Fonctions vectorielles d'une variable réelle

fxsvect2324.tex

Table des matières

---

exemple 1: présentation des fonctions coordonnées

Soit la fonction vectorielle $\boxed{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos(t),2\sin(t)) \end{array}}$

- la fonction $\boxed{\begin{array}{rcl} f_1:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \cos(t) \end{array}}$ s'appelle la première fonction coordonnée de f
- la fonction $\boxed{\begin{array}{rcl} f_2:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & 2\sin(t) \end{array}}$ s'appelle la seconde fonction coordonnée de f.
- très souvent, lorsque $n=2$, on notera plutôt x et y les fonctions coordonnées (au lieu de f_1 et f_2)

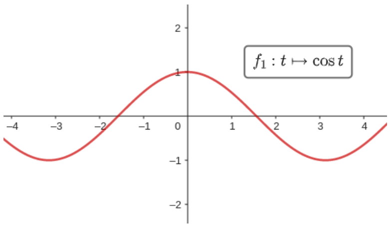
Q: Qu'est-ce qu'une fonction vectorielle d'une variable réelle?

Une fonction vectorielle d'une variable réelle est une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, c'est à dire

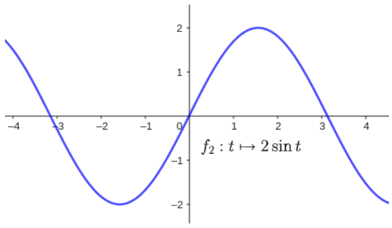
$$\boxed{f: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n}$$

- Dans ce polycopié n désignera un entier égal à deux ou trois.
- Dans les paragraphes qui suivent, on considère une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. ; on a donc $\boxed{f: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n}$.
- On peut écrire une telle fonction f sous la forme $f=(f_1,\dots,f_n)$, avec:
$$\boxed{\forall t\in I, f(t)=(f_1(t),\dots,f_n(t))}$$
- Les fonctions f_i s'appellent <u>les fonctions coordonnées de f</u> : ce sont des fonctions de $I\to\mathbb{R}$
Les fonctions coordonnées sont des fonctions *numériques* d'une variable réelle.
- On résume donc ceci pour toutes les fonctions coordonnées f_i par l'écriture $\boxed{f_i: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$
- Notons $(\vec{e_1},\dots,\vec{e_n})$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a donc aussi $\boxed{\forall t\in I, f(t)=\sum_{i=1}^{n} f_i(t)\vec{e}_i}$
Cette écriture avec les vecteurs sera parfois indispensable pout prouver certaines relations : il ne s'agit pas de faire l'impasse dessus !
- Dans $\mathbb{R}^n$, on ne peut parler de minorant et de majorant, car on n'a pas muni $\mathbb{R}^n$ d'une relation d'ordre.
- En identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, les résultats obtenus pour les fonctions de $I\to\mathbb{R}^2$ pourront s'étendre aux fonctions de $I\subset\mathbb{C}$.

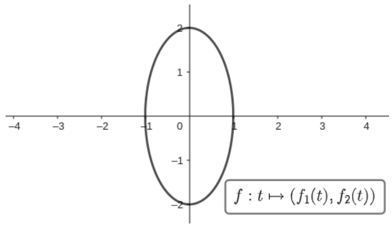
IL EST FONDAMENTAL DE FAIRE LA DIFFÉRENCE ENTRE FX NUMÉRIQUE ET FX VECTORIELLE



graphe de la fx NUMÉRIQUE f_1



graphe de la fx NUMÉRIQUE f_2



graphe de la fx VECTORIELLE f

1 Norme et distance euclidiennes

définition 1: norme euclidienne

On appelle norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, l'application $\boxed{\begin{array}{rcl} ||.|| : \quad \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x = (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \end{array}}$

théorème 1: propriétés de la norme, HP

i.) $\forall x \in \mathbb{R}^n, ||x|| = 0 \iff x = (0, \dots, 0)$

ii.) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, ||\lambda x|| = |\lambda|.||x||$

iii.) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, ||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y||$ (inégalité triangulaire)

iv.) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, |||x|| - ||y||| \leq ||x - y||$

définition 2: distance euclidienne

On appelle distance euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ l'application

$$\boxed{\begin{array}{rcl} d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \longmapsto & d(x,y) = ||x-y|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \end{array}}$$

théorème 2: propriétés de la distance, HP

i) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, d(x,y) = 0 \iff x = y$

ii) symétrie : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, d(x,y) = d(y,x)$

iii) inégalité triangulaire : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$

