SUITES NUMERIQUES REELLES
rappels de sup'

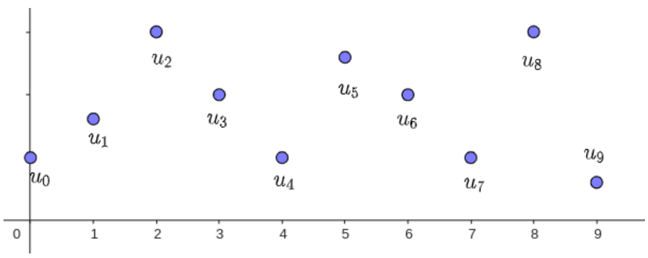
11 août 2024

Table des matières

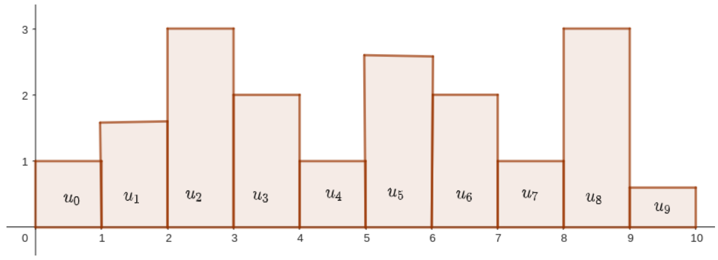
1 Définitions

définition 1: suite réelle

On appelle suite réelle toute fonction de $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Une telle suite est notée $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$



avec des points



avec des rectangles

remarque 1

On note $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ ou encore $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles. Il s'agit d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

remarque 2 (*mode de définition d'une suite*)

Il existe trois façons de définir une suite:

1. ***de façon explicite:*** *le terme u_n est donné par une formule en fonction de n.*
   exemple : $u_n = \arctan n + \cos n$ pour tout $n \geqslant 0$
2. ***de façon implicite:*** *le terme u_n n'est pas donnée par une formule, mais par une proposition qu'il est le seul réel à vérifier.*
   exemple: soit u_n l'unique racine sur $]0,1[$ de l'équation $x^n - nx + 1 = 0$ pour tout $n \geqslant 2$
3. ***par récurrence:*** *le terme u_n est donné par une formule en fonction des termes précédents.*
   - *Lorsque la formule ne dépend que de u_{n-1}, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suit une relation de récurrence d'ordre un.*
     exemple: soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et la relation $u_n = \sqrt{1+u_{n-1}}$ pour tout $n \geqslant 1$
   - *Lorsque la formule ne dépend que de u_{n-1} et u_{n-2}, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suit une relation de récurrence d'ordre deux.*
     exemple: soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $(u_0,u_1) = (1,2)$ et la relation $u_n = u_{n-1}^2.u_{n-2}^3$ pour tout $n \geqslant 2$
   - *On retrouve ce genre de suites en algèbre linéaire et en probabilités!*

En mathématiques, une même suite peut-être définie de manière équivalente aussi bien de manière explicite que par récurrence.

définition 2: majorée, minorée, croissante, décroissante,. . .

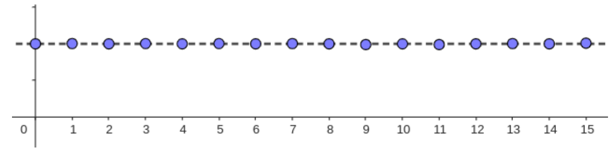
Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
On dit que la suite u est :

i) majorée lorsque $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M$
ii) minorée lorsque $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant m$
iii) bornée lorsque u est à la fois majorée et minorée, càd $\exists (m,M) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, m \leqslant u_n \leqslant M$
iv) décroissante lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leqslant u_n$
v) croissante lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geqslant u_n$
vi) constante lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n$

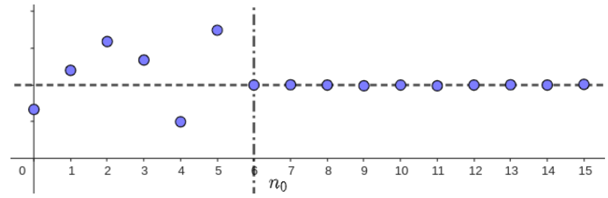
ces définitions sont à connaître par coeur

remarque 3 (*très important*)

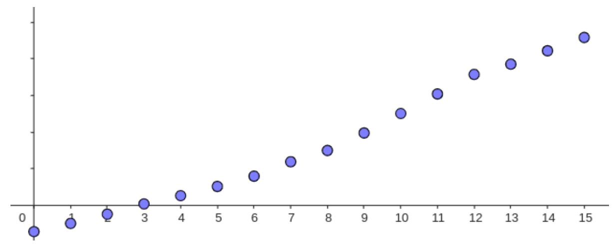
Dans la définition ci-dessous, les réels M et m ne doivent pas dépendre de n !
Par exemple, si l'on sait que l'on a $\forall n \geqslant 0, u_n \leqslant n^2$, on peut dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par la suite $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$, mais on ne peut évidemment pas dire la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite majorée.



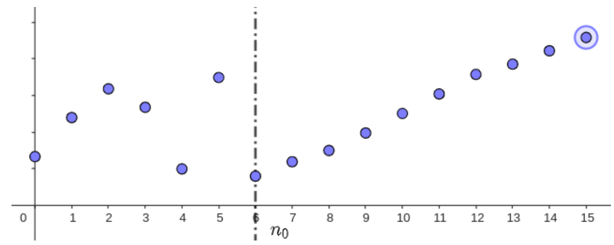
suite constante
$\exists\, c \in \mathbb{R}\, \forall n \geqslant 0, u_n = c$



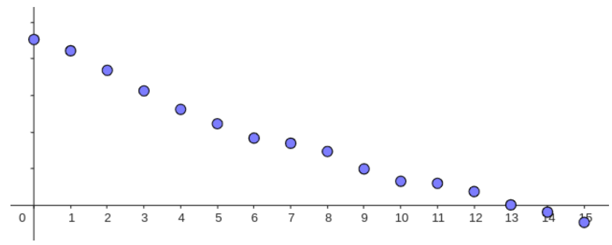
suite stationnaire
$\exists\, c \in \mathbb{R}, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n = c$



