GEOMETRIE PLANE: ETUDE METRIQUE

Table des matières

- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de $I \to \mathbb{R}^2$.
- On note x et y les fonctions coordonnées de f.
- En résumé, on a donc $\boxed{\begin{array}{rcl} f : I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (x(t),y(t)) \end{array}}$.

  On notera $M(t)$ ou M_t le point du plan de coordonnées $(x(t),y(t))$.
- On dit que (I,f) est un arc paramétré de classe C^k lorsque f est une fonction de classe C^k sur I.
- On appelle support de la courbe paramétrée et on note Γ l'ensemble des points $M(t)$ avec $t \in I$:

$$\boxed{\Gamma = \{M(t) = (x(t),y(t)) | t \in I\}}$$

- On munira le plan d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$

  ainsi $\boxed{\overrightarrow{OM(t)} = x(t).\vec{i} + y(t).\vec{j}}$ et $\boxed{M(t) = O + x(t).\vec{i} + y(t).\vec{j}}$

méthode 1: notation différentielle

- très souvent en géométrie, on préférera utiliser **la notation différentielle**: elle a l'avantage de limiter le nombre des fonctions et de rendre plus "intuitive" les formules de dérivations.
- dans l'exemple 1, suivant que Γ est paramétré par t, θ ou u,

  on note le point courant $M(t), M(\theta)$ ou $M(u)$,

  et donc les dérivées premières sont notées respectivement

  $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t)$, $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}(\theta)$ et $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{du}(u)$ ou plus simplement $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}$, $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}$ et $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{du}$
- on a vu qu'en posant $t = u^2$ on avait $f(t) = f(u^2) = h(u)$.

  En dérivant par rapport à u cela donne $h'(u) = 2u.f'(u^2) = 2u.f'(t)$

  La notation différentielle permet d'écrire:

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{du}(u) = \frac{dt}{du}(u).\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = 2u.\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) \quad \text{ou plus simplement} \quad \frac{\overrightarrow{dM}}{du} = \frac{dt}{du}.\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = 2u.\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}$$

1 Propriétés métriques des courbes planes paramétrées

On considère (I,f) un arc paramétré régulier de classe C^k, où $k \geqslant 1$. On note Γ son support.

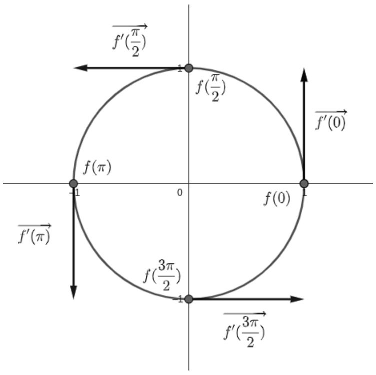
1.1 Changement de paramètre

- Une même courbe (plus précisément, un même support) peut être paramétré de différentes manières, càd à l'aide de différentes fonctions vectorielles.
- Ces paramétrisations ne sont pas toutes "équivalentes"
  - certaines orientent la courbe dans un sens et d'autres dans celui opposé
  - certaines peuvent faire apparaître des points singuliers alors que d'autres non
  - en un point, la droite tangente si elle existe sera toujours la même; en revanche, le premier vecteur dérivée a une norme qui dépend de la paramétrisation

exemple 1: apparition de points singuliers

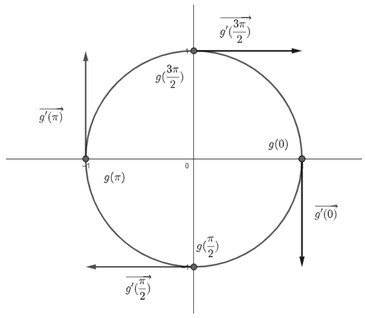
- Considérons 3 paramétrisations du cercle trigonométrique

$f : \begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos t, \sin t) \end{array}$	$g : \begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \theta & \longmapsto & (\cos(-\theta), \sin(-\theta)) \end{array}$	$h : \begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ u & \longmapsto & (\cos(u^2), \sin(u^2)) \end{array}$



aucun point singulier, orientation sens trigo

chaque vecteur dérivé est unitaire



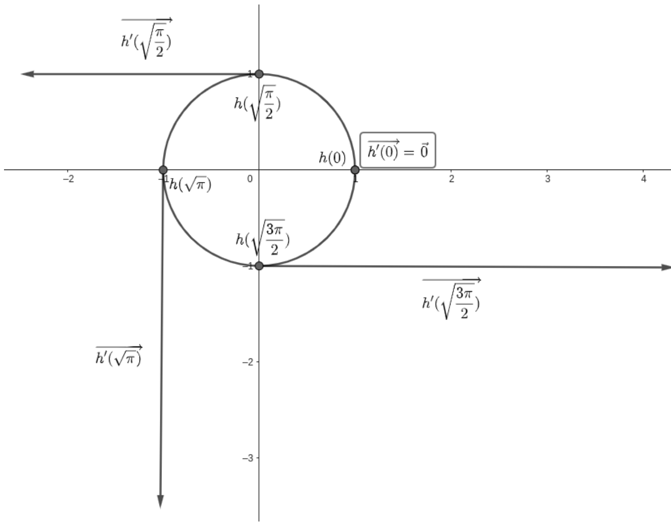
aucun point singulier, sens horaire

chaque vecteur dérivé est unitaire

- La notation différentielle donne

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}(\theta) = \frac{dt}{d\theta}(\theta).\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = -\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t)$$