2 Limites dans $\mathbb{R}^n$

définition 3: fonction bornée, HP

On dit que la fonction f, définie sur I, est bornée lorsque : $\boxed{\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall t \in I, ||f(t)|| \leqslant M}$

rem:

- *On rappelle qu'on ne peut parler de majorant et de minorant dans $\mathbb{R}^n$.*
- *On rappelle aussi qu'en première année, on a montré l'équivalence ci-dessous pour une fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

$$f \text{ est bornée sur } I \iff |f| \text{ est majorée sur } I$$

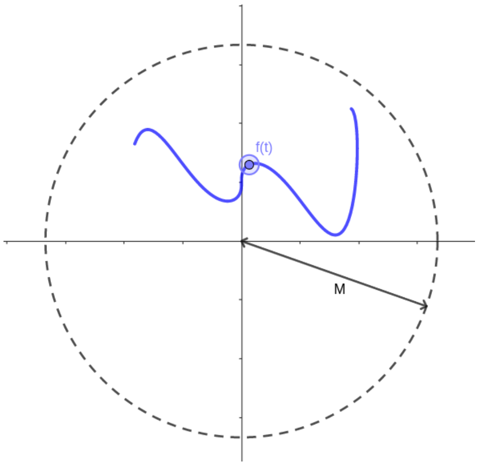


ILLUSTRATION DE LA DÉFINITION
les points $f(t)$ sont contenus dans le cercle $\mathcal{C}(O,M)$

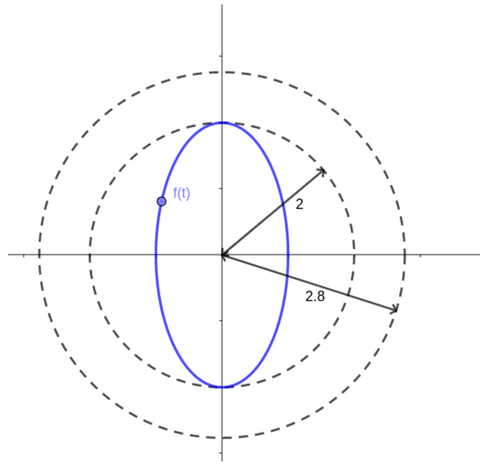


ILLUSTRATION DE L'EXEMPLE CI-DESSOUS
les points $f(t)$ sont contenus dans le cercle $\mathcal{C}(O,2)$
(mais aussi dans celui de rayon $2{,}8$*)*

exemple 2:

Montrer que la fonction suivante est bornée $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos t, 2\sin t) \end{array}$

solution:
Pour tout $t \in \mathbb{R}$*, on a*

$$||f(t)|| = \sqrt{\cos^2 t + 4\sin^2 t} \leqslant \sqrt{\cos^2 t + 3\cos^2 t + 4\sin^t} = \sqrt{4(\cos^2 t + \sin^2 t)} = 2$$

ce qui prouve que la fonction f *est bornée*

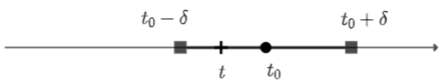
définition 4: limite en un point

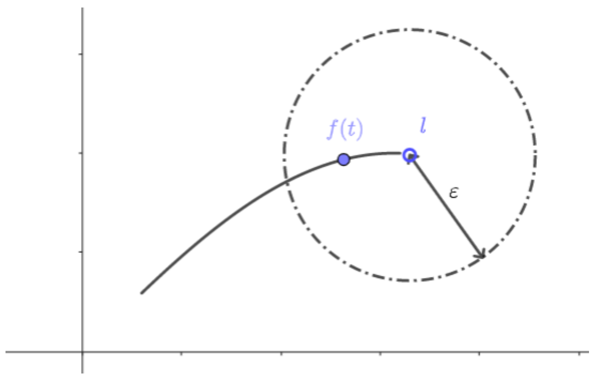
Soit t_0 un réel, élément ou extrémité de I, et l un élément de $\mathbb{R}^n$.
On dit que <u>f admet l comme limite au point t_0</u>, et on note $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = l$, lorsque