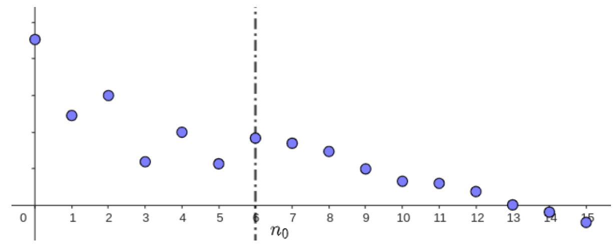
suite croissante
$\forall n \geqslant 0, u_{n+1} \geqslant u_n$



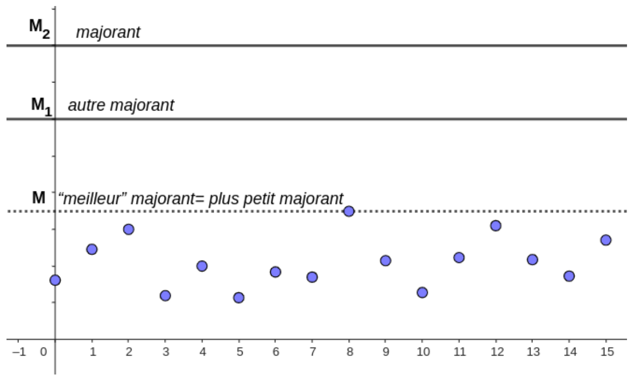
suite croissante à partir d'un certain rang
$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, u_{n+1} \geqslant u_n$

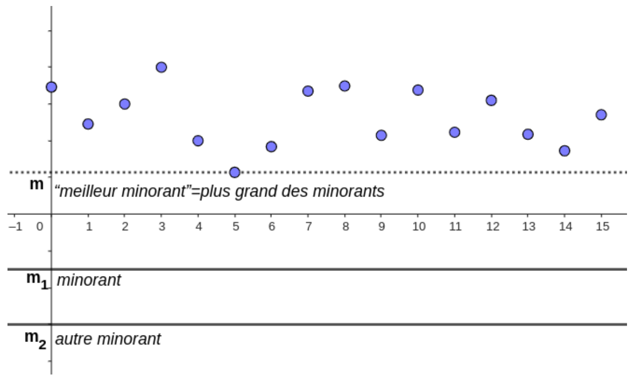


suite décroissante
$\forall n \geqslant 0, u_{n+1} \leqslant u_n$



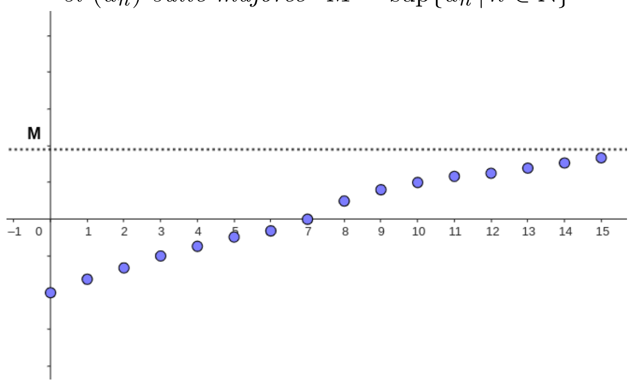
suite décroissante à partir d'un certain rang
$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, u_{n+1} \leqslant u_n$

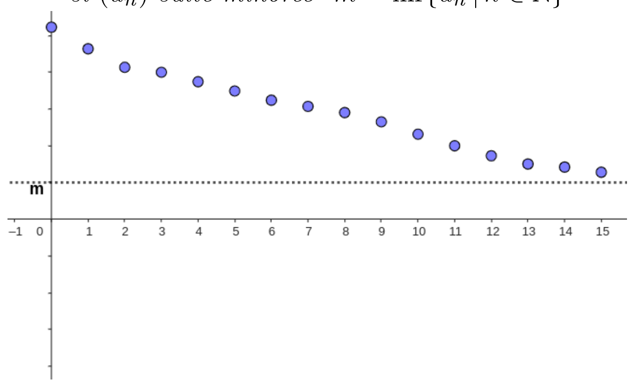




la borne sup. est le meilleur majorant
si (u_n) *suite majorée* $M = \sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

la borne inf. est le meilleur minorant
si (u_n) *suite minorée* $m = \inf\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$





théorème 1:

La suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée **ssi** la suite réelle positive $|u| = (|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

rem: très souvent pour montrer qu'une suite est bornée on préférera majorer sa valeur absolue.

démonstration:
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. On suppose que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
   Par définition, ceci signifie qu'il existe un réel M tel que pour tout entier n on a $|u_n| \leqslant M$.
   Ce que l'on peut encore écrire $-M \leqslant u_n \leqslant M$.
   Ecrit sous cette forme, il est clair que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée; en effet, elle est minorée par $-M$ et elle est majorée par M
2. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   Par définition, ceci signifie qu'il existe un réel m et un réel M
   tels que pour tout entier n on a $m \leqslant u_n \leqslant M$.
   On en déduit que pour tout entier n on a aussi $-M \leqslant -u_n \leqslant -m$
   Comme $|u_n| = \max(u_n, -u_n)$, il est clair qu'en posant $M_1 = \max(-m,M)$ on a pour tout entier n l'inégalité $|u_n| \leqslant M_1$.
   On vient de prouver que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

exemple 1: techniques de majoration classiques

Soient les suites u et v définies par $\forall n \geqslant 0, u_n = \dfrac{(-1)^n n + 6}{n^2+4}$

Montrer que pour tout $n \geqslant 0$ on a $|u_n| \leqslant \dfrac{5}{2}$

- Soit $n \geqslant 0$ fixé.
  D'après **l'inégalité triangulaire**, on a

  $$|(-1)^n n + 6| \leqslant |(-1)^n n| + |6| = n + 6$$

  On en déduit que

  $$|u_n| \leqslant \frac{n+6}{n^2+4} = \frac{n}{n^2+4} + \frac{6}{n^2+4}$$

  – En minorant le dénominateur 4, on obtient $\dfrac{6}{n^2+4} \leqslant \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$

  – Pour $\dfrac{n}{n^2+4}$ on va minorer le dénominateur par n^2,
  en prenant bien garde de le faire uniquement pour $n \geqslant 1$!
  Pour $n \geqslant 1$ on a $\dfrac{n}{n^2+4} \leqslant \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n} \leqslant 1$

