ETUDE DES COURBES PLANES

Table des matières

Dans tout ce polycopié, on considèrera le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

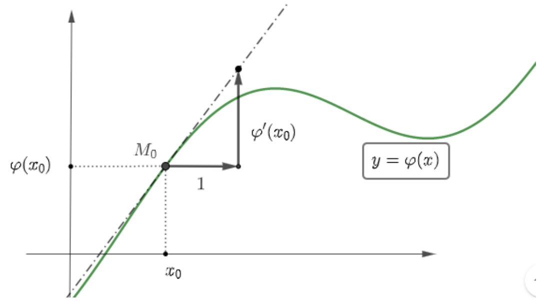
Une courbe peut être définie de 2 manières.

	par équation cartésienne	par représentation paramétrique
	$\Gamma = \{M(x,y) \,\vert\, F(x,y) = 0\}$ avec $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$	$\Gamma = \{M = f(t) \,\vert\, t \in I\}$ avec $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
M_0 point régulier	$\overrightarrow{\nabla}_{M_0} F \neq \vec{0}$ ce vecteur est orthogonal à la tangente	$\overrightarrow{f'(t_0)} \neq \vec{0}$ ce vecteur dirige la tangente

remarque 1 (***rappel: droite tangente en une courbe définie par $y = \varphi(x)$ (première)***)

On note Γ la courbe représentative de la fonction $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- *On a $\Gamma = \{(x,\varphi(x) \,|\, x \in I\}$*
- *Si φ est dérivable en $x_0 \in I$ alors en tout point $(x_0,\varphi(x_0))$ de Γ il existe une droite tangente. Son coefficient directeur est $\varphi'(x_0)$ et son équation est* $\boxed{y = \varphi'(x_0).(x - x_0) + \varphi(x_0)}$
- *Si φ n'est pas dérivable en x_0 mais que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ alors il y a une tangente verticale au point $(x_0,\varphi(x_0)) \in \Gamma$*



1 Equation cartésienne $F(x,y) = 0$ d'une courbe plane

exemple 1:

- le cercle trigonométrique Γ a pour équation cartésienne $x^2+y^2 = 1$, càd que $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
  Γ a aussi pour équation cartésienne $F(x,y) = 0$ avec $\boxed{\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2-1 \end{array}}$
- la courbe Γ d'équation $y = x^2$ est une parabole.
  Γ a aussi pour équation cartésienne $F(x,y) = 0$ avec $\boxed{\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x^2-y \end{array}}$

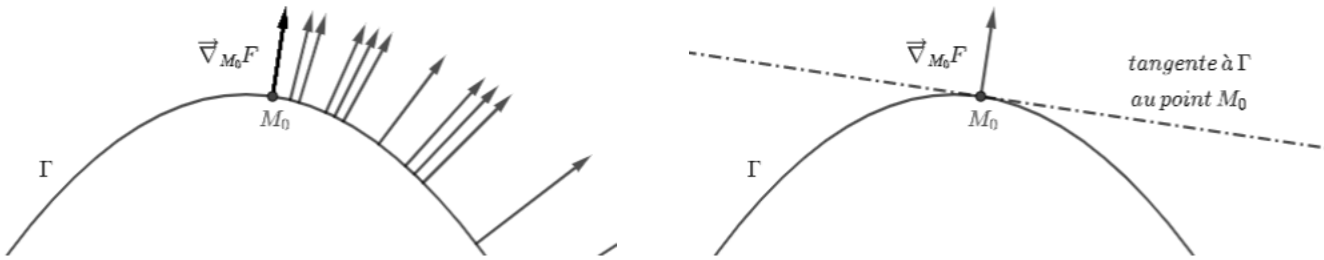
théorème 1: droite tangente pour une courbe donnée par son éq.cart.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et $F : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1.
On considére la courbe Γ d'équation cartésienne $F(x,y) = 0$. *(càd que $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 0\}$)*

1. Un point $M_0 = (x_0,y_0)$ de Γ est dit <u>régulier</u> lorsque $\overrightarrow{\nabla_{M_0}}(F) \neq \vec{0}$
2. La droite tangente en point régulier M_0 de la courbe est la droite qui passe par le point M_0 et qui a pour vecteur normal $\overrightarrow{\nabla_{M_0}}(F)$
3. L'équation de la tangente est donc donnée par le produit scalaire $\overrightarrow{\nabla_{M_0}}(F).\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} = 0$

   ce qui donne $(x-x_0)\dfrac{\partial F}{\partial x}(M_0) + (y-y_0)\dfrac{\partial F}{\partial y}(M_0) = 0$

Attention: suivant que la courbe est donnée par une équation cartésienne ou une représentation paramétrique, la définition de point régulier n'est pas la même!



exemple 2:

Existence et équations des tangentes pour les 2 exemples ci-dessus

remarque 2 (*retour sur les courbes d'équation $y = \varphi(x)$*)

- *Notons $F : (x,y) \mapsto \varphi(x) - y$*
- *Soit $M_0 = (x_0,\varphi(x_0)) \in \Gamma$*
- *On a $\overrightarrow{\nabla_{M_0}}F = \begin{pmatrix} \varphi'(x_0) \\ -1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$*
- *Un vecteur qui dirige la tangente en M_0 est un vecteur orthogonal au gradient ci-dessus, càd par exemple le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(x_0) \end{pmatrix}$*
  On retrouve le fait que le coefficient directeur de la tangente est $\varphi'(x_0)$

définition 1: lignes de niveau

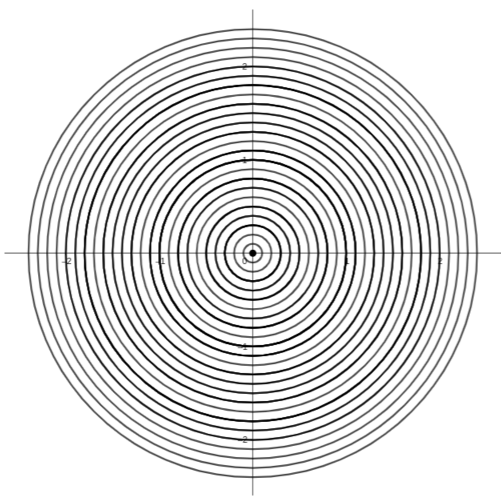
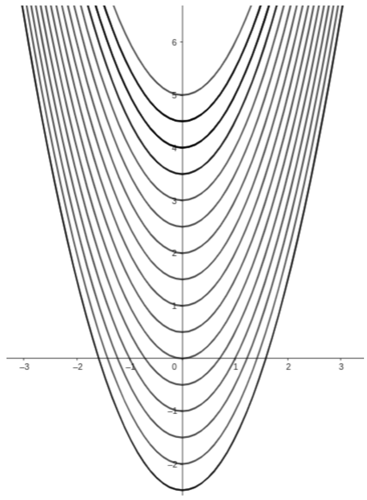
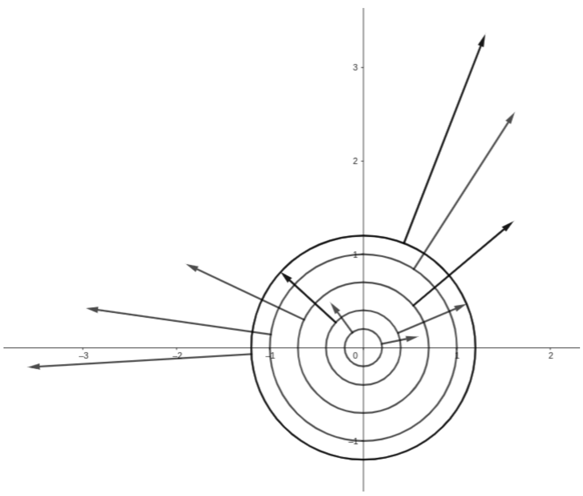
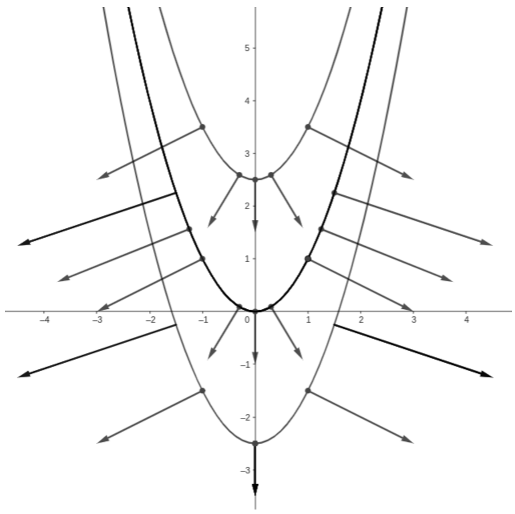
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et $F : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1.