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \,, \exists\, \delta > 0 \,, \forall t \in I \,, (|t - t_0| \leqslant \delta) \Longrightarrow ||f(t) - l|| \leqslant \varepsilon}$$

rem: on rappelle que pour une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, on dit par définition que* $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = l$ *lorsque*

$$\boxed{\forall \epsilon > 0 \,, \exists\, \delta > 0 \,, \forall t \in I \,, (|t - t_0| \leqslant \delta) \Longrightarrow |f(t) - l| \leqslant \epsilon}$$





t EST SUR L'AXE DES RÉELS $\Longrightarrow$ $f(t)$ EST DANS LE PLAN
pour un choix de δ *assez petit...* *... on est certain que* $f(t)$ *est assez proche de* l

remarque 1 (***interprétation de la définition 4 à l'aide d'une fx numérique***)

- *En posant* $\boxed{\begin{array}{rcl} g : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \|f(t)-l\| = d(f(t),l) \end{array}}$,

  on a l'équivalence
  $$\lim_{t\to t_0} f(t) = l \iff \lim_{t\to t_0} g(t) = 0$$
- *en effet,*
  comme une norme est positive, on a $|g(t)-0| = g(t) = \|f(t)-l\|$
  ce qui donne les équivalences
  $$\begin{aligned}\lim_{t\to t_0} g(t) = 0 &\iff \forall\varepsilon>0\,,\exists\,\delta>0\,,\forall t\in I\,,(|t-t_0|\leqslant\delta)\Longrightarrow |g(t)-0|\leqslant\varepsilon \\ &\iff \forall\varepsilon>0\,,\exists\,\delta>0\,,\forall t\in I\,,(|t-t_0|\leqslant\delta)\Longrightarrow \|f(t)-l\|\leqslant\varepsilon \\ &\iff \lim_{t\to t_0} f(t) = l\end{aligned}$$

Q: EST-IL POSSIBLE D'ÉTUDIER LA LIMITE D'UNE FONCTION VECTORIELLE PAR SES FXS COORDONNÉES?

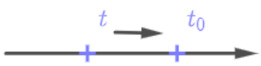
théorème 3: caractérisation à l'aide des fonctions coordonnées, (cas $n = 2$)

Il y a équivalence entre :

i) f admet $l = (l_1,l_2)$ comme limite en t_0

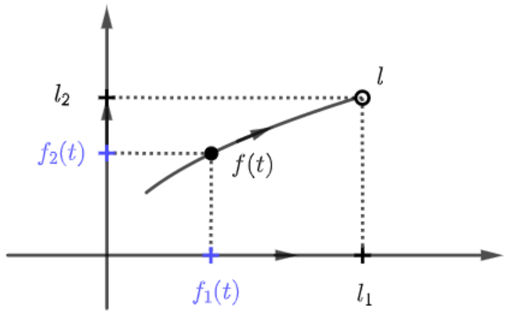
ii) $\lim_{t\to t_0} f_1(t) = l_1$ et $\lim_{t\to t_0} f_2(t) = l_2$

iii) chaque fonction coordonnée f_i admet l_i comme limite en t_0



SUR L'AXE DES RÉELS

lorsque $t \to t_0 \ldots$

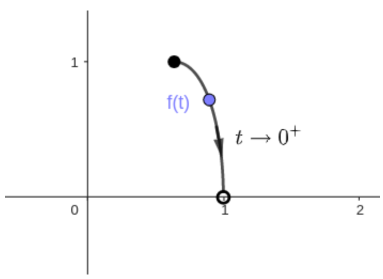


DANS LE PLAN

$\ldots$on a $\begin{cases} f_1(t) \to l_1 \\ f_2(t) \to l_2 \end{cases}$ càd $f(t) \to l$

exemple 3:

Etude de la limite en 0^+ de $\boxed{\begin{array}{rcl} f :]0,\frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\frac{\sin t}{t}, \sin t) \end{array}}$



- *rem:* $f(\frac{\pi}{2}) = (\frac{2}{\pi},1)$ *se dessine facilement*
- On sait que:
  - $\lim_{t\to 0^+} f_1(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$
  - $\lim_{t\to 0^+} f_2(t) = 0$

  On en déduit que $\lim_{t\to 0^+} f(t) = (1,0)$

définition 5: continuité en un point, continuité globale

Soit t_0 un réel appartenant à I .