  – On a ainsi prouvé que <u>pour tout $n \geqslant 1$</u> on a $|u_n| \leqslant 1 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2}$

  – Comme $|u_0| = \dfrac{3}{2} < \dfrac{5}{2}$, on peut affirmer que <u>pour tout $n \geqslant 0$</u> on a $|u_n| \leqslant \dfrac{5}{2}$

  – *remarque: pour $n \geqslant 1$ on aurait pu également obtenir une majoration plus directe mais moins précise en minorant à chaque fois n^2+4 par n^2, ce qui donnait*

  $$|u_n| \leqslant \frac{n+6}{n^2+4} \leqslant \frac{n+6}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{6}{n^2} \leqslant 1 + 6 = 7$$

  – *remarque: contrairement à l'exemple ci-dessous, il n'était pas possible de passer par l'étude de la fonction $x \mapsto \dfrac{(-1)^x x + 6}{x^2+4}$. Voyez-vous pourquoi?*

remarque 4 (***notion très importante :*** $\boxed{\textit{à partir d'un certain rang}}$)

- *exemple: la suite $(u_n)_{n\geqslant 0} = (n^2 - 6n)_{n\geqslant 0}$ est croissante à partir du rang 3*
  En effet: pour tout $n \geqslant 3$ on a

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 6(n+1) - (n^2 - 6n) = \cdots = 2n - 6 = 2(n-3) \geqslant 0$$

- *On dit qu'une propriété portant sur une suite u est vraie à partir d'un certain rang, ou encore, pour n assez grand, lorsqu' elle est vraie pour tout n appartenant à un intervalle du type $[n_0, +\infty[$ avec n_0 entier fixé.*
  Par exemple, dire que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang signifie

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, u_{n+1} \geqslant u_n$$

- *Lorsque l'on étudie une suite, c'est essentiellement son comportement au voisinage de l'infini qui nous intéresse: c'est pour cela que l'on se contente souvent de déterminer des propriétés "pour n assez grand"*

exemple 2: à retenir dans la pratique

Montrer qu'il y a équivalence entre :

i) la suite u est bornée à partir d'un certain rang.

ii) la suite u est bornée.

définition 3: suite stationnaire

On dit que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire lorsqu'elle est constante à partir d'un certain rang.

$$\boxed{\text{une suite } u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est stationnaire ssi } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, u_{n+1} = u_n.}$$

rem: une suite stationnaire est toujours une suite convergente mais la réciproque est fausse. . . Attention cependant au cas particulier des suites à valeurs entières, où l'on montre (voir poly. exos) qu'une suite de nombre entiers est convergente ssi elle est stationnaire!

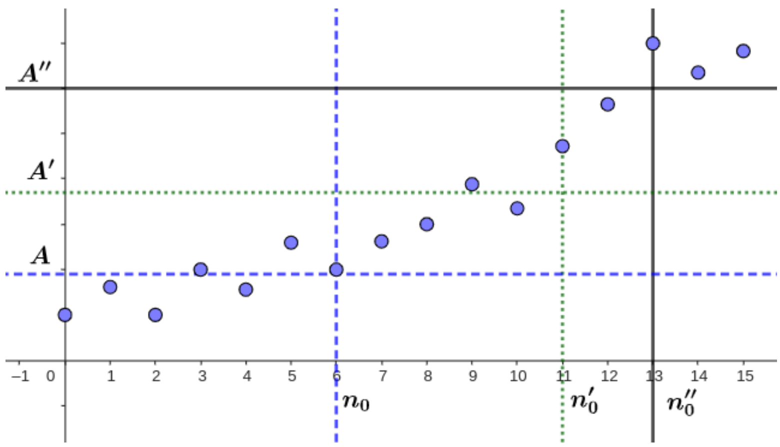
définition 4: limite infinie

i) On dit que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, et on écrit $\lim u_n = +\infty$, lorsque

$$\boxed{\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant A}$$

ii) On dit que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$, et on écrit $\lim u_n = -\infty$, lorsque

$$\boxed{\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant A}$$



Si la suite (u_n) tend vers $+\infty$ on peut dire qu'il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on a $u_n \geqslant 10^{10^{10^{10}}}$

Q: QU'EST-CE QU'UNE SUITE CONVERGENTE?

définition 5: suite convergente

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

i) On dit que la suite u convergente vers le réel l, et on écrit $\lim u_n = l$, lorsque

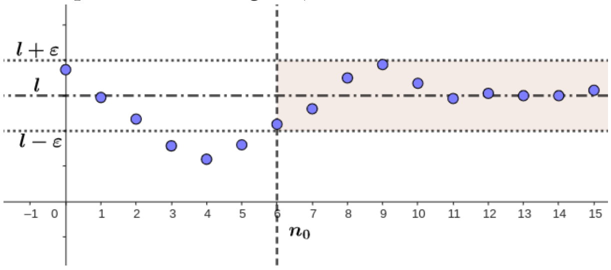
$$\boxed{\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |u_n - l| \leqslant \epsilon}$$

C'est à dire qu'une suite est dite convergente lorsqu'elle possède une limite FINIE.

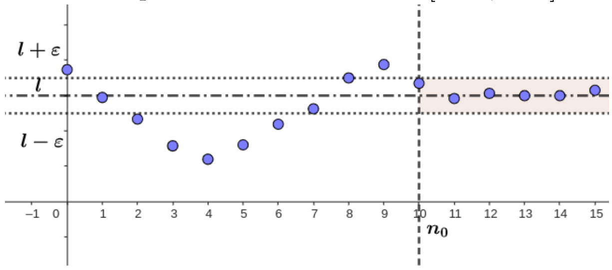
ii) Dans le cas contraire, on dit que la suite u est divergente.

rem: une suite divergente est une suite qui ne possède pas de limite ou qui possède une limite infinie.

à partir du rang n_0, tous les termes de la suite sont compris dans l'intervalle $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$



avec un $\varepsilon > 0$



avec un $\varepsilon > 0$ plus petit que le précédent

exemple 3: recherche de valeur approchée

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers π^2 et pour laquelle on sait que $\forall n \geqslant 100, |u_n - \pi^2| \leqslant \dfrac{1}{n^3}$.
Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle u_n est une valeur approchée de π^2 à 10^{-2} près.