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{du}(u) = \frac{dt}{du}(u).\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = 2u.\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t)$$



il y a UN point singulier

les vecteurs dérivés sont de normes différentes

1.2 Abscisse curviligne

définition 1:

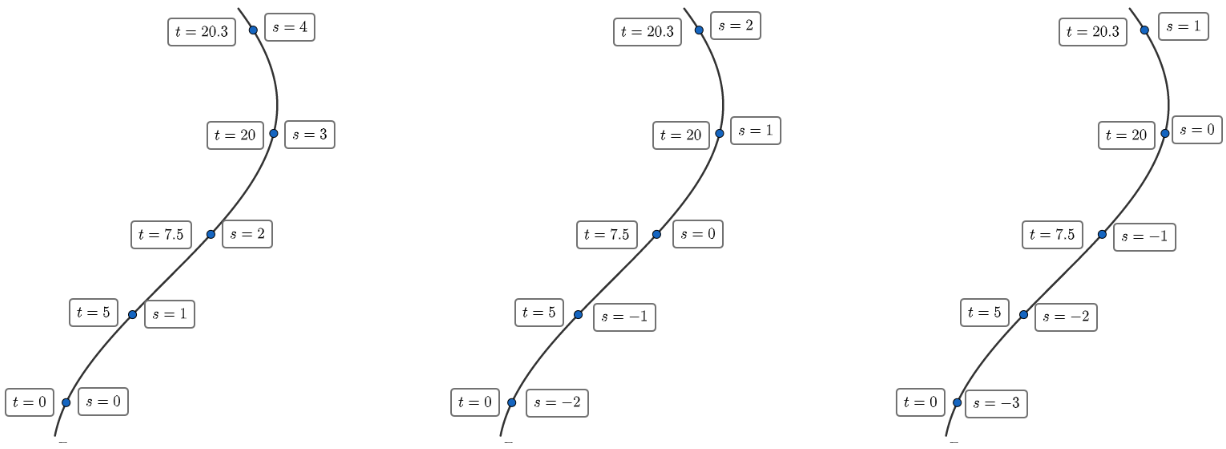
Soit (I,f) une courbe paramétrée, et $t_0 \in I$.
On appelle abscisse curviligne d'origine $t_0 \in I$ la fonction $\boxed{\begin{array}{rcl} s : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \displaystyle\int_{t_0}^{t} ||f'|| = \int_{t_0}^{t} ||f'(u)||du \end{array}}$

interprétation cinématique: $s(t)$ correspond à la distance algébrique parcourue sur la courbe depuis l'instant t_0

remarque 1

- *On a* $\boxed{\forall t \in I, s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}du}$
- *Les fonctions x et y étant (au moins) C^1 sur I par hypothèse, on a les fonctions dérivées x' et y' qui sont continues sur I. Par composition de fonctions continues on peut donc affirmer que la fonction $t \mapsto \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ est continue sur I: cette fonction admet donc une primitive sur I et elle est intégrable sur tout segment inclus dans I*
- *Comme $||f'||$ est continue sur I et que $t_0 \in I$, on peut affirmer que s est l'unique primitive de la fonction $t \mapsto ||f'(t)||$ qui s'annule en t_0, c'est à dire c'est l'unique primitive de la fonction vitesse qui s'annule en t_0 (elle correspond à la distance parcourue sur la courbe si on se fixe comme point de départ le point $M(t_0)$)*
- *quelle que soit l'origine t_0 choisie, on a toujours*

$$\boxed{\forall t \in I, s'(t) = ||f'(t)||} \text{ soit encore } \boxed{\frac{ds}{dt} = ||f'|| = \left|\left|\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}\right|\right|}$$



théorème 1: longueur d'un arc

Soit (I,f) une courbe paramétrée régulière, et $t_1 \leqslant t_2$ deux réels appartenant à I.
La longueur que décrit le point $M(t)$ quand t parcourt l'intervalle $[t_1,t_2]$ est donnée par

$$\boxed{l(M_{t_1}M_{t_2}) = \int_{t_1}^{t_2} ||f'(t)|| = \int_{t_1}^{t_2} \left|\left|\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t)\right|\right| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt}$$

exemple 2:

Montrer qu'une ellipse de grand axe $2a$ et de petit axe $2b$ a pour périmètre $p = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}.dt$
rem: il n'y a pas de formule simple pour le périmètre d'une ellipse!... contrairement à son aire

théorème 2:

Soit (I,f) une courbe paramétrée régulière de classe C^1 , et $t_0 \in I$.