1. On dit que <u>la fonction f est continue au point t_0</u> lorsque $\lim_{t\to t_0} f(t) = f(t_0)$
2. On dit que <u>la fonction f est continue sur l'intervalle I</u> lorsque f est continue en tout point de I

rem: on reconnaît les mêmes définitions que pour les fonctions numériques déjà vues en première année

Q: LA CONTINUITÉ DES FXS COORDONNÉES DONNE-T-ELLE LA CONTINUITÉ DE LA FX VECTORIELLE? OUI!

théorème 4: caractérisation à l'aide des fonctions coordonnées

Il y a équivalence entre :

i) f est continue en t_0 [resp. sur un intervalle I]

ii) chacune des fonctions coordonnées de f est continue en t_0 [resp. sur I]

exemple 4: on reprend l'exemple précédent

- la fonction $f_1 : t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est C^0 sur $]0,\frac{\pi}{2}[$,
  comme quotient de fxs continues le dénominateur ne s'annulant pas.
- la fonction $f_2 : t \mapsto \sin t$ est une fx usuelle donc est C^0 sur $]0,\frac{\pi}{2}[$

Comme les fonctions coordonnées de f sont continues sur $]0,\frac{\pi}{2}$, on en déduit que f **est continue sur** $]0,\frac{\pi}{2}[$

3 Dérivation des fonctions à valeurs vectorielles

On rappelle que $\overset{o}{I}$ désigne <u>l'intérieur de l'intervalle I</u>, c'est à dire le plus grand intervalle ouvert inclus dans I.

Exemples: si $I = [1,3]$ alors $\overset{o}{I} =]1,3[$ et si $I =]1,3]$ alors $\overset{o}{I} =]1,3[$ aussi!

3.1 dérivée en un point, fonction dérivée

définition 6: vecteur dérivé en un point

1. On dit que <u>f est dérivable en $t_0 \in \overset{o}{I}$</u> lorsque la fonction $g : t \mapsto \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ définie sur $I - \{t_0\}$ possède une limite (finie) lorsque t tend vers t_0. On la note $\boxed{f'(t_0)}$ ou $\boxed{\overrightarrow{f'(t_0)}}$
2. Si g possède une limite à droite [gauche] en t_0, on dit que <u>f est dérivable à droite [gauche] en t_0</u>. On les note alors $\boxed{\overrightarrow{f_d'(t_0)}}$ et $\boxed{\overrightarrow{f_g'(t_0)}}$.

rem: là encore, on notera la même définition que pour les fonctions numériques...

vocabulaire: $\overrightarrow{f'(t_0)}$ s'appelle le vecteur dérivé de f en t_0

remarque 2 (***interprétation cinématique de la dérivée***)

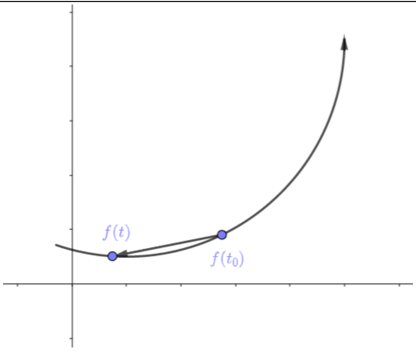
Pourquoi met-on souvent une flèche sur $\overrightarrow{f'(t_0)}$ et pas sur $f(t_0)$?

<u>On peut donner une interprétation cinématique à ces deux notions :</u>

- *t désigne le temps*
- *$f(t)$ la position du point à l'instant t*
- *$f'(t)$ correspond donc au vecteur vitesse à l'instant t.(d'où la flèche !)*

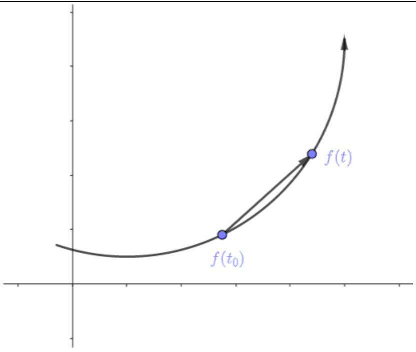
Dans l'exemple ci-dessus, on a donc le vecteur vitesse à l'instant $t = 0$ qui est égal au vecteur $\vec{i}$

La représentation d'une fonction vectorielle est une courbe orientée (dans le sens des t croissants