- On appelle <u>lignes de niveau de F</u> les courbes Γ_k d'équation cartésienne $F(x{,}y) = k$ où k est une contante réelle

- Soit M_0 un point d'une ligne de niveau Γ_k.
  Si en ce point le gradient de F n'est pas nul, il est orthogonal à la tangente en M_0 à la courbe Γ_k et est dirigé dans le sens des valeurs croissantes de F

- exemple: pour $\boxed{\begin{array}{llll} F: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x{,}y) & \longmapsto & x^2+y^2 \end{array}}$
  - pour $\lambda < 0$ la ligne de niveau d'éq. $x^2+y^2 = \lambda$ est l'ensemble vide
  - pour $\lambda = 0$ la ligne de niveau d'éq. $x^2+y^2 = 0$ est réduite au point $O(0{,}0)$
  - pour $\lambda > 0$ la ligne de niveau d'éq. $x^2+y^2 = \lambda$ est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{\lambda}$

- exemple: pour $\boxed{\begin{array}{llll} F: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x{,}y) & \longmapsto & x^2-y \end{array}}$
  - les lignes de niveau sont des paraboles qui possèdent l'axe des ordonnées comme axe de symétrie

2 Etude et tracé des courbes planes paramétrées

2.1 Courbe paramétrée et son support

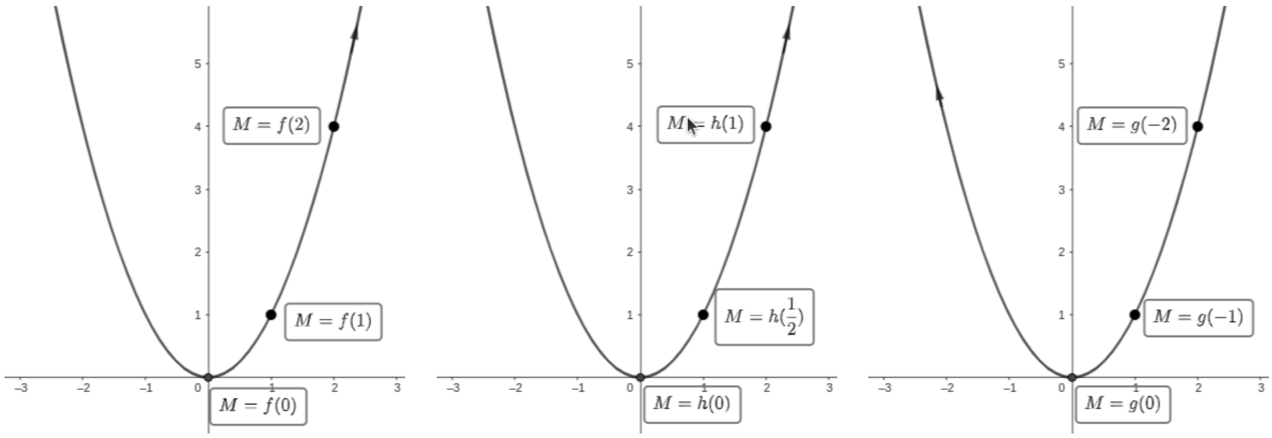
- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de $I \to \mathbb{R}^2$.
- Plutôt que les noter f_1 et f_2, on note x et y les fonctions coordonnées de f.
- En résumé, on a donc $\boxed{\begin{array}{rcl} f : I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (x(t),y(t)) \end{array}}$.

  On notera $M(t)$ ou M_t le point du plan de coordonnées $(x(t),y(t))$.
- Le couple (I,f) s'appelle une <u>courbe paramétrée</u>
- On appelle <u>support de la courbe paramétrée</u> et on note Γ l'ensemble des points M_t avec $t \in I$:

$$\boxed{\Gamma = \{M_t = (x(t),y(t)) | t \in I\}}$$

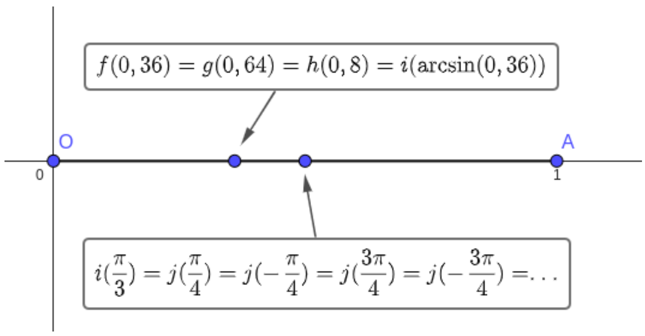
rem: une courbe paramétrée est donc essentiellement la donnée d'une fonction vectorielle
rem: des courbes paramétrées différentes peuvent avoir un même support
rem: un support est simplement un ensemble de points; il n'y a pas de notion de vitesse ou de sens de parcours

3 courbes paramétrées ayant le même support



$\boxed{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t,t^2) \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (2t,4t^2) \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (-t,t^2) \end{array}}$

différentes paramétrisations d'un même segment



- $\boxed{\begin{array}{rcl} f : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t,0) \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{rcl} g : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (1-t,0) \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{rcl} h : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (1-t^2,0) \end{array}}$ et $\boxed{\begin{array}{rcl} i : [0,\pi/2] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\sin t,0) \end{array}}$
- $\boxed{\begin{array}{rcl} j : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\sin^2 t,0) \end{array}}$ est aussi une paramétrisation du segment $[OA]$, mais cette fois, la paramétrisation n'est pas bijective: tout point du segment possède une infinité d'antécédents par la fonction j

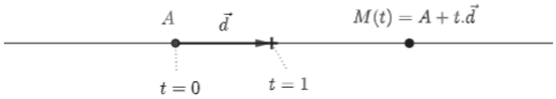
2.2 exemples de référence

- **cercle trigonométrique** : on considère le cercle de centre O et de rayon un.