- ce que l'on nous demande de manière plus précise, c'est la plus petite valeur de n pour laquelle on est certain que u_n est une valeur approchée de π^2 à 10^{-2} près.
- Déjà, on commence par remarquer que l'on ne peut rien dire à propos des termes qui ont un indice inférieur ou égal à 99. Peut-être y a-t-il l'un de ces termes qui est proche de π^2 à moins de 10^{-2}, mais on ne peut pas le savoir!
- Pour obtenir $|u_n - \pi^2| \leqslant 10^{-2}$, il suffit que n soit telle que $\dfrac{1}{n^3} \leqslant 10^{-2}$, c'est à dire $n \geqslant \sqrt[3]{100}$. Comme $4^3 = 64$ et $5^3 = 125$, on en déduit que $\dfrac{1}{n^3} \leqslant 10^{-2} \iff n \geqslant 5$
- Cependant, il ne faudrait surtout pas conclure que u_5 est la valeur approchée que l'on cherche (cf. remarque du point deux)!
- Conclusion: la plus petite valeur de n pour laquelle on peut affirmer que u_n est une v.a. de π^2 à 10^{-2} près est $n = 100$ (!)

remarque 5 (*une faute impardonnable*)

Une faute parfois commise est de dire :
"comme la suite (u_n) tend vers l alors pour n assez grand on a $u_n = l$".

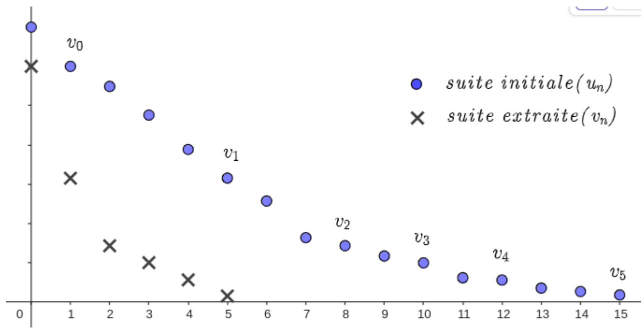
- *Il s'agit, on peut le dire, d'une faute* IMPARDONNABLE *car cela revient à dire qu'une suite convergente est forcément une suite stationnaire.*

  Voici un contre-exemple:
  la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est une suite qui tend vers 0, et pourtant $\forall n \geqslant 1, u_n \neq 0$
- A NOTER CEPENDANT QUE POUR SI UNE SUITE À VALEURS ENTIÈRES EST CONVERGENTE ALORS C'EST FORCÉMENT UNE SUITE STATIONNAIRE (CLASSIQUE, À SAVOIR REDÉMONTRER)

2 Suites extraites

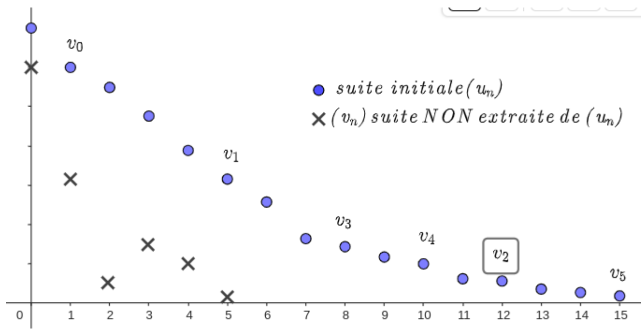
définition 6: suite extraite

On dit que la suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsqu'il existe une fonction g strictement croissante de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{g(n)}$.
rem: la fonction g s'appelle parfois une fonction extractrice
cela correspond à choisir certains points de la suite (u_n) en gardant le même ordre (càd sans faire de retour en arrière)



exemple 4:

Les suites (u_{2n}), (u_{3n}), (u_{n^2+1}) et (u_{2n+1}) sont des suites extraites de la suite (u_n).
En revanche la suite $(v_n) = (u_{n^2-10n+26})$ n'est pas une suite extraite de la suite (u_n)
En effet, la fonction $n \mapsto n^2 - 10n + 26$ n'est pas une fonction strictement croissante sur $\mathbb{N}$.
On remarque cependant que les valeurs prises par la suite (v_n) sont des valeurs prises par la suite (u_n)

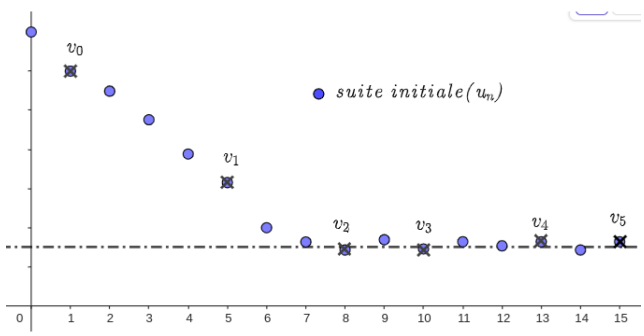


Q: Y-A-T-IL UN LIEN ENTRE LA LIMITE D'UNE SUITE EXTRAITE ET LA LIMITE DE LA SUITE INITIALE?

théorème 2: limite d'une suite extraite

Si la suite u tend vers la limite l (finie ou infinie) **alors** toute suite extraite de u tend vers l.

On comprend intuitivement que la suite extraite va tendre "plus rapidement" vers l que la suite initiale
On utilise souvent "la contraposée de ce théorème" pour justifier qu'une suite ne possède pas de limite

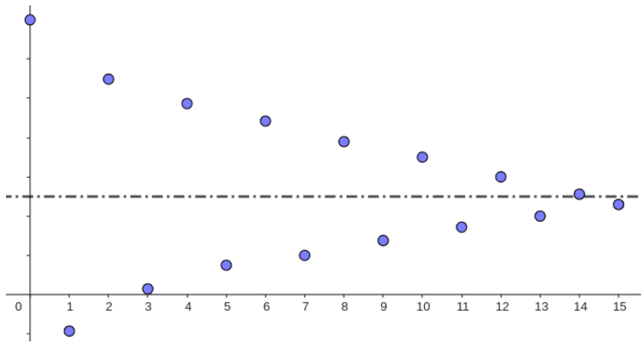


théorème 3: souvent utilisé

Soit $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$
Il y a équivalence entre :

i) la suite u tend vers l
ii) les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers l

rem: dans ce théorème, les deux suites extraites n'ont pas été prises au hasard! Si vous prenez deux autres suites extraites, a priori, la proposition ne sera plus vraie.
rem: on a un résultat similaire avec les suites extraites $(u_{3n}), (u_{3n+1})$ et (u_{3n+2})