1. Une abscisse curviligne fournit une nouvelle paramétrisation de classe C^1 de la courbe paramétrée
2. Pour cette paramétrisation, on a $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{ds}$ qui est un vecteur de norme un, c'est à dire $\left|\left|\dfrac{\overrightarrow{dM}}{ds}\right|\right| = 1$

la paramétrisation de la courbe par l'abscisse curviligne correspond à son parcours à la vitesse unitaire

pseudo-démonstration avec la notation différentielle

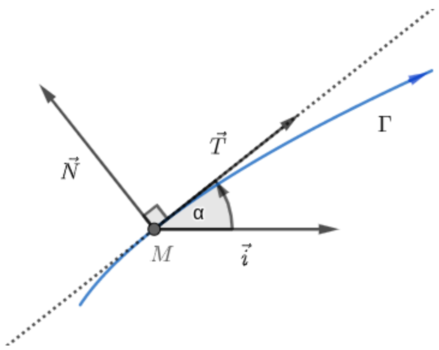
- On sait que $\dfrac{ds}{dt} = \left|\left|\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}\right|\right| > 0$ car la courbe est régulière
  ce qui permet de dire que
  $$\left|\frac{ds}{dt}\right| = \left|\left|\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}\right|\right| \qquad (*)$$
- On a
  $$\frac{\overrightarrow{dM}}{ds} = \frac{dt}{ds}.\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}}.\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} \qquad \textit{(de la forme } \lambda.\vec{u}\textit{)}$$
  en passant à la norme cela donne donc *(car $||\lambda.\vec{u}|| = |\lambda|.\vec{u}$)*
  $$\left|\left|\frac{\overrightarrow{dM}}{ds}\right|\right| = \frac{1}{\left|\frac{ds}{dt}\right|}.\left|\left|\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}\right|\right| = 1 \qquad \textit{d'après (*)}$$

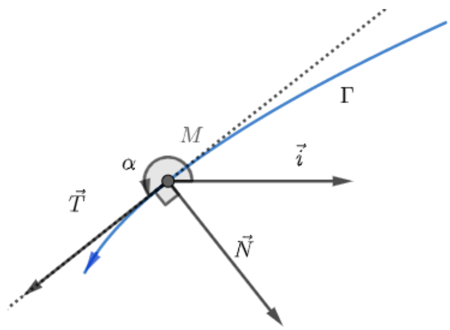
1.3 Repère de Frenet, paramètre angulaire

définition 2:

Soit (I,f) une courbe paramétrée régulière de classe C^1(au moins), et $t \in I$
On appelle:

- vecteur unitaire tangent au point $M(t)$ le vecteur $\boxed{\vec{T}(t) = \dfrac{\overrightarrow{f'(t)}}{||\overrightarrow{f'(t)}||}}$
- vecteur unitaire normal au point $M(t)$ le vecteur $\vec{N}(t)$, qui est l'image de $\vec{T}(t)$ par la rotation d'angle $+\pi/2$
- repère de Frenet au point $M(t)$ le repère orthonormé direct $(M(t),\vec{T}(t),\vec{N}(t))$
- paramètre angulaire au point $M(t)$ le réel $\alpha(t)$ tel que $\boxed{\vec{T}(t) = \cos(\alpha(t)).\vec{i} + \sin(\alpha(t)).\vec{j}}$





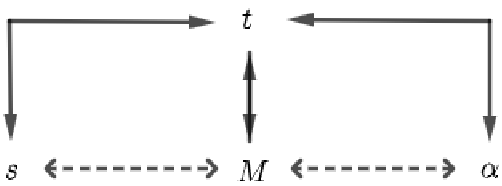
Le repère de Frenet au point $M(t)$ dépend de l'orientation de la courbe
Un arc paramétré régulier de classe au moins C^1 est orienté par les directions des vecteurs unitaires tangents, c'est à dire par le sens de parcours de la courbe.

théorème 3: théorème de relèvement(HP)

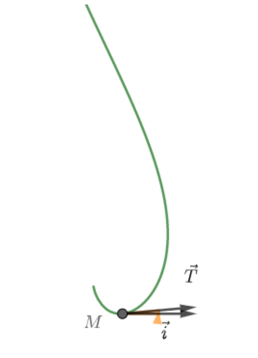
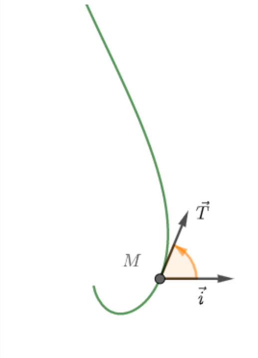
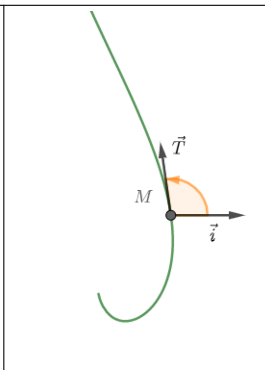
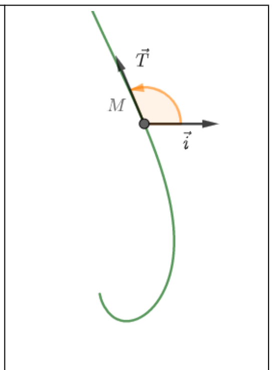
Si f est de classe C^n sur I alors il existe une fonction α de classe C^{n-1} sur I telle que

$$\forall t \in I, \vec{T}(t) = \cos(\alpha(t)).\vec{i} + \sin(\alpha(t)).\vec{j}$$

- Sous certaines conditions (qui sont généralement remplies), on a le schéma suivant