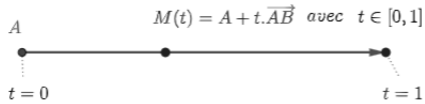
$$\boxed{\begin{array}{rcl} f : I = [0{,}2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos t, \sin t) \end{array}}$$ est une paramétrisation de ce cercle.

  – si on prend comme ensemble de départ $I = [0{,}2\pi]$, le support est toujours le cercle trigonométrique: le point de coordonnées $(1{,}0)$ correspond aux points $M(0) = M(2\pi)$.
  – si l'on veut une paramétrisation bijective, (c'est à dire qu'à tout point M du cercle correspond un et un seul réel $t \in I$), il faut et il suffit que I soit un intervalle semi-ouvert de longueur 2π
  – si on prend $I = \mathbb{R}$, tout point du cercle est paramétré par une infinité de valeurs de t.

- **droites** : *la droite passant par le point* $A(x_A,y_A)$ *et de vecteur directeur* $\vec{d} = (d_1,d_2)$ *a pour représentation paramétrique possible :* $\boxed{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & M_t = A + t.\vec{d} = (x_A + t.d_1, y_A + t.d_2) \end{array}}$

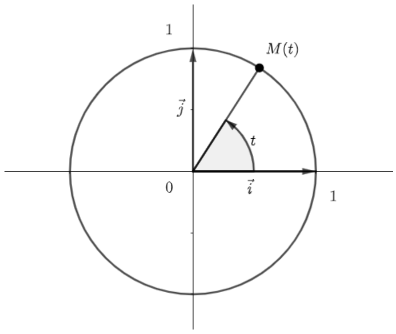


- **segments** : *le segment d'extrémités les points* $A(x_A,y_A)$ *et* $B(x_B,y_B)$ *a pour représentation paramétrique possible :* $\boxed{\begin{array}{rcl} f : [0{,}1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & M_t = A + t.\overrightarrow{AB} = (x_A + t.(x_B - x_A), y_A + t.(y_B - y_A)) \end{array}}$

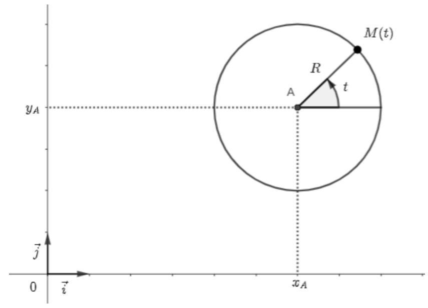


- **cercles** : *le cercle de centre* $A(x_A,y_A)$ *et de rayon* $R > 0$ *a pour représentation paramétrique possible :*

$$\boxed{\begin{array}{rcl} f : [0{,}2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & M_t = A + R.(\cos(t).\vec{\imath} + \sin(t).\vec{\jmath}) = (x_A + R.\cos t, y_A + R.\sin t) \end{array}}$$



CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE



CERCLE DE CENTRE A ET DE RAYON R

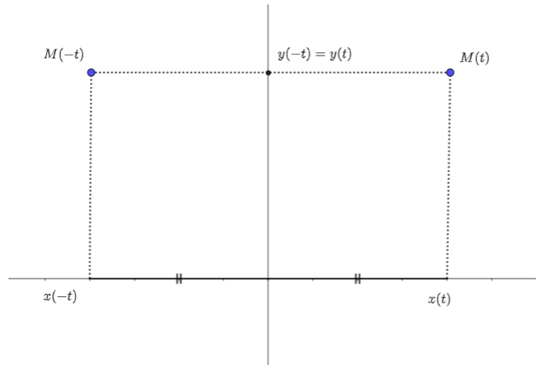
2.3 réduction de l'intervalle d'étude

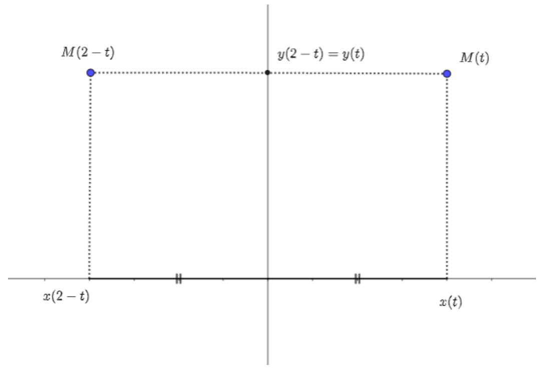
Les propriétés analytiques des fonctions x et y se traduisent par des propriétés géométriques sur la courbe. Comme toujours en mathématiques, on va tenter de faire le moins de travail possible pour obtenir un résultat. Ainsi, on va essayer par le calcul d'exhiber des symétries de la courbe afin de réduire l'intervalle d'étude de nos fonctions x et y.

utilisation de la périodicité

- Si x et y sont périodiques de même période T, alors f est aussi de période T.
  Il suffit d'étudier et de représenter f sur un intervalle de longueur T pour obtenir toute la courbe.

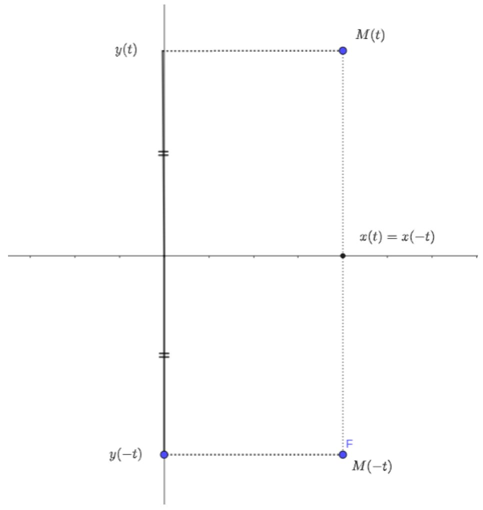
symétrie par rapport à (Oy)

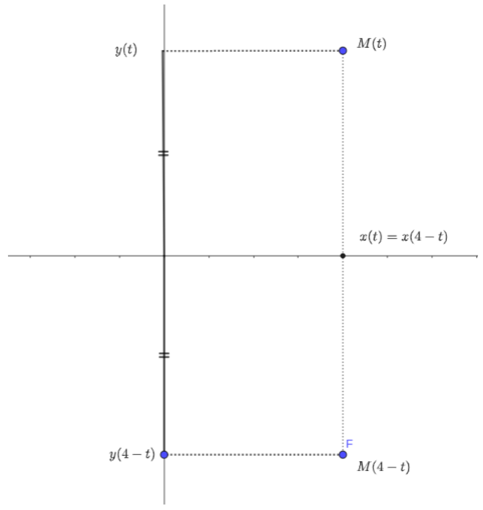




$\forall t \in I, \begin{cases} x(-t) & = -x(t) \\ y(-t) & = y(t) \end{cases}$	$\forall t \in I, \begin{cases} x(2-t) & = -x(t) \\ y(2-t) & = y(t) \end{cases}$
étude sur $I \cap \mathbb{R}^+$	étude sur $I \cap [1, +\infty[$