remarque 6

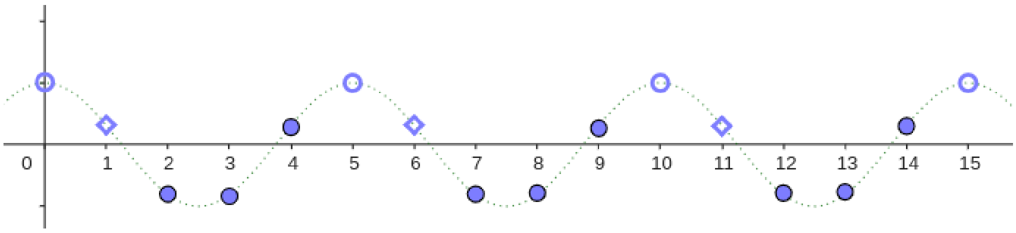
si les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers la même limite l alors n'importe quelle suite extraite de (u_n) tendra aussi vers l. Voyez-vous pourquoi?

méthode 1: pour montrer qu'une suite ne possède pas de limite

il suffit d'exhiber deux suites extraites qui tendent vers des limites différentes.
Exemple :

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \cos \dfrac{2n\pi}{5}$. Cette suite est divergente car:

- la suite (u_{5n}) converge vers 1 (c'est même la suite constante 1 !)
- la suite (u_{5n+1}) converge vers $\cos \dfrac{2\pi}{5} \neq 1$ (c'est même. . .)



3 Des suites de référence

Dans ce qui suit, q désignera un réel ou un complexe fixé.

3.1 suites arithmétiques

définition 7: suite arithmétique

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison q si pour tout entier n, on a $u_{n+1} = u_n + q$

et dans ce cas, on a $\forall n \geqslant 0, u_n = u_0 + n.q$
d'une manière plus générale, on a $u_n = u_p + q.(n-p)$ *pour tout* $(n,p) \in \mathbb{N}^2$
on passe d'un terme à l'autre en additionnant une constante

remarque 7 (***formule utile pour la somme de termes consécutifs***)

$\boxed{0+1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}}$ *pour tout entier* $n \geqslant 0$

3.2 suites géométriques

définition 8: suites géométriques

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q si pour tout entier n, on a $u_{n+1} = q.u_n$

et dans ce cas, on a $\forall n \geqslant 0, u_n = u_0.q^n$
d'une manière plus générale, on a $u_n = u_p.q^{n-p}$ *pour tout* $(n,p) \in \mathbb{N}^2$
on passe d'un terme à l'autre en multipliant par une constante

remarque 8 (***formule très importante***)

si $q \neq 1$*, on a pour tout entier* n *:* $\boxed{1+q+q^2+\cdots+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}}$

A partir de celle-ci, on retrouve la formule qui donne $\sum\limits_{k=p}^{n} q^k = q^p + q^{p+1} + \cdots + q^n$

- *première idée: à l'aide d'un changement d'indice*

$$\sum_{k=p}^{n} q^k = q^p.\sum_{k=p}^{n} q^{k-p} = q^p.\sum_{j=0}^{n-p} q^j = q^p.\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = \frac{q^p - q^{n+1}}{1-q}$$

- *seconde idée: en faisant une différence*

$$\sum_{k=p}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{p-1} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} - \frac{1-q^p}{1-q} == \frac{q^p - q^{n+1}}{1-q}$$

théorème 4: limite de (q^n) avec q réel (très important)

Soit q un réel fixé.
Alors:

- si $|q| < 1$ alors $\lim q^n = 0$
- si $q = 1$ alors $\lim q^n = 1$
- si $q > 1$ alors $\lim q^n = +\infty$
- si $q = -1$ alors la suite $(q^n) = ((-1)^n)$ ne possède pas de limite.
- si $q < -1$ alors la suite (q^n) ne possède pas de limite

3.3 suites arithmético-géométriques

définition 9: suite arithmético-géométrique

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique lorsqu'il existe deux scalaires a et b tels que $u_{n+1} = a.u_n + b$ pour tout entier n

remarque 9

Le cas $a = 1$ [resp. $b = 0$] correspond à une suite arithmétique [resp. géométrique]

méthode 2: obtenir une formule explicite dans le cas où $a \neq 1$.

- On considère une suite qui vérifie la relation

$$u_{n+1} = a.u_n + b$$

- On note l le scalaire qui vérifie l'égalité

$$l = a.l + b$$

- En faisant la difféence des deux égalités précedentes, on obtient

$$u_{n+1} - l = a.(u_n - l)$$

  ce qui prouve que la suite auxiliaire v définie par $v_n = u_n - l$ est **une suite géométrique de raison** a

- On a donc

$$v_n = a^n.v_0$$

  càd

$$u_n - l = a^n.(u_0 - l)$$

  on peut alors facilement isoler u_n et donner son expression explicite !

exemple 5:

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 & = 1 \\ u_{n+1} & = \dfrac{-1}{2}u_n - 3 \end{cases}$

- L'équation $l = \dfrac{-1}{2}l - 3$ a pour solution $l = -2$
- Pour $n \geqslant 0$, on a par différence

$$\underbrace{u_{n+1} - l}_{=v_{n+1}} = \frac{-1}{2}u_n - 3 - \left(\frac{-1}{2}l - 3\right) = \frac{-1}{2}.(\underbrace{u_n - l}_{v_n})$$

  En posant $v_n = u_n - l = u_n + 2$, on a (v_n) suite géométrique de raison $\dfrac{-1}{2}$

- Ainsi pour tout n on a

$$v_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^n v_0 = 3.\left(\frac{-1}{2}\right)^n$$

- On a trouvé que pour tout n

$$u_n = v_n - 2 = 3.\left(\frac{-1}{2}\right)^n - 2$$

exemple 6:

Soit a un réel différent de un et c une réel quelconque.
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = c$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = a.u_n + 2$

1. Donner l'expression explicite de u_n
2. Donner une cns portant sur a et c pour que la suite converge.

3.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

- $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou des complexes.
- a et c sont deux scalaires non nuls fixés.
- b est un scalaire fixé.