- une courbe peut ainsi être paramétrée par une de ses abscisses curvilignes, son paramètre angulaire ou un paramètre quelconque

			
$t = 0.4$ $\alpha = 5.2$ $s = 0$ $s_1 = -0.60$	$t = 1.1$ $\alpha = 67.5$ $s = 0.72$ $s_1 = 0.12$	$t = 1.8$ $\alpha = 98.1$ $s = 1.69$ $s = 1.09$	$t = 2.5$ $\alpha = 112.7$ $s = 2.99$ $s = 2.39$

Dans le tableau ci-dessus

- *t désigne un paramètre quelconque(celui de départ)*
- *α désigne le paramètre angulaire*
- *s désigne l'abscisse curviligne d'origine $t = 0.4$*
- *s_1 désigne l'abscisse curviligne d'origine $t = 1$*

remarque 2

- *Comme $\vec{T} = T_x.\vec{i} + T_y.\vec{j}$ et que $\vec{T}$ est un vecteur unitaire, on sait que $T_x^2 + T_y^2 = 1$*
  un théorème de sup nous permet alors d'affirmer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} T_x & = \cos\alpha \\ T_y & = \sin\alpha \end{cases}$
- ***Géométriquement** $\alpha(t)$ **correspond à l'angle orienté entre les vecteurs** $\vec{i}$ **et** $\vec{T}(t)$**;** **on l'appelle** LE PARAMÈTRE ANGULAIRE
- *Le point important du théorème précédent est que la fonction α peut être choisie de classe C^{n-1} sur I (lorsque f est C^n sur I)*
- *La fonction α n'est pas unique. Mais deux fonctions α_1 et α_2 qui vérifieraient le théorème 3 seraient égales sur I modulo 2π*
- *En notant $(0,\vec{u}(\theta),\vec{v}(\theta))$ le repère polaire usuel, on a que $\vec{T}(t) = \vec{u}(\alpha(t))$*
  rappel: $\vec{u}(\theta) = \cos\theta.\vec{i} + \sin\theta.\vec{j}$ ey $\vec{v}(\theta) = -\sin\theta.\vec{i} + \cos\theta.\vec{j}$

1.4 Courbure

théorème 4: et définition de la courbure

Soit (I,f) une courbe paramétrée de classe C^2 au moins.

i) Il existe un unique réel γ tel que $\boxed{\dfrac{d\vec{T}}{ds} = \gamma\vec{N}}$.

ii) Ce réel est appelé <u>la courbure de Γ au point M</u>

iii) Lorsque $\gamma \neq 0$, le réel $R = \dfrac{1}{\gamma}$ est appelé <u>le rayon de courbure</u> au point M

remarque 3

Si le vecteur tangent $\overrightarrow{T}$ est facile à dériver alors on peut aussi calculer le rayon à l'aide de la formule suivante :

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \gamma.\frac{ds}{dt}.\overrightarrow{N}$$

théorème 5: relations de Frenet

1. $\boxed{\cos\alpha = \dfrac{dx}{ds} = \dfrac{x'}{s'}}$ $\boxed{\sin\alpha = \dfrac{dy}{ds} = \dfrac{y'}{s'}}$
2. $\boxed{\vec{T} = \cos\alpha.\vec{i} + \sin\alpha.\vec{j}}$ $\boxed{\vec{N} = \dfrac{d\vec{T}}{d\alpha} = -\sin\alpha.\vec{i} + \cos\alpha.\vec{j}}$
3. $\boxed{\gamma = \dfrac{d\alpha}{ds} = \dfrac{\alpha'}{s'}}$
4. en un point birégulier $\gamma \neq 0$ et $\boxed{R = \dfrac{1}{\gamma} = \dfrac{ds}{d\alpha} = \dfrac{s'}{\alpha'}}$
5. Relations de Frenet : $\boxed{\dfrac{d\vec{M}}{ds} = \vec{T}}$ $\boxed{\dfrac{d\vec{T}}{ds} = \gamma.\vec{N} = \dfrac{1}{R}.\vec{N}}$ $\boxed{\dfrac{d\vec{N}}{ds} = -\gamma.\vec{T} = -\dfrac{1}{R}.\vec{T}}$
6. (HP) vitesse et accélération dans le repère de Frenet $\boxed{f'(t) = \dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt} = \left(\dfrac{ds}{dt}\right)\vec{T}}$ $\boxed{f''(t) = \dfrac{d^2\overrightarrow{M}}{dt^2} = \left(\dfrac{d^2s}{dt^2}\right)\vec{T} + \left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2\gamma\vec{N}}$
7. (HP): $\boxed{\gamma = \dfrac{x'.y'' - y'.x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \dfrac{\det(f',f'')}{||f'||^3}}$

remarque 4

- *En tout point d'une droite la courbure est nulle*
- *La courbure est la même en tout point d'un cercle*

1.5 Développée

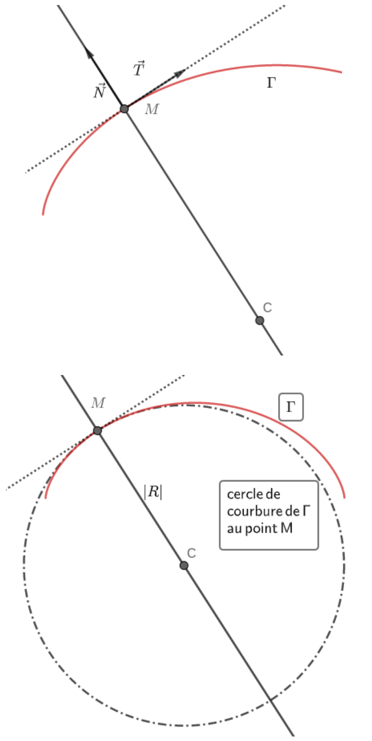
définition 3:

Soit (I,f) un arc paramétré birégulier de classe C^2 et Γ son support.