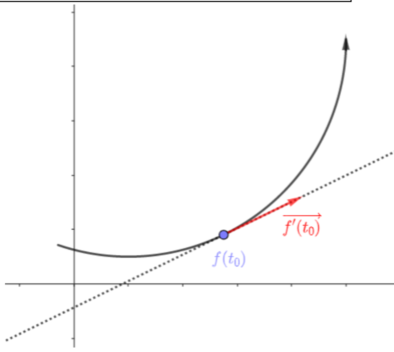
ICI $t < t_0$

les vecteurs $\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ *et* $f(t)-f(t_0)$
ont même direction et sens opposés

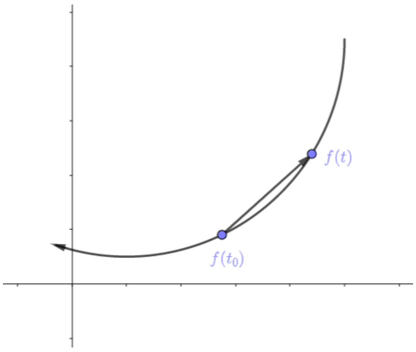


ICI $t > t_0$

les vecteur $\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ *et* $f(t)-f(t_0)$
ont même direction et même sens

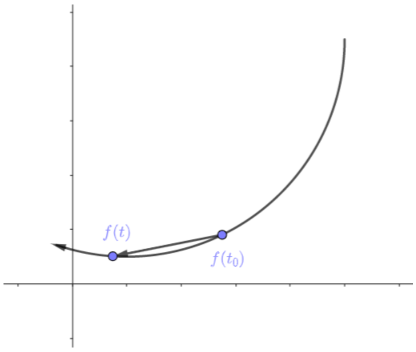


$$\overrightarrow{f'(t_0)} = \lim_{t\to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$



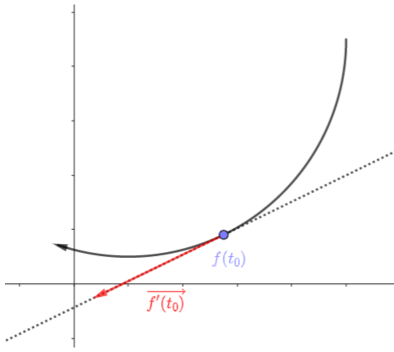
ICI $t < t_0$

les vecteurs $\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ *et* $f(t)-f(t_0)$
ont même direction et sens opposés



ICI $t > t_0$

les vecteur $\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ *et* $f(t)-f(t_0)$
ont même direction et même sens



$$\overrightarrow{f'(t_0)} = \lim_{t\to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$

remarque: contrairement aux courbes représentatives des fonctions numériques du type $y = f(x)$*, il n'est pas possible de connaître uniquement avec le dessin la norme du vecteur dérivé* $\overrightarrow{f'(t_0)}$

exemple 5:

Etudier la dérivabilité en 0 de $\boxed{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t.|t|\,, e^t-1-t) \end{array}}$

solution:
Soit $t \neq 0$,

$$\frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \frac{1}{t}.(t|t|-0, e^t-1-t-0) = \left(|t|, \frac{e^t-1-t}{t}\right) = \left(|t|\,, \frac{t}{2}+o(t)\right) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} (0{,}0)$$

Comme $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t)-f(0)}{t-0} = (0{,}0)$, on peut affirmer que f est dérivable en 0 et que $\vec{f'}(0) = (0{,}0) = \vec{0}$
rem: on verra dans le prochain polycopié qu'il s'agit d'un point stationnaire ou singulier

remarque: $\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ *est un abus de notation qui désigne le produit* $\dfrac{1}{t-t_0}.(f(t)-f(t_0))$

théorème 5: caractérisation de la dérivabilité par les fonctions coordonnées

Il y a équivalence entre

i) la fonction $f = (f_1, \ldots, f_n)$ est dérivable en t_0

ii) les n fonctions $f_1, f_2, \ldots$ et f_n sont dérivables en t_0

et l'on a alors : $\overrightarrow{f'(t_0)} = (f_1'(t_0), \ldots, f_n'(t_0))$

3.2 dérivées successives

La dérivée k-ième (ou d'ordre k) de f se note $\boxed{\vec{f}^{(k)} \text{ ou } \dfrac{\overrightarrow{d^k f}}{dt^k}}$

définition 7: fonctions de classe C^k sur I

1. f' est appelée la fonction dérivée de f
2. On dit que f est de classe C^k sur I lorsque f est k fois dérivable sur I et que $\vec{f}^{(k)}$ est continue sur I
3. On note $C^k(I, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions de classe C^k sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

remarque 3 (***interprétation cinématique de la dérivée seconde***)

$f''(t)$ correspond au vecteur accélération à l'instant t

théorème 6: caractérisation à l'aide des fonctions coordonnées

Il y a équivalence entre :

i) f est dérivable en t_0 (ou de classe C^k sur un intervalle I)

ii) chacune des fonctions coordonnées de f est dérivable en t_0 (resp de classe C^k sur I)

Q: QUELLE EST LA MORALE DE CE CHAPITRE?