On s'intéresse aux suites numériques (u_n), à valeurs dans $\mathbb{K}$, qui vérifient la relation de récurrence

$$a.u_{n+2} + b.u_{n+1} + c.u_n = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

définition 10: polynôme caractéristique

On appelle polynôme caractéristique de la suite récurrente le polynôme du second degré

$$\boxed{aX^2 + bX + c \text{ (Ec)}}$$

dans la suite, Δ désignera le discriminant de ce polynôme

théorème 5: expression explicite des suites à valeurs complexes

1. **Cas où $\Delta \neq 0$** :
   Notons alors r_1 et r_2 les racines distinctes de l'équation caractéristique.
   Alors :
   $$\exists (A,B) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = A.r_1^n + B.r_2^n$$
2. **Cas où $\Delta = 0$** :
   Notons alors r_0 la racine double de l'équation caractéristique.
   Alors :
   $$\exists (A,B) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = A.r_0^n + B.n.r_0^n$$

théorème 6: expression explicite des suites à valeurs réelles

Ici, $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}^*$.

1. **Cas où $\Delta > 0$** : Notons alors r_1 et r_2 les racines distinctes de l'équation caractéristique.
   Alors :
   $$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = A.r_1^n + B.r_2^n$$
2. **Cas où $\Delta = 0$** : Notons alors r_0 la racine double de l'équation caractéristique.
   Alors :
   $$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = A.r_0^n + B.n.r_0^n$$
3. **Cas où $\Delta < 0$** : Notons alors r_1 et r_2 les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.
   alors :
   $$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n (A \cos n\theta + B \sin n\theta)$$
   où q est le module de r_1 et θ un argument de r_1

remarque 10 (*espace vectoriel*)

Notons S_H l'ensemble des suites qui vérifient la relation de récurrence

- *S_H est un corpsk-ev de dimension 2*
- *Dans le cas 1 ci-dessus, une base de S_H est constituée des 2 suites géométriques $(r_1^n)_{n \geqslant 0}$ et $(r_2^n)_{n \geqslant 0}$*
- *Dans le cas 2 ci-dessus, une base de S_H est constituée des 2 suites $(r_0^n)_{n \geqslant 0}$ et $(n.r_0^n)_{n \geqslant 0}$*
- *Dans le cas 3 ci-dessus, une base de S_H est constituée des 2 suites $(q^n . \cos(n\theta))_{n \geqslant 0}$ et $(q^n . \sin(n\theta))_{n \geqslant 0}$*

4 Relations de comparaison

Soit (v_n) une suite de nombres réels non nuls.

définition 11: suite négligeable, suite dominée

i) On dit que la suite $u = (u_n)$ est négligeable devant la suite $v = (v_n)$, et on écrit $u_n = o(v_n)$, lorsque $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$
cela revient à dire que $u_n = \varepsilon_n.v_n$ *avec* $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$

ii) On dit que la suite $u = (u_n)$ est dominée par la suite $v = (v_n)$, et on écrit $u_n = O(v_n)$, lorsque la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée
cela revient à dire que $u_n = k_n.v_n$ *avec* (k_n) *suite bornée*

remarque 11 (*Attention! "Dominer" n'est pas le contraire de "être négligeable"*)

Notons pour tout n, $u_n = n + 1$ *et* $v_n = 2n + 100^{100}$

- *La suite* (v_n) *domine la suite* (u_n) .
  En effet comme $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{2}$, *on sait que la suite* $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ *est convergente, et donc par théorème elle est bornée! On a bien prouvé que* $u_n = O(v_n)$
- *...mais la suite* (u_n) *domine aussi la suite* (v_n) .
  En effet comme $\lim \frac{v_n}{u_n} = 2$, *on sait que la suite* $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ *est convergente, et donc par théorème elle est bornée! On a bien prouvé que* $v_n = O(u_n)$
- *Comme une suite convergente est toujours bornée, on peut affirmer que*

$$\boxed{\text{si } u_n = o(v_n) \text{ alors } u_n = O(v_n). \text{ (mais la réciproque est fausse)}}$$

définition 12: suites équivalentes

Soient $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ deux suites de nombres réels non nuls.
On dit que les suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes, et on écrit $u_n \sim v_n$, lorsque $\lim \frac{u_n}{v_n} = 1$
cela revient à dire que $u_n = k_n.v_n$ *avec* $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = 1$
rem importante: ceci revient aussi à dire que $u_n = v_n + o(v_n)$

on a en effet les équivalences suivantes:

$$u_n = v_n + o(v_n) \iff u_n - v_n = o(v_n) \iff \frac{u_n - v_n}{v_n} \to 0 \iff \frac{u_n}{v_n} - 1 \to 0 \iff \frac{u_n}{v_n} \to 1$$

théorème 7: pratique

i) Si $u_n \sim v_n$ alors, à partir d'un certain rang, le signe de u_n est égal à celui de v_n.

ii) Si $u_n \sim v_n$ et si (v_n) tend vers l alors (u_n) tend vers l

iii) Si $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ pour n assez grand et $u_n \sim w_n$ alors $v_n \sim u_n$

En effet,
si $\lim \frac{u_n}{v_n} = 1$, *on a donc à partir d'un certain rang* $\frac{u_n}{v_n} > 0$,
et par conséquent u_n *et* v_n *sont forcément de même signe.*

remarque 12 (*formule de Stirling (H.P.)*)

On a $\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}}$

5 Propriétés

théorème 8: utilisé très souvent

Le produit d'une suite convergente vers 0 et d'une suite bornée est une suite convergente vers 0.

exemple 7: très classique

Soit la suite u définie par $\forall n \geqslant 1, u_n = \dfrac{\cos n}{n}$.
La suite $(\cos n)$ ne possède pas de limite ... mais elle est tout de même bornée!
On va donc justifier que la suite u tend vers 0 en disant que c'est le produit d'une suite bornée *(la suite* $(\cos n)$*)* par une suite qui tend vers 0 *(la suite* $(\frac{1}{n})$*).*
rem: on utilise souvent ce raisonnement en présence de la suite $(\cos n)$ *ou* $(\sin n)$ *ou* $((-1)^n)$

théorème 9: Attention! La réciproque est fausse.

SI une suite est convergente ALORS elle est bornée

$$(\text{càd: } ((u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge } \Longrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée}))$$

rem: on dit encore que "toute suite convergente est bornée"
rem: la réciproque est bien sûr fausse comme l'atteste la suite $((-1)^n)$
rem: par contraposée, on peut dire que si une suite n'est pas bornée alors elle est divergente.

démonstration

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente. Notons l sa limite.