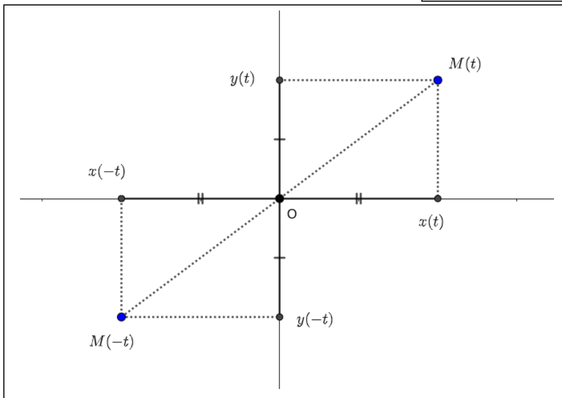
symétrie par rapport à (Ox)

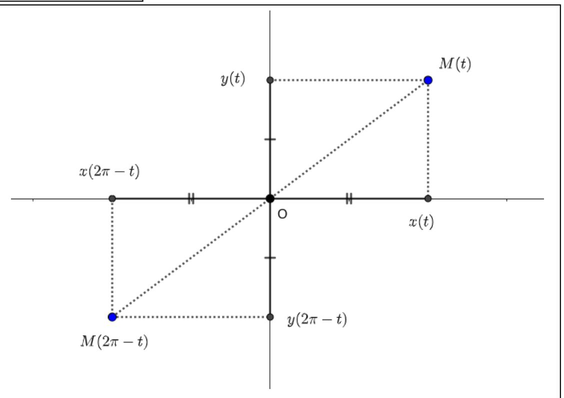




$\forall t \in I, \begin{cases} x(-t) & = x(t) \\ y(-t) & = -y(t) \end{cases}$	$\forall t \in I, \begin{cases} x(4-t) & = x(t) \\ y(4-t) & = -y(t) \end{cases}$
étude sur $I \cap \mathbb{R}^+$	étude sur $I \cap [2, +\infty[$

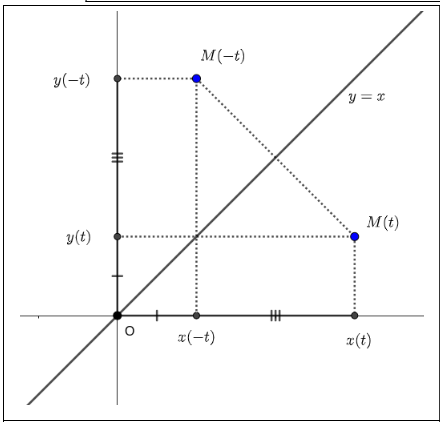
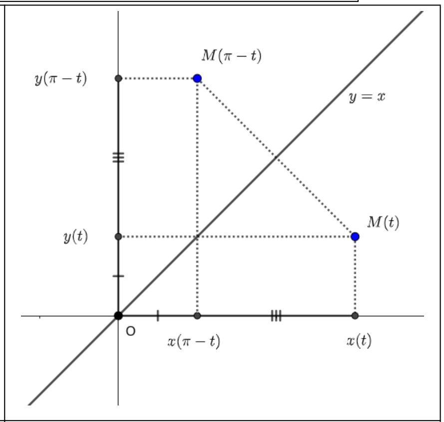
symétrie de centre O



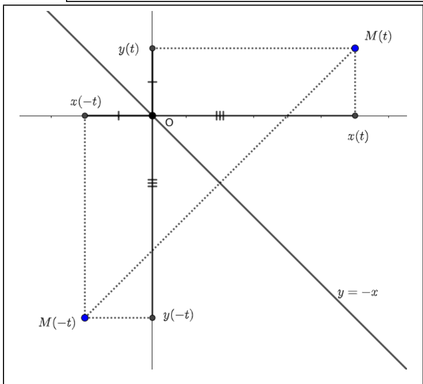
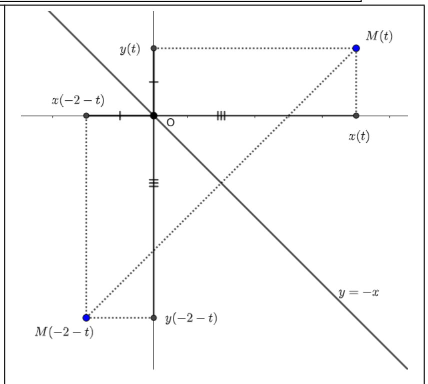


$\forall t \in I, \begin{cases} x(-t) & = -x(t) \\ y(-t) & = -y(t) \end{cases}$	$\forall t \in I, \begin{cases} x(2\pi-t) & = x(t) \\ y(2\pi-t) & = -y(t) \end{cases}$
étude sur $I \cap \mathbb{R}^+$	étude sur $I \cap [\pi, +\infty[$

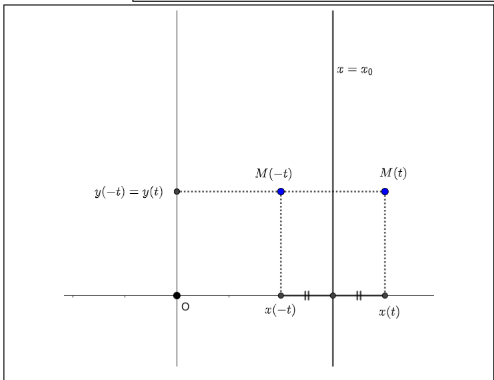
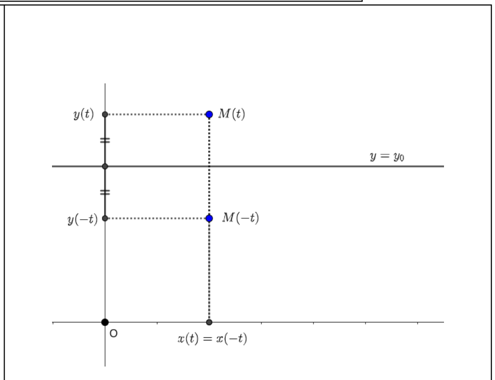
symétrie par rapport à la première bissectrice $y = x$

	
$\forall t \in I, \begin{cases} x(-t) & = y(t) \\ y(-t) & = x(t) \end{cases}$	$\forall t \in I, \begin{cases} x(\pi - t) & = y(t) \\ y(\pi - t) & = x(t) \end{cases}$
étude sur $I \cap \mathbb{R}^+$	étude sur $I \cap [\frac{\pi}{2}, +\infty[$

symétrie par rapport à la seconde bissectrice $y = -x$

	
$\forall t \in I, \begin{cases} x(-t) & = -y(t) \\ y(-t) & = -x(t) \end{cases}$	$\forall t \in I, \begin{cases} x(-2 - t) & = -y(t) \\ y(-2 - t) & = -x(t) \end{cases}$
étude sur $I \cap \mathbb{R}^+$	étude sur $I \cap [-1, +\infty[$

symétrie par rapport à une droite parallèle aux axes

	
symétrie par rapport à la droite $x = x_0$	symétrie par rapport à la droite $y = y_0$
$\forall t \in I, \begin{cases} x(-t) & = 2x_0 - x(t) \\ y(-t) & = y(t) \end{cases}$	$\forall t \in I, \begin{cases} x(-t) & = x(t) \\ y(-t) & = 2y_0 - y(t) \end{cases}$
étude sur $I \cap \mathbb{R}^+$	étude sur $I \cap \mathbb{R}^+$

Astuce: se poser la question "Où est le milieu de $[M(t),M(\dots)]$?