Les propriétés d'une fonction vectorielle sont celles de ses fonctions coordonnées

$$f \text{ est } \begin{cases} \text{continue} \\ \text{dérivable} \\ \text{de classe } C^k \end{cases} \text{en } t_0 \iff \text{les fxs coordonnées de } f \text{ sont } \begin{cases} \text{continues} \\ \text{dérivables} \\ \text{de classe } C^k \end{cases} \text{en } t_0$$

$$f \text{ possède une limite en } t_0 \iff \text{les fxs coordonnées de } f \text{ possèdent des limites FINIES en } t_0$$

$$f \text{ possède un } DL_n \text{ en } t_0 \iff \text{les fxs coordonnées de } f \text{ possèdent des } DL_n \text{ en } t_0$$

$$f \text{ est } \begin{cases} \text{continue} \\ \text{dérivable} \\ \text{de classe } C^k \end{cases} \text{sur } I \iff \text{les fxs coordonnées de } f \text{ sont } \begin{cases} \text{continues} \\ \text{dérivables} \\ \text{de classe } C^k \end{cases} \text{sur } I$$

3.3 formules de dérivation

théorème 7: linéarité et dérivée du produit

Soient f et g désignent deux fonctions de $C^1(I,\mathbb{R}^n)$, et λ une application de $C^1(I,\mathbb{R})$.

1. l'application $f+g$ est de classe C^1 sur I avec $\boxed{(f+g)' = f' + g'}$
2. l'application λf est de classe C^1 sur I avec $\boxed{(\lambda f)' = \lambda'.f + \lambda.f'}$
3. l'application $< f,g >$ (produit scalaire) est de classe C^1 sur I avec $\boxed{(< f,g >)^{'} =< f^{'},g > + < f,g' >}$
4. si $n = 3$ alors l'application $f \wedge g$ est $C^(I,\mathbb{R}^3)$ avec $\boxed{(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'}$

démonstration

- *pour $n = 2$, on suppose que $f = (f_1,f_2)$ et $g = (g_1,g_2)$ sont C^1 sur I, ainsi que la fonction numérique λ*

  1. *posons $h = f + g = (f_1 + g_1,f_2 + g_2)$*
     - *comme f et g sont C^1 sur I, on sait que les fxs coordonnées f_1, f_2, g_1, g_2 le sont aussi*
     - *d'après les* THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LES FONCTIONS NUMÉRIQUES*,*
       on peut affirmer que $f_1 + f_2$ d'une part, et $g_1 + g_2$ d'autre part sont de classe C^1 sur I
     - *comme les fxs coordonnées de h sont C^1 sur I, on en déduit que h est C^1 sur I*

  2. *posons $h = \lambda.f = (\lambda.f_1,\lambda.f_2)$*
     - *comme f est C^1 sur I on sait que les fxs coordonnées f_1 et f_2 le sont aussi*
     - *d'après les* THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LES FONCTIONS NUMÉRIQUES*,*
       on peut affirmer que $\lambda.f_1$ d'une part, et $\lambda.f_2$ d'autre part sont de classe C^1 sur I
     - *comme les fxs coordonnées de h sont C^1 sur I, on en déduit que h est C^1 sur I*

  3. *posons $h =< f,g >= f_1.f_2 + g_1.g_2$*
     - *comme f et g sont C^1 sur I, on sait que les fxs coordonnées f_1, f_2, g_1, g_2 le sont aussi*
     - *d'après les* THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LES FONCTIONS NUMÉRIQUES*,*
       on peut affirmer $f_1.f_2 + g_1.g_2$ est de classe C^1 sur I, càd h !