- Par définition, on a $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, |u_n - l| \leqslant \varepsilon$
- En particulier pour $\varepsilon = 1$ (nombre strictement positif (pris au hasard) fixé), on peut affirmer qu'il existe un entier n_0 fixé tel que pour tout entier n plus grand que n_0 on a $|u_n - l| \leqslant 1$, ou de manière équivalente, $l - 1 \leqslant u_n \leqslant l + 1$
- Considérons maintenant l'ensemble $U_{n_0} = \{u_n | n < n_0\} = \{u_n | n \in [\![0, n_0 - 1]\!]\}$.
  Cet ensemble possède un nombre fini d'éléments réels (à savoir n_0): il possède donc un plus grand élément et un plus petit élément. Notons les respectivement M_{n_0} et m_{n_0}
- Notons maintenant $M = \max(M_{n_0}, l + 1)$ et $m = \min(m_{n_0}, l - 1)$
  Avec ce choix on a $M \geqslant l + 1$ et $M \geqslant M_{n_0}$ ainsi que $m \leqslant l - 1$ et $m \leqslant m_{n_0}$
- Il est clair que l'on a $m \leqslant u_n \leqslant M$ pour tout entier n. En effet:
  - ou bien $n < n_0$, et donc $m_{n_0} \leqslant u_n \leqslant M_{n_0}$
  - ou bien $n \geqslant n_0$, et on a $l - 1 \leqslant u_n \leqslant l + 1$

exemple 8:

Soit de nouveau la suite u définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n n + 6}{n^2 + 4}$.

- On a $u_n \sim \dfrac{(-1)^n . n}{n^2} = (-1)^n . \dfrac{1}{n}$
- On en déduit que (u_n) est une suite qui converge (vers zéro)
- Le théorème ci-dessus nous permet alors de justifier sans calculs que la suite u est bornée
  En effet, il suffit d'écrire "comme la suite (u_n) converge vers 0, on en déduit que (u_n) est bornée"

Q: L'ensemble des suites convergentes possède-t-il une structure particulière?

théorème 10: La combinaison linéaire de deux suites convergentes est encore une suite convergente

i) L'ensemble des suites convergentes est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
ii) L'ensemble des suites convergentes vers 0 est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

ceci signifie que:

- *la suite nulle est une suite convergente*
- *la somme de deux suites convergentes est encore une suite convergente. en effet,*

$$\lim u_n + v_n = \lim u_n + \lim v_n$$

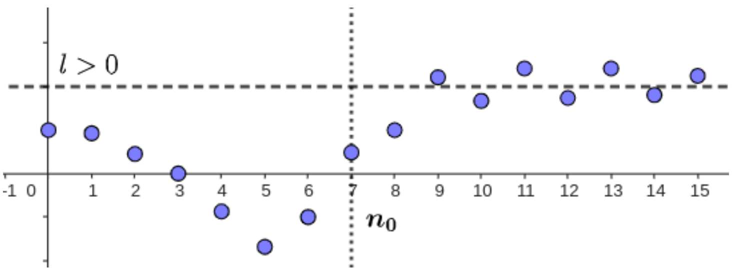
- *le produit d'une suite convergente par un scalaire est encore une suite convergente. en effet,*

$$\lim \lambda.u_n = \lambda. \lim u_n$$

Q: Connaissant la limite d'une suite peut-on en déduire quelque chose sur les termes de la suite?

théorème 11:

Si $\lim u_n = l > 0$ alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.



exemple 9:

Soit (u_n) une suite qui converge vers 4.

- Le théorème ci-dessus permet d'affirmer $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n > 0$
- Allons plus loin: on sait que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |u_n - 4| \leqslant \varepsilon$$

  - En prenant, $\varepsilon = 0.5$, on peut affirmer

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, 3.5 \leqslant u_n \leqslant 4.5$$

  - En prenant, $\varepsilon = 0.01$, on peut affirmer

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_1, 3.99 \leqslant u_n \leqslant 4.01$$

théorème 12: image d'une suite par une fonction

Soient

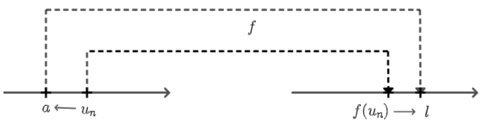
- $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers a.
- f une fonction telle que $\lim\limits_{a} f = l$

Alors, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l

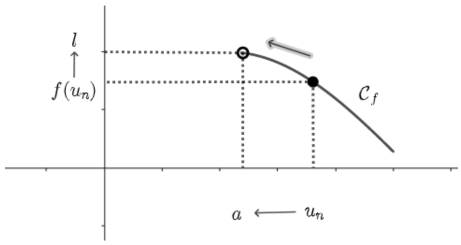
rem: ***ce n'est rien d'autre qu'un théorème de composition de limites*** *que l'on peut écrire encore ainsi:*

$$\boxed{\text{si } \lim_{n\to\infty} u_n = \boxed{\text{a}} \text{ et si } \lim_{x\to\boxed{\text{a}}} f(x) = l \text{ alors } \lim_{n\to\infty} f(u_n) = l}$$

rem:
dans le cas particulier où f est continue en a, on a $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = f(a)$



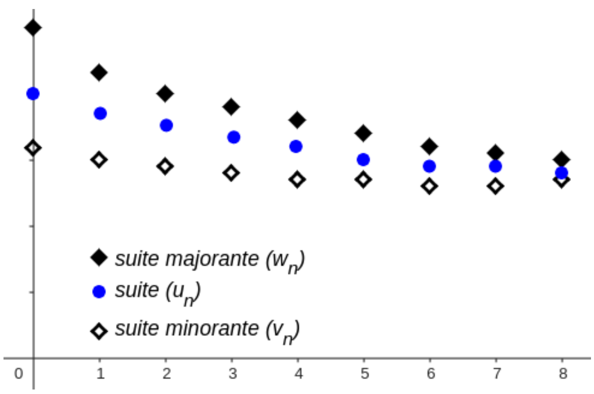
quand $n \to \infty, u_n$ se rapproche de a
$f(u_n)$ se rapproche de l



quand $n \to \infty,\ u_n$ se rapproche de a
le point $(u_n, f(u_n))$ se rapproche du point (a, l)

théorème 13: théorème de convergence par encadrement (des gendarmes)