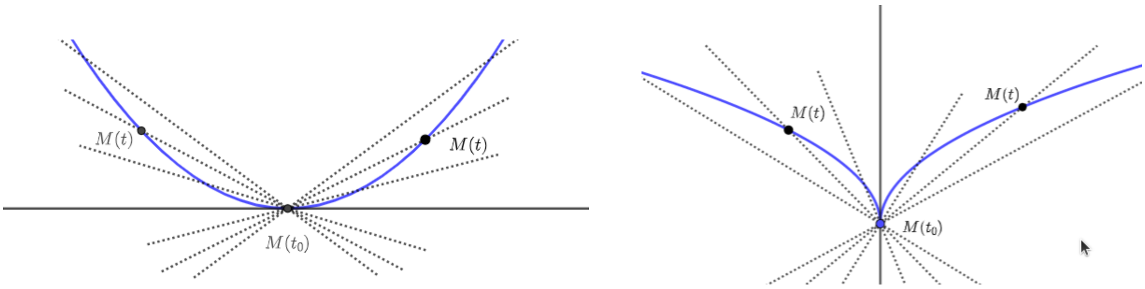
2.4 tangentes et demi-tangentes

définition 2: tangente en un point $M(t_0)$

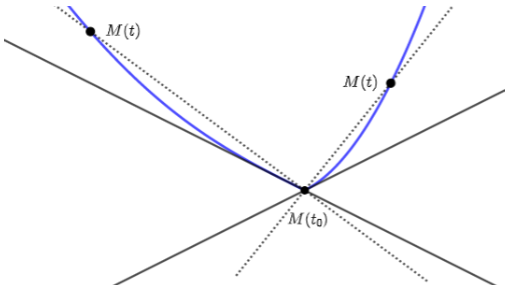
Soit (I,f) une courbe paramétrée.
On appelle <u>droite tangente au point $M(t_0)$</u> la limite, si elle existe, de la droite $(M(t_0)M(t))$ quand $t \to t_0$.

La tangente au point $M(t_0)$ est donc définie comme la limite(si elle existe) des droites sécantes en $M(t_0)$

rem (HP): on appelle <u>demi-tangente à droite</u> (resp à gauche) <u>au point $M(t_0)$</u> la limite, si elle existe, de la droite $(M(t_0)M(t))$ quand $t \to t_0^+$ (resp quand $t \to t_0^-$)



DANS LES 2 CAS CI-DESSUS, LA DROITE TANGENTE EN $M(t_0)$ EXISTE CAR LORSQUE $t \to t_0$ LA DROITE $(M(t_0)M(t))$ POSSÈDE UNE LIMITE

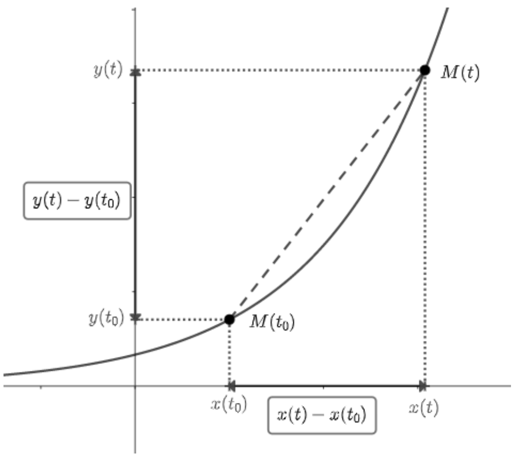


Cette fois, la droite tangente en $M(t_0)$ n'existe pas car la droite $(M(t_0)M(t))$ ne possède pas de limite lorsque $t \to t_0$.
En revanche, il y a existence d'une demi-tangente à droite et à gauche
on parle de POINT ANGULEUX
à noter que la demi-tangente à gauche peut être située à droite...

théorème 2: étude de la tangente avec le coefficient directeur

Si $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)-y(t_0)}{x(t)-x(t_0)}$ existe alors la droite tangente en $M(t_0)$ existe.

- Si cette limite est infinie alors la tangente est verticale
- Si cette limite est finie, elle est égale au coefficient directeur de la droite tangente.



rappel d'une astuce classique (règle de L'Hôpital)
Lorsque x et y sont dérivables en t_0 et que $x'(t_0) \neq 0$, on remarque que

$$\lim_{t\to t_0} \frac{y(t)-y(t_0)}{x(t)-x(t_0)} = \lim_{t\to t_0} \frac{\dfrac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}}{\dfrac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}} = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$$

couramment cependant, on utilise plutôt les DLs

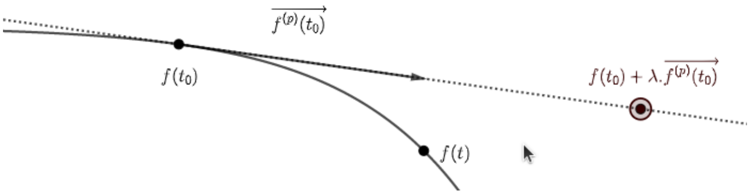
théorème 3: à la limite du programme

La droite tangente en $M(t_0)$ existe ssi les deux droites demi-tangentes à gauche et à droite existent et qu'elles sont égales (c'est à dire lorsqu'elles ont des vecteurs directeurs colinéaires (mais pas forcément égaux!))

théorème 4: La droite tangente en un point $M(t_0)$ est dirigée par le premier vecteur dérivé non nul

Soit Γ une courbe paramétrée (I,f), et $t_0 \in I$.
On note p l'ordre du premier vecteur dérivé non nul de f en t_0.
Alors:

1. La droite tangente en $M(t_0)$ à Γ existe
2. Le vecteur $\overrightarrow{f^{(p)}(t_0)} = \dfrac{\overrightarrow{d^pM}}{dt^p}(t_0)$ dirige la tangente
3. L'équation cartésienne de la tangente en $M(t_0)$ est donc donnée par le déterminant $\begin{vmatrix} x - x(t_0) & x^{(p)}(t_0) \\ y - y(t_0) & y^{(p)}(t_0) \end{vmatrix} = 0$
4. Une équation paramétrique de la tangente au point $M(t_0)$ est donc $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \lambda & \longmapsto & f(t_0) + \lambda.\vec{f}^{(p)}(t_0) \end{array}$



démonstration: Soit $t_0 \in I$ fixé.