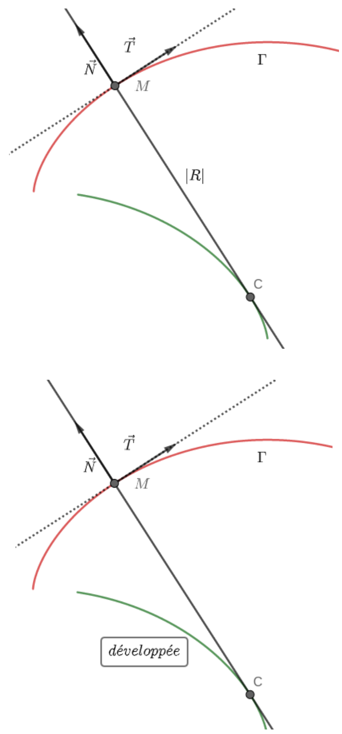
On appelle :

- centre de courbure de Γ au point M le point C défini par $\boxed{\overrightarrow{MC} = R.\overrightarrow{N}}$ càd $\boxed{C = M + R\overrightarrow{N}}$
- cercle de courbure de Γ au point M le cercle de centre C et de rayon $|R|$
- développée de l'arc Γ le lieu(=l'ensemble) des centres de courbure de Γ.

rem: le cercle de courbure est le cercle tangent en M à la courbe qui "approche le mieux" la courbe en M
rem: de même que la droite tangente en M est la droite qui "approche le mieux" la courbe en M

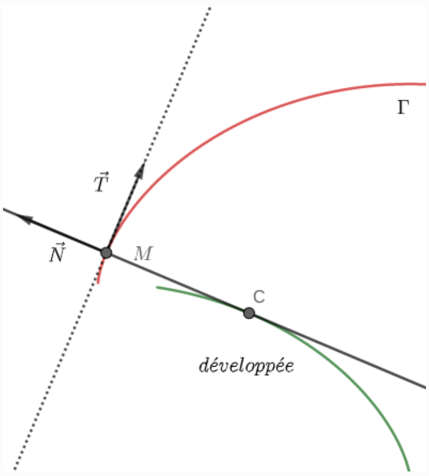


A chaque point de Γ est associé un centre de courbure



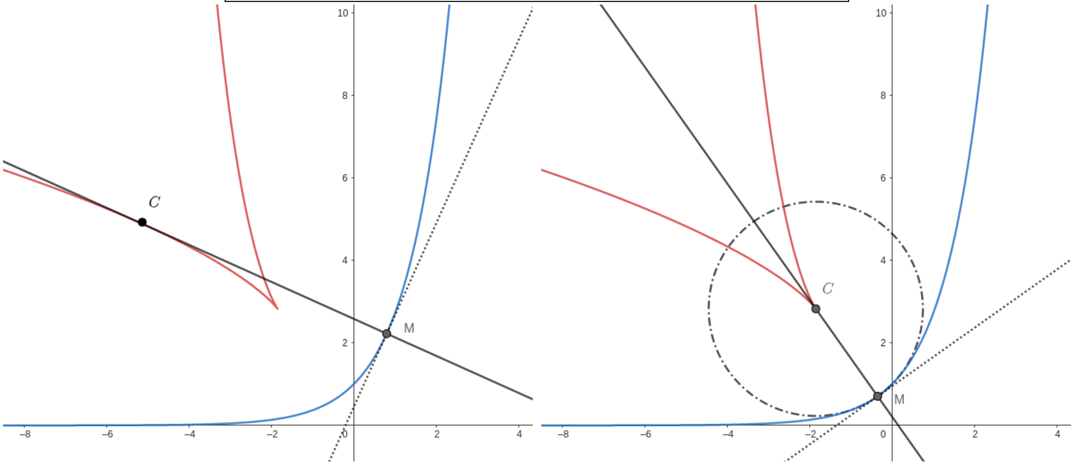
la développée est le lieu des centres de courbure

théorème 6:

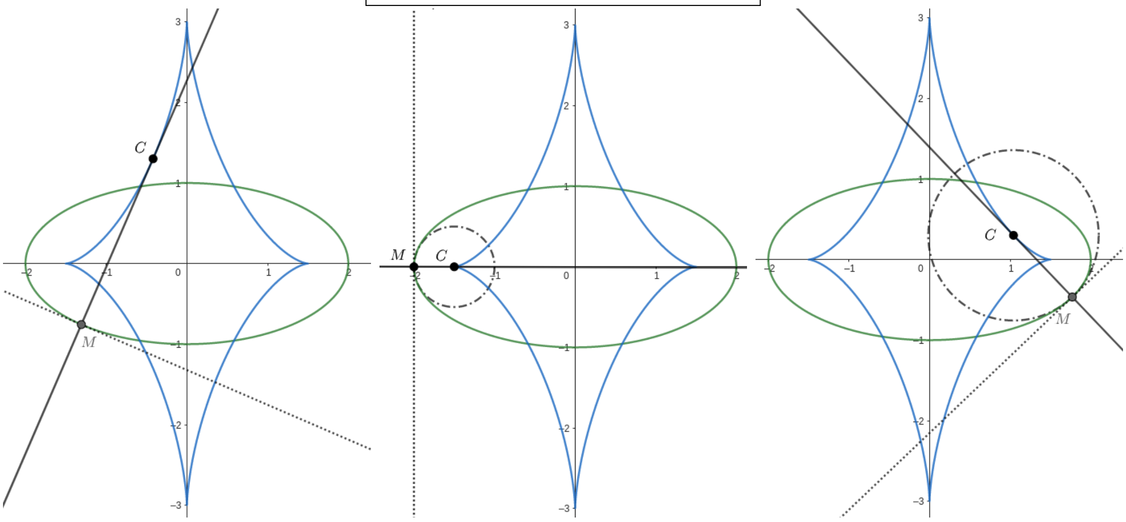


La droite normale en M à Γ est tangente en C à la développée. *(on verra plus tard que " la développée de Γ est l'enveloppe des normales à Γ ")*

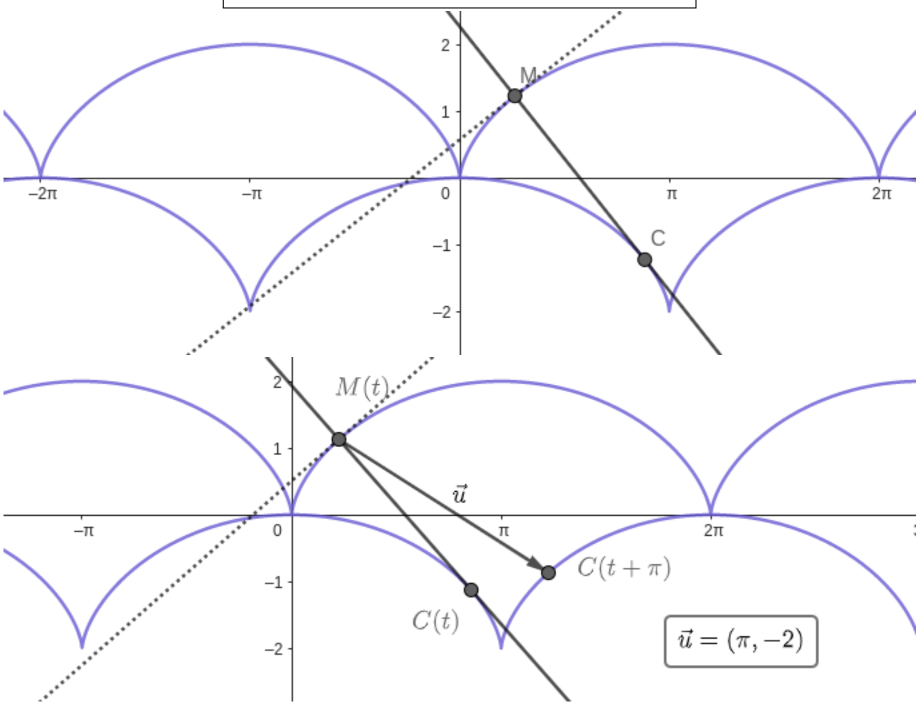
Le graphe de la fonction exp et sa développée



Une ellipse et sa développée



L'exemple classique de la cycloïde



La développée de la cycloïde est l'image d'elle-même par une translation ce qui ne signifie pas que $C(t)$ est l'image de $M(t)$ par cette translation

2 Enveloppe d'une famille de droites

définition 4:

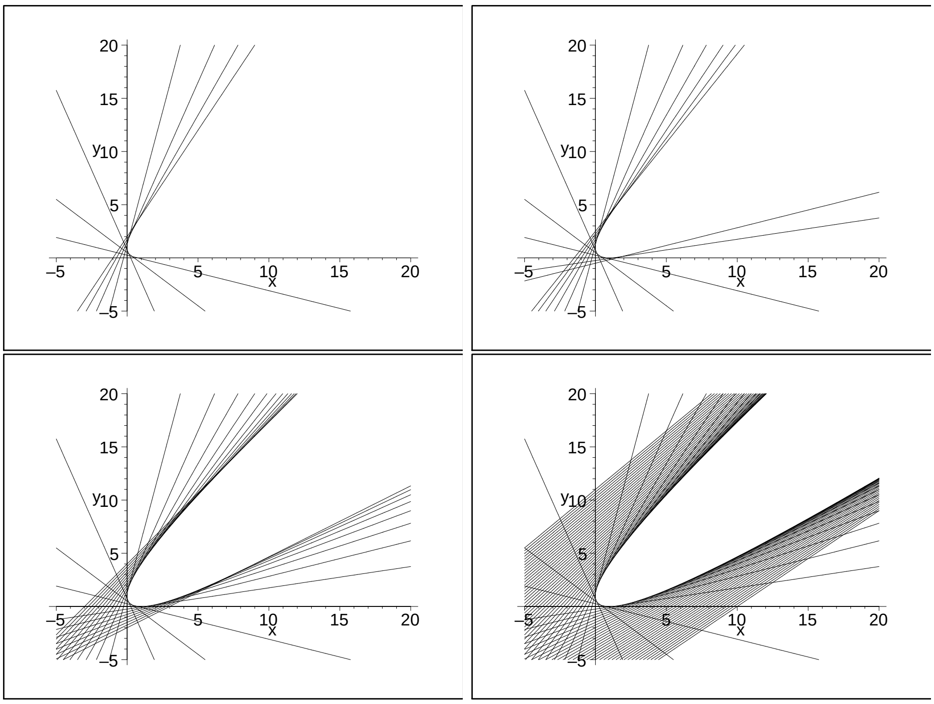
- On appelle famille de droites, et on note $(D_t)_{t\in J}$, un ensemble de droites indexées par un réel t appartenant à un certain intervalle réel J
- On appelle enveloppe de la famille $(D_t)_{t\in J}$ tout courbe Γ telle que
  - i) chaque droite D_t soit une tangente à Γ
  - ii) Γ ne possède pas d'autres tangentes que les droites $(D_t)_{t\in J}$

Pour $t \in J$ fixé, le point de Γ en lequel la droite tangente est la droite (D_t) s'appelle le point caractéristique de la droite (D_t)

exemple 3:

Soit un réel $a > 0$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $A = (t,0)$ et $B = (0,a-t)$.
On note D_t la droite (AB)

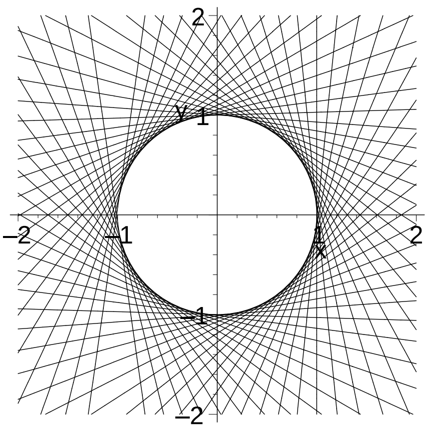
1. Donner une représentation paramétrique de D_t
2. Déterminer $\mathcal{E}$ l'enveloppe de la famille de droite $(D_t)_{t\in\mathbb{R}}$
3. Donner les équations paramétriques de $\mathcal{E}$ dans le repère orthonormé direct $(O,\vec{I},\vec{J})$ où $\vec{I}$ est un vecteur qui dirige la première bissectrice
4. En déduire la nature de $\mathcal{E}$



remarque 5

La famille de droites $(D_t)_{t\in I}$ peut être représentée par

1. *une famille d'équations cartésiennes de droites : $D(t)$: $a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$ où a,b et c sont des fonctions définies sur l'intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$*
   exemple: $D(t) : \cos(t).x + \sin(t).y - 1 = 0$
2. *une famille de représentations paramétriques de droites : $D(t) : \lambda \to A(t) + \lambda\overrightarrow{u}(t)$ où A et u sont des fonctions définies sur l'intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}^2$*
   exemple: $D(t) : \lambda \mapsto (\cos t, \sin t) + \lambda(-\sin t, \cos t)$

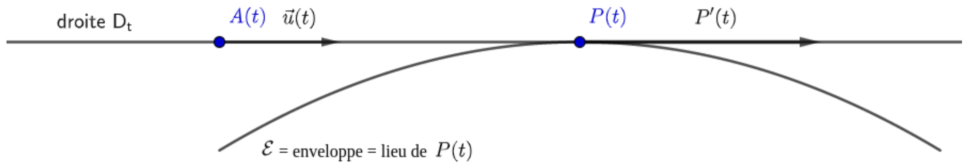


- *On pourra remarquer qu'il s'agit de la même famille de droites... la voici représenter ci-contre!*
- *La famille de droites est la famille des tangentes au cercle de centre O et de rayon un.*
- *Autrement dit: l'enveloppe de la famille de droites est le cercle $\mathcal{C}(O,1)$!*

méthode 2: comment déterminer l'enveloppe d'une famille de droites

Soit $(D_t)_{t\in J}$ une famille de droites de représentation paramétrique $\lambda \mapsto A(t) + \lambda.\overrightarrow{u}(t)$.
Notons $\mathcal{E}$ l'enveloppe de cette famille.
On cherche une fonction λ de classe C^1 telle que $t \mapsto A(t) + \lambda(t).\overrightarrow{u}(t)$ paramètre une courbe dont la tangente au point courant est dirigée pas $\overrightarrow{u}(t)$
On a donc les équivalences suivantes:

$$\text{le point } P(t) \in \mathcal{E} \iff \begin{cases} P(t) \text{ est un point de } D_t \\ D_t \text{ est la tangente à } \mathcal{E} \text{ en } P(t) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \exists \lambda(t) \in \mathbb{R}, \text{tel que } P(t) = A(t) + \lambda(t).\vec{u}(t) \\ P'(t) \text{ et } \vec{u}(t) \text{ sont colinéaires} \end{cases}$$