- *pour $n = 3$, on suppose que $f = (f_1,f_2,f_3)$ et $g = (g_1,g_2,g_3)$ sont C^1 sur I*
  et alors $h = f \wedge g = \begin{pmatrix} f_2.g_3 - f_3.g_2 \\ f_3.g_1 - f_1.g_3 \\ f_1.g_2 - f_2.g_1 \end{pmatrix}$
  - *comme f et g sont C^1 sur I, on sait que les fxs coordonnées $f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3$ le sont aussi*
  - *d'après les* THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LES FONCTIONS NUMÉRIQUES*,*
    on peut affirmer que $f_2.g_3 - f_3.g_2, f_3.g_1 - f_1.g_3$ et $f_1.g_2 - f_2.g_1$ sont de classe C^1 sur I
  - *comme les fxs coordonnées de h sont C^1 sur I, on peut affirmer que h l'est aussi.*

théorème 8: linéarité et formules de Leibniz

Soient f et g désignent deux fonctions de $C^k(I,\mathbb{R}^n)$, et λ une application de $C^k(I,\mathbb{R})$

1. l'application $f+g$ est de classe C^k sur I avec $\boxed{(f+g)^{(k)} = f^{(k)} + g^{(k)}}$
2. l'application λf est de classe C^k sur I avec $\boxed{(\lambda f)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^{(i)} f^{(k-i)}}$
3. l'application $< f,g >$ (produit scalaire) est de classe C^k sur I avec $\boxed{(< f,g >)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} < f^{(i)},g^{(k-i)}} >$
4. si $n = 3$ alors l'application $f \wedge g$ est $C^k(I,\mathbb{R}^3)$ avec $\boxed{(f \wedge g)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} \wedge g^{(k-i)}}$

remarque 4

- *Il n'y a pas de formule avec la dérivée du produit fg car on ne peut multiplier 2 fxs vectorielles.*
- *Les formules précédentes sont des cas particuliers d'une situation plus générale :*
  Si B est une forme bilinééaire sur $\mathbb{R}^n$, et si f et g sont deux fonctions de classe $C^k(I,\mathbb{R}^n)$ alors :
  $B(f,g)$ est $C^k(I,\mathbb{R}^n)$ et l'on a la formule $(B(f,g))^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}.B(f^{(i)},g^{(k-i)})$

3.4 développements limités (DL)

définition 8: cette définition n'est pas à retenir

On dit que f admet un DL en t_0 à l'ordre p lorsque il existe $(\vec{W}_0,\ldots,\vec{W}_p) \in \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n)^{p+1}$ et une fonction $\epsilon : I \to \mathbb{R}^n$, telle que :

$$\boxed{\forall t \in I, f(t) = \sum_{i=0}^{p} (t-t_0)^i \vec{W}_i + (t-t_0)^p \epsilon(t) \text{ avec } \lim_{t\to t_0} \epsilon(t) = \vec{0}}$$

rem: là encore, c'est la même définition que pour une fonction non vectorielle
notation: on peut écrire aussi $o\left((t-t_0)^p\right)$ à la place de $(t-t_0)^p\epsilon(t)$

théorème 9: encore!!

Il y a équivalence entre

i) f admet un $DL_p(t_0)$

ii) toutes les fonctions coordonnées de f admettent un $DL_p(t_0)$

rem: dans la pratique, faire le DL d'une fx vectorielle revient à faire le DL de plusieurs fxs numériques

exemple 6:

Soit $f : t \mapsto (\ln(1+t), e^t)$
On a

$$f(t) = \begin{pmatrix} \ln(1+t) \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3) \\ 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t^2.\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + t^3.\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(t^3) \\ o(t^3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2}.\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{t^3}{6}.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{o(t^3)}_{\textit{fx vectorielle}}$$

théorème 10: Taylor-Young

Si f est de classe C^p sur I **alors** f admet un DL à l'ordre p en tout point t_0 de I, et l'on a :

$$\boxed{f(t) = f(t_0) + \sum_{i=1}^{p} \frac{(t-t_0)^i}{i!} \vec{f}^{(i)}(t_0) + o\left((t-t_0)^p\right)}$$

exemple 7:

La fonction $f : t \mapsto (\cos(e^t), \sin(\arctan t))$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ car ses fonctions coordonnées sont C^∞ sur $\mathbb{R}$.
D'après le théorème de Taylor-Young, f admet donc en tout point $t_0 \in \mathbb{R}$ un DL à tout ordre.