- par définition de p on a $\vec{f}^{(1)}(t_0) = \vec{f}^{(2)}(t_0) = \vec{f}^{(3)}(t_0) = \cdots = \vec{f}^{(p-1)}(t_0) = \vec{0}$ et $\vec{f}^{(p)}(t_0) \neq \vec{0}$
- La formule de Taylor-Youg à l'ordre p donne

$$\boxed{f(t) = f(t_0) + \sum_{i=1}^{p} \frac{(t-t_0)^i}{i!}\vec{f}^{(i)}(t_0) + (t-t_0)^p\epsilon(t) \text{ avec } \lim_{t_0} \epsilon = \vec{0}}$$

  et donc ici $f(t) = f(t_0) + \dfrac{(t-t_0)^p}{p!}\vec{f}^{(p)}(t_0) + o((t-t_0)^p)$

  ce qui peut s'écrire encore $\boxed{\overrightarrow{M(t_0)M(t)} = \dfrac{(t-t_0)^p}{p!}\vec{f}^{(p)}(t_0) + o((t-t_0)^p)}$

- Pour $t \neq t_0$,
  la droite $(M(t_0)M(t))$, passe par le point fixe $M(t_0)$, et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{M(t_0)M(t)} = f(t) - f(t_0)$.
  Et donc également par tout vecteur non nul colinéaire à celui-ci,
  donc en particulier par le vecteur $\boxed{\dfrac{1}{(t-t_0)^p}.\overrightarrow{M(t_0)M(t)} = \dfrac{\overrightarrow{M(t_0)M(t)}}{(t-t_0)^p} = \dfrac{\vec{f}^{(p)}(t_0)}{p!} + o(1)}$
  Lorsque $t \to t_0$ ce vecteur tend vers $\dfrac{\vec{f}^{(p)}(t_0)}{p!} \neq \vec{0}$.
  La sécante admet donc une position limite: la droite qui passe par le point $M(t_0)$ et qui est dirigée par le vecteur $\dfrac{\vec{f}^{(p)}(t_0)}{p!}$ colinéaire à $\vec{f}^{(p)}(t_0)$

définition 3: point régulier, stationnaire, singulier

1. On dit que le point M_{t_0} est un point régulier de $\Gamma = (I,f)$ lorsque $\vec{f'}(t_0) = \dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} \neq \vec{0}$.
Dans le cas contraire, on dit que le point M_{t_0} est un point stationnaire ou singulier.
2. Si tous les points de la courbe sont réguliers , on dit que la courbe est régulière

remarque:

- *l'équation de la tangente à Γ en un point régulier M_{t_0} est donc donnée par le déterminant* $\begin{vmatrix} x - x(t_0) & x'(t_0) \\ y - y(t_0) & y'(t_0) \end{vmatrix} = 0$ *et son coefficient directeur vaut* $\dfrac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$
- *le point $M(t_0)$ est donc un point stationnaire ssi $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$.*
(interprétation cinématique : cela correspond à une vitesse nulle. . .)
- *dans le cas où t_0 est une extrémité de I, la dérivée ne sera qu'une dérivée à droite ou une dérivée à gauche.*

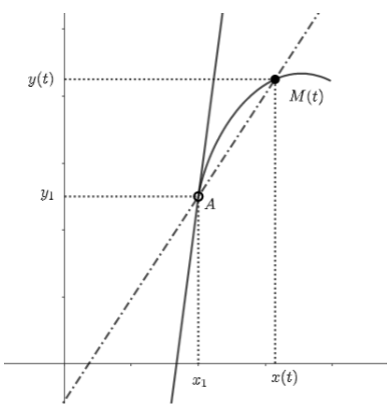
définition 4: (on retrouvera ces définitions plus tard aussi)

Soit (I,f) une courbe paramétrée régulière de classe C^1(au moins), et $t \in I$
On appelle:

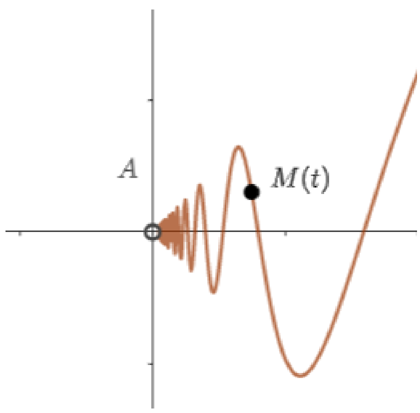
- vecteur unitaire tangent au point $M(t)$ le vecteur $\boxed{\vec{T}(t) = \dfrac{\overrightarrow{f'(t)}}{||\overrightarrow{f'(t)}||} = \dfrac{\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t)}{||\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t)||}}$
- vecteur unitaire normal au point $M(t)$ le vecteur $\vec{N}(t)$, qui est l'image de $\vec{T}(t)$ par la rotation d'angle $+\pi/2$
- repère de Frenet au point $M(t)$ le repère orthonormé direct $(M(t),\vec{T}(t),\vec{N}(t))$
- paramètre angulaire au point $M(t)$ le réel $\alpha(t)$ tel que $\boxed{\vec{T}(t) = \cos(\alpha(t)).\vec{i} + \sin(\alpha(t)).\vec{j}}$

définition 5: point limite ou point asymptote

Soit t_1 une borne ouverte de l'intervalle I
On dit qu'il y a un point limite lorsque $t \to t_1$ lorque f possède une limite (finie) lorsque $t \to t_1$. (c'est à dire lorsque $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ admettent des limites finies en t_1)
Pour étudier la pente de l'éventuelle demi- tangente en un point limite, on peut considérer :
$\lim\limits_{t \to t_1} \dfrac{y(t) - y_1}{x(t) - x_1}$ où $x_1 = \lim\limits_{t \to t_1} x(t)$ et $y_1 = \lim\limits_{t \to t_1} y(t)$



présence d'une demi-tangente au point limite A



pas de demi-tangente au point limite A

2.5 position de la courbe par rapport à la tangente

définition 6: point birégulier

On dit que le point $\mathrm{M}_{\mathrm{t}_0}$ est un point birégulier lorsque la famille $(\vec{f}'(t_0),\vec{f}''(t_0))$ est libre.
interprétation cinématique : un point est birégulier lorsque sa vitesse et son accélération ne sont pas colinéaires. Ces deux vecteurs constituent alors une base du plan.
rem: $\mathrm{M}_{\mathrm{t}_0}$ *est alors forcément un point régulier aussi car* $\vec{f}'(t_0) \neq \vec{0}$ *nécessairement*

La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 donne

$$f(t) = f(t_0) + (t-t_0).f'(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2} f^{(2)}(t_0) + o((t-t_0)^2)$$

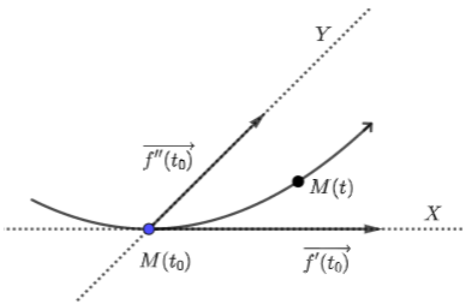
soit encore

$$\overrightarrow{M(t_0)M(t)} = (t-t_0).f'(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2} f^{(2)}(t_0) + o((t-t_0)^2)$$

- La famille $(\vec{f}'(t_0),\vec{f}''(t_0))$ étant libre, on peut considérer le repère $(\mathrm{M}_{\mathrm{t}_0},\vec{f}'(t_0),\vec{f}''(t_0))$
- Notons (X,Y) les coordonnées de $M(t)$ dans ce repère.