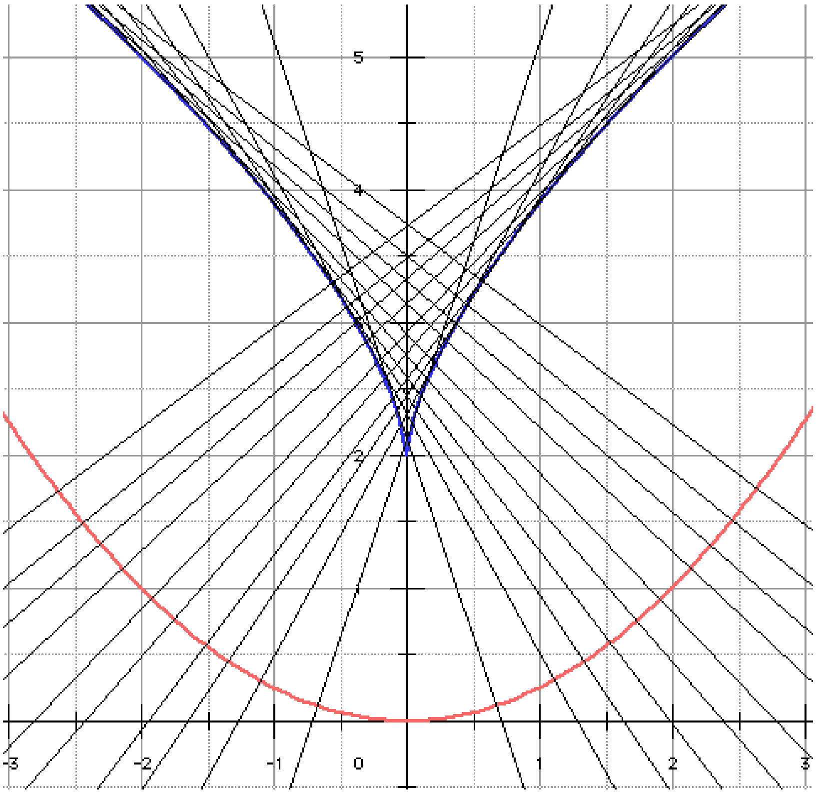


or $P' = A' + \lambda'.\vec{u} + \lambda.\vec{u}\,'$ et ainsi:

$$\begin{aligned} P'(t) \text{ et } \vec{u}(t) \text{ sont colinéaires} &\iff \det(A' + \lambda'.\vec{u} + \lambda.\vec{u}\,', \vec{u}) = 0 \\ &\iff \det(A', \vec{u}) + \lambda'.\det(\vec{u}, \vec{u}) + \lambda.\det(\vec{u}\,', \vec{u}) = 0 \\ &\iff \lambda = -\frac{\det(A', \vec{u})}{\det(\vec{u}\,', \vec{u})} \end{aligned}$$

théorème 7: enveloppes des normales: 2nde méthode pour trouver la développée!

Soit (I,f) une courbe paramétrée de classe C^2(au moins) de support Γ.
L'enveloppe des droites normales à Γ est la développée de Γ



3 Annexe

Démonstration théorème 2

notons s une abscisse curviligne de (I,f).

- *Remarquons que $s'(t) > 0$ car on a supposé Γ régulière et de ce fait $s'(t) = ||f'(t)|| \neq 0$ (et donc > 0).*
- *Ainsi s est une fonction continue et strictement croissante sur l'intervalle I. Par le théorème de la bijection on sait que $J := s(I)$ est un intervalle et que, s réalise une bijection de I sur $J = s(I)$.*
- *On a d'une part* $\boxed{\begin{array}{rcl} s : I & \longrightarrow & J = s(I) \\ t & \longmapsto & s(t) \end{array}}$ *et donc* $\boxed{\begin{array}{rcl} s^{-1} : J & \longrightarrow & I \\ u & \longmapsto & s^{-1}(u) \end{array}}$
- *D'autre part* $\boxed{\begin{array}{rcl} f : I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & f(t) \end{array}}$.

  On peut donc paramétrer Γ de la manière suivante $\boxed{\begin{array}{rcl} g : J & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ u & \longmapsto & f(s^{-1}(u)) \end{array}}$
- *Calculons maintenant g'. On se rappelle déjà que $(s^{-1})' = \dfrac{1}{s' \circ s^{-1}}$ D'où :*

$$g'(u) = (s^{-1})'(u)f'(s^{-1}(u)) = \frac{1}{s'(s^{-1}(u))}f'(s^{-1}(u)) = \frac{f'(s^{-1}(u))}{||f'(s^{-1}(u))||} \text{ qui est un vecteur unitaire!}$$

- *La notation différentielle "écrit" ce qui a été dit plus haut par*

$$\frac{d\overrightarrow{M}}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{d\overrightarrow{M}}{dt} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}}\frac{d\overrightarrow{M}}{dt} = \frac{1}{\left|\left|\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}\right|\right|}\frac{d\overrightarrow{M}}{dt} \text{ qui est un vecteur unitaire!}$$