac{\sqrt{2}}{8}X^2+\frac{1}{4}X+\frac{9}{8\sqrt{2}}$$

   - A ce stade, on peut dire que Γ est une PARABOLE car Y est une fonction du second degré de X

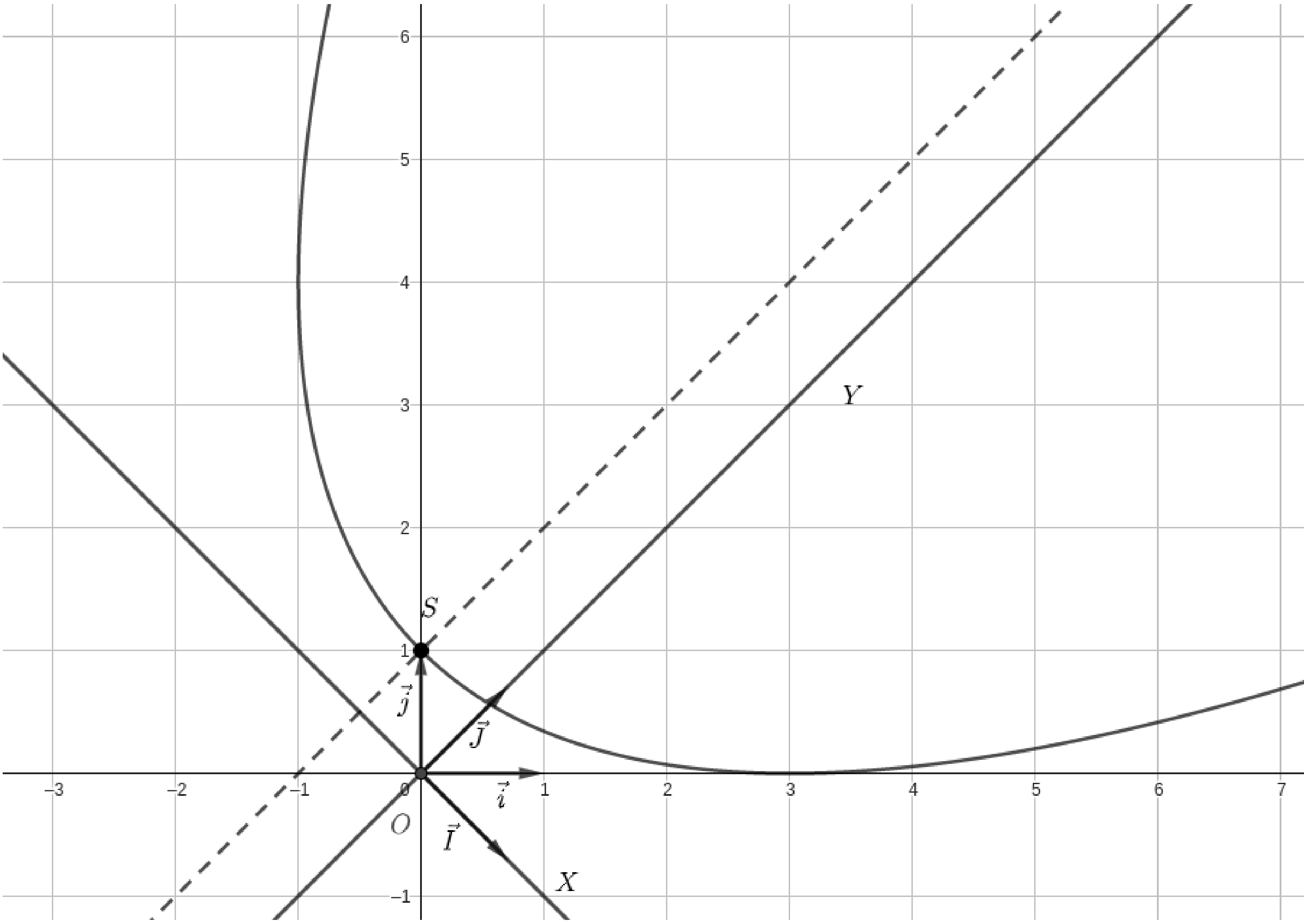
4.
   - Dans ce nouveau repère, l'équation cartésienne n'a plus le terme croisé: on procède alors par mise sous forme canonique!

$$\frac{\sqrt{2}}{8}X^2+\frac{1}{4}X=\frac{\sqrt{2}}{8}\left(X^2+\sqrt{2}X\right)=\frac{\sqrt{2}}{8}\left[\left(X+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\right]$$

   d'où l'équation de Γ dans $(O,\vec{I},\vec{J})$ est

$$Y=\frac{\sqrt{2}}{8}\left(X+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{soit encore} \quad \boxed{Y-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{8}\left(X+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

- **Dans le repère** $(O,\vec{I},\vec{J})$**:**
  - Le sommet S a pour coordonnées $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$
  - L'axe de symétrie a pour équation $X=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- **Dans le repère** $(0,\vec{i},\vec{j})$**,**
  avec la formule $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=P.\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$, cela donne $S(0,1)$
- **Dans le repère** $(0,\vec{i},\vec{j})$**,**
  avec la formule $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=P^{-1}.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=P^{T}.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}x-y\\x+y\end{pmatrix}$
  l'équation de l'axe de symétrie est $\dfrac{-\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-y)$ soit $\boxed{y=x+1}$



remarque 5 (***retour sur l'exemple 2***)

- *Imaginons que la courbe ait pour équation* $x^2 + 8xy - 5y^2 - k = 0$ *avec* $k \in \mathbb{R}$
- *En procédant de même nous serions parvenus à l'équation* $3X^2 - 7Y^2 - k = 0$
- *3 cas sont alors à envisager*
  i) $k > 0$*: c'est une* HYPERBOLE *car on peut écrire l'équation sous la forme*

$$\frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{k}{3}}\right)^2} - \frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{k}{7}}\right)^2} = 1$$

  ii) $k < 0$*: c'est une* HYPERBOLE *car on peut écrire l'équation sous la forme*

$$\frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{-k}{7}}\right)^2} - \frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{-k}{3}}\right)^2} = 1$$

  iii) $k = 0$*: c'est* LA RÉUNION DE 2 DROITES SÉCANTES

$$3X^2 - 7Y^2 = 0 \Longleftrightarrow \sqrt{3}X = \pm\sqrt{7}Y \Longleftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}X = \sqrt{7}Y \\ \text{ou} \\ \sqrt{3}X = -\sqrt{7}Y \end{cases}$$

remarque 6 (***retour sur l'exemple 3***)

- *Imaginons que la courbe ait pour équation* $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y - 2k = 0$ *avec* $k \in \mathbb{R}$
- *En procédant de la même manière nous serions parvenus à l'équation*

$$(X-1)^2 + 4Y^2 = k + 1$$

- *3 cas sont à envisager*
  i) $k > -1$*: c'est une* ELLIPSE

$$\frac{X^2}{\left(\sqrt{k+1}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\frac{\sqrt{k+1}}{2}\right)^2} = 1$$

  ii) $k = -1$*: c'est un* POINT
  car une somme de termes positifs est nulle ssi chaque terme est nul

  iii) $k < -1$*: c'est* L'ENSEMBLE VIDE
  car une somme de termes positifs ne peut être strictement négative