- Par définition ceci signifie que
$$\overrightarrow{M(t_0)M(t)} = X.\vec{f}'(t_0) + Y.\vec{f}^{(2)}(t_0)$$
- on a donc par identification $\begin{cases} X = (t-t_0) + o((t-t_0)^2) & \underset{t\to t_0}{\sim} t - t_0 \\ Y = \dfrac{(t-t_0)^2}{2} + o((t-t_0)^2) & \underset{t\to t_0}{\sim} \dfrac{(t-t_0)^2}{2} \end{cases}$

On remarque alors que $Y \underset{t_0}{\sim} \dfrac{X^2}{2}$ *et que* X *change de signe.*



Ces équivalents permettent de dessiner l'allure de la courbe au voisinage du point $\mathrm{M}_{\mathrm{t}_0}$ car ils nous donnent le signe de X et de Y en t_0^- et t_0^+

remarque 3

1. *Un point birégulier est un point pour lequel* $(p,q) = (1,2)$*: il s'agit toujours d'un point d'allure ordinaire*
2. *Comme les points biréguliers sont toujours des points d'allure ordinaire, on peut en déduire que les éventuels points de rebroussement et points d'inflexion sont cachés parmi les points NON biréguliers. On les cherche donc en résolvant* $\det(f'(t_0),f^{(2)}(t_0)) = \begin{vmatrix} x'(t_0) & x''(t_0) \\ y'(t_0) & y''(t_0) \end{vmatrix} = x'(t_0)y''(t_0) - y'(t_0)x''(t_0) = 0$
3. *Un point de rebroussement est nécessairement un point singulier car* p *doit être pair*

méthode 1: point d'inflexion, de rebroussement, d'allure ordinaire

On effectue un DL de x et de y en t_0 jusqu'à l'obtention de deux vecteurs indépendants. Ces deux vecteurs constitueront avec le point $M(t_0)$ un repère dans lequel les coordonnées seront plus simples.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} + (t-t_0)^p \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \cdots + (t-t_0)^q \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + o((t-t_0)^q$$

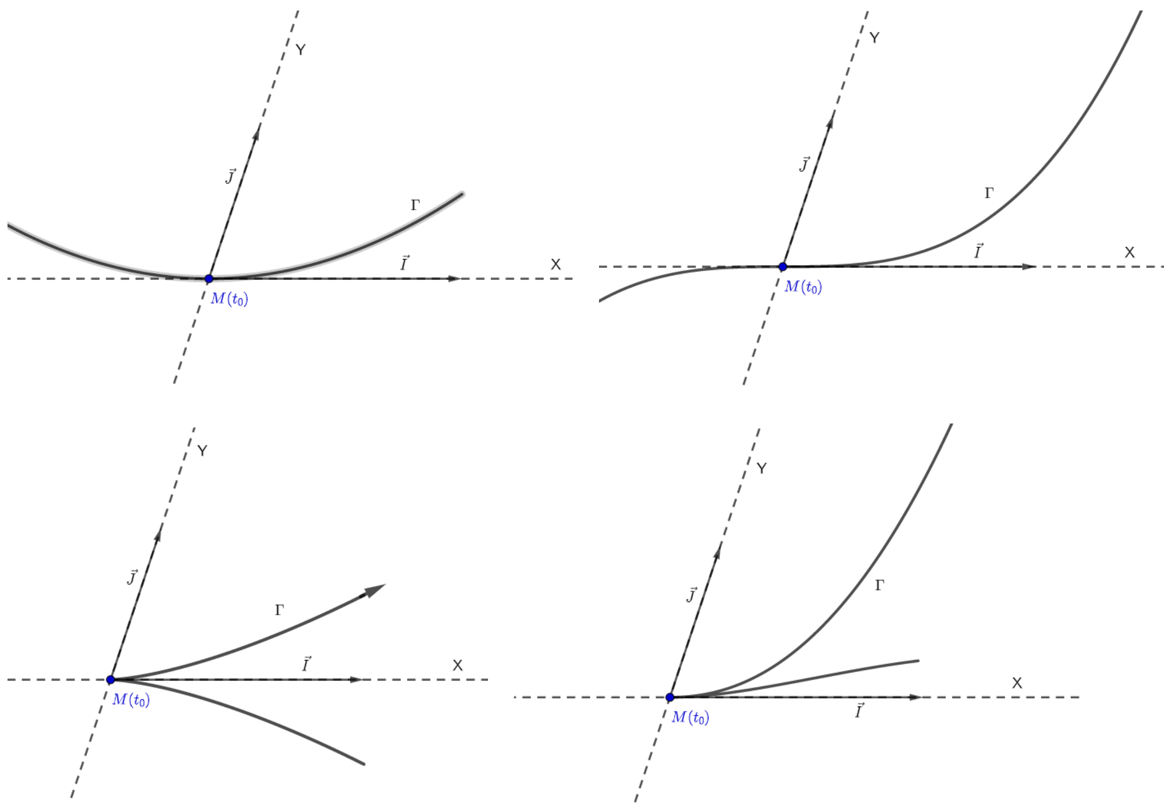
On note:

- $\vec{I} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ le premier vecteur non nul du DL
- $\vec{J} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ est le premier vecteur non colinéaire à $\vec{I}$
- $(X(t),Y(t))$ les coordonnées dans le repère $(M(t_0),\vec{I},\vec{J})$

On a alors

$$\boxed{X(t) \underset{t_0}{\sim} (t-t_0)^p \text{ et } Y(t) \underset{t_0}{\sim} (t-t_0)^q}$$

On fait ensuite un dessin grâce à la parité de p et de q puis on conclut.



remarques:

- le DL peut être obtenu soit par opérations sur les DLs de référence ou par la formule de Taylor Young.
- il ne suffit pas de donner p et q et de conclure: il faut écrire le DL et refaire le raisonnement ci-dessus.

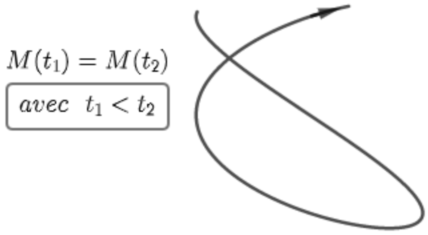
on montre que:

- *p est l'ordre de la première dérivée non nulle de f en t_0*
- *q est le plus petit entier tel que $\vec{f}^{(q)}(t_0)$ soit NON colinéaire à $\vec{f}^{(p)}(t_0)$ (forcément $q > p$)*

2.6 point multiple ou point double (HP?)

définition 10:
On dit que le point M est un point multiple ou un point double lorsque

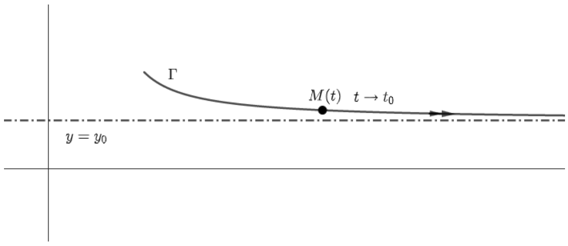
$$\exists t_1 \neq t_2, M = f(t_1) = f(t_2) = M_{t_1} = M_{t_2}$$

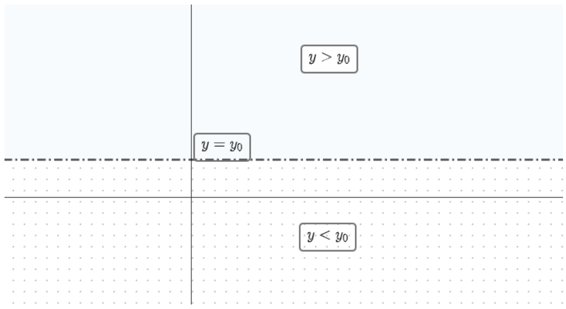


2.7 branches infinies

- On dit qu'il y a UNE BRANCHE INFINIE lorsque "le point part à l'infini", c'est à dire lorsque x et/ou y tendent vers $\pm\infty$.
- La question que l'on se pose alors est de savoir si la courbe se rapproche d'une droite:
  on dit alors qu'UNE TELLE DROITE EST ASYMPTOTE À LA COURBE
- Une question classique est alors d'étudier, localement ou globalement, la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

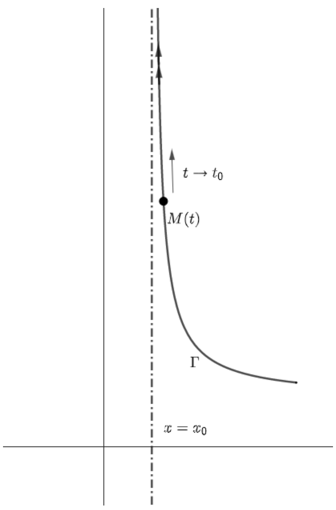
1. si $\begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \infty \\ \lim\limits_{t\to t_0} y(t) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$ alors $\boxed{\text{la courbe admet } \underline{\text{une droite asymptote horizontale}} \text{ d'équation } y = y_0}$

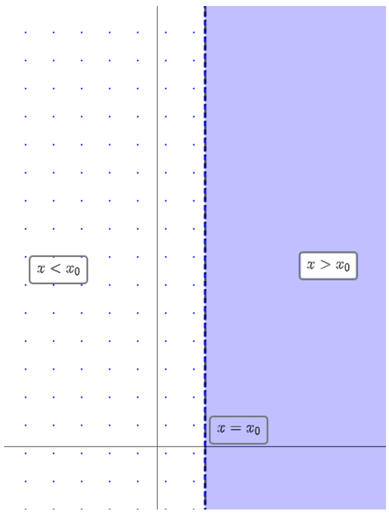




le signe de $y(t) - y_0$ donne la position de la courbe par rapport à la droite

2. si $\begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0} x(t) = x_0 \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty \end{cases}$ alors $\boxed{\text{la courbe admet } \underline{\text{une droite asymptote verticale}} \text{ d'équation } x = x_0}$

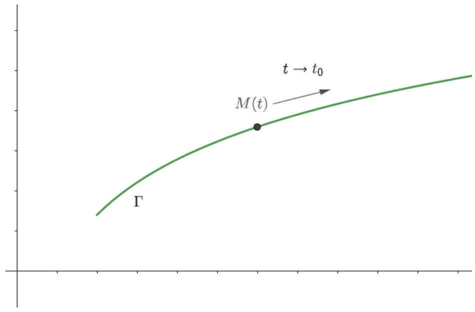




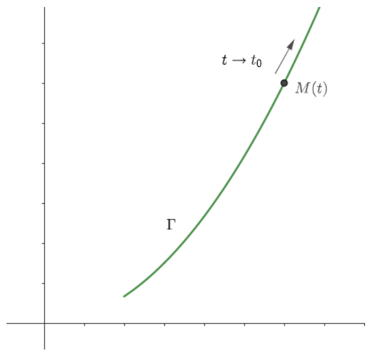
le signe de $x(t) - x_0$ donne la position de la courbe par rapport à la droite

3. si $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \infty$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \infty$ alors on étudie $A = \lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)}$

- si A n'existe pas , on ne dit rien.
- si $A = \infty$ alors
  la courbe n'admet pas de droite asymptote mais juste une branche parabolique de direction Oy.
- si $A = 0$ alors
  la courbe n'admet pas de droite asymptote mais juste une branche parabolique de direction Ox.

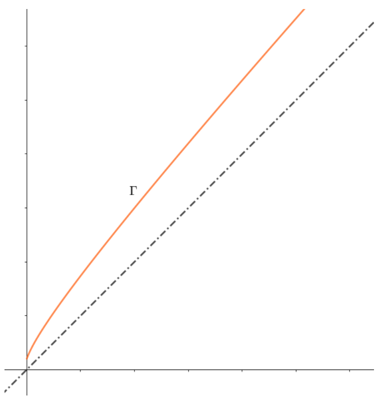


BRANCHE PARABOLIQUE DE DIR. Ox

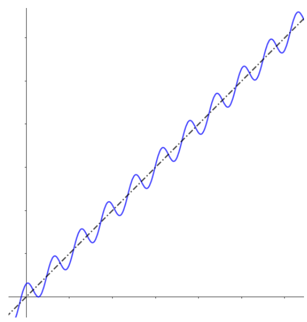


BRANCHE PARABOLIQUE DE DIR. Oy

- si $A \in \mathbb{R}^*$ alors on étudie $B = \lim\limits_{t\to t_0} y(t) - Ax(t)$
  - si B n'existe pas alors *la courbe n'admet pas de droite asymptote .*
  - si $B = \infty$ alors
    la courbe n'admet pas de droite asymptote mais juste une branche parabolique de dir. $y = Ax$

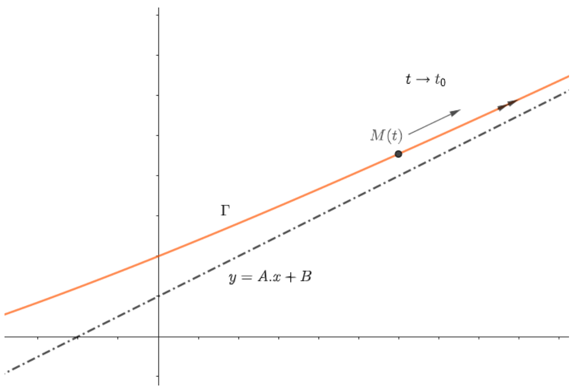


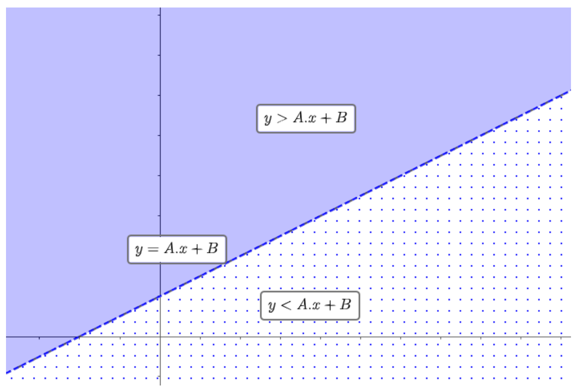
BRANCHE PARABOLIQUE DE DIR. LA DROITE $y = A.x$



PAS DE BRANCHE PARABOLIQUE

  - si $B \in \mathbb{R}$, la courbe admet une droite asymptote oblique d'équation $y = Ax + B$





Dans ce cas , on peut chercher la position de la courbe par rapport à l'asymptote en étudiant le signe de $y(t) - Ax(t) - B$. Pour cela, on peut utiliser les dl…