Si $\begin{cases} \text{à partir d'un certain rang } v_n \leqslant u_n \leqslant w_n \\ \text{et } \textbf{si } \lim v_n = \lim w_n \end{cases}$ **alors** $\begin{cases} \text{la suite } (u_n) \text{ possède une limite} \\ \text{et l'on a } \lim u_n = \lim v_n = \lim w_n \end{cases}$



exemple 10: rédaction du théorème des gendarmes

Soit (u_n) un suite telle que $\forall n \geqslant 0, \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{2}{n}$.
Montrer que $\lim u_n = 0$
Réponse:

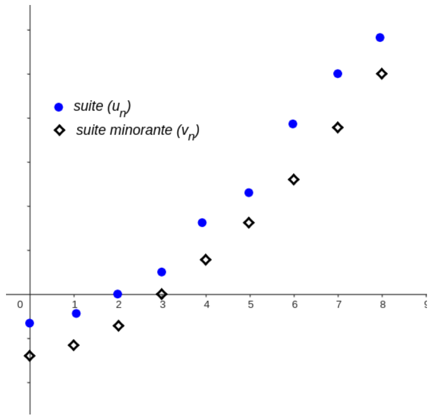
- **Déjà ce qu'il ne faut pas écrire sur sa copie!**
  Comme $0 = \lim \dfrac{1}{n} \leqslant \lim u_n \leqslant \lim \dfrac{2}{n} = 0$ *alors* $\lim u_n = 0$
- **Ce qu'il faut écrire:**
  Comme $\lim \dfrac{1}{n} = \lim \dfrac{2}{n} = 0$ *alors d'après le théorème de convergence par encadrement on peut affirmer que* $\lim u_n$ *existe et vaut* 0

théorème 14: théorème de divergence par minoration ou majoration

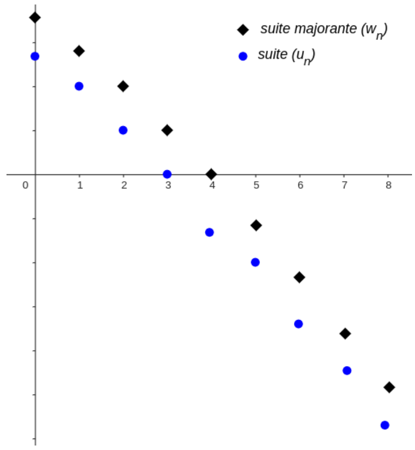
i) **Si** , à partir d'un certain rang, $v_n \leqslant u_n$ et si $\lim v_n = +\infty$ alors $\lim u_n = +\infty$

ii) **Si** , à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$ et si $\lim v_n = -\infty$ alors $\lim u_n = -\infty$

rem: l'énoncé de ce théorème n'est pas à mémoriser mais son emploi est courant



quand la suite minorante tend vers $+\infty$
(u_n) n'a pas d'autre choix que de tendre vers $+\infty$



quand la suite majorante tend vers $-\infty$
(u_n) n'a pas d'autre choix que de tendre vers $-\infty$

définition 13: borne supérieure, borne inférieure d'un ensemble (rappels)

- Soit E un ensemble majoré.
  On appelle borne supérieure de E, et on note $\sup(E)$, le plus petit des majorants de E
- Soit E un ensemble minoré.
  On appelle borne inférieure de E, et on note $\inf(E)$, le plus grand des minorants de E

théorème 15: théorème de la limite monotone

Soit (u_n) une suite réelle.
Si (u_n) est une suite monotone alors (u_n) possède une limite (finie ou pas)

Plus précisément:

i) **Si** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée **alors** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et $\boxed{\lim u_n = \sup_n(u_n)}$

ii) **Si** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et non majorée **alors** $\boxed{\lim u_n = +\infty}$

iii) **Si** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée **alors** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et $\boxed{\lim u_n = \inf_n(u_n)}$

iv) **Si** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et non minorée **alors** $\boxed{\lim u_n = -\infty}$

en particulier, une suite strictement positive décroissante possède une limite finie positive ou nulle.

remarque 13 (***très important***)

Ainsi, on retiendra que:

- *une suite monotone possède toujours une limite (finie ou infinie)*
- *une suite croissante est convergente ssi elle est majorée.*
- *une suite décroissante est convergente ssi elle est minorée.*

6 Etude des suites définies de manière explicite: $u_n = f(n)$

Soit f une fonction définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_n = f(n)$ pour tout entier n.
D'une manière générale, ce sont les suites les plus simples à étudier, car il suffit d'étudier la fonction f (par exemple à l'aide de sa dérivée), et de retenir que

les propriétés de la fonction f se transmettent à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Attention cependant: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)$ ce n'est pas la "même chose" !
(la première désigne la limite de la fonction f et la seconde la limite de la suite u)

théorème 16: les démonstrations doivent être sues

Soit f une fonction définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_n = f(n)$ pour tout entier n.

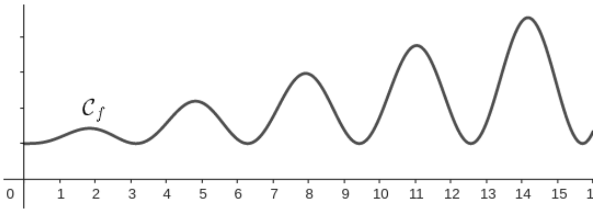
i) **Si** f est une fonction monotone sur $\mathbb{R}^+$ **alors** $\begin{cases} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite monotone} \\ (\text{de même sens de variation que } f) \end{cases}$

ii) **Si** f est une fonction majorée sur $\mathbb{R}^+$ **alors** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite majorée

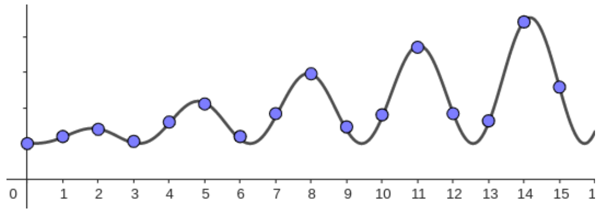
iii) **Si** f est une fonction minorée sur $\mathbb{R}^+$ **alors** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite minorée

iv) **Si** f tend vers une limite l en $+\infty$ **alors** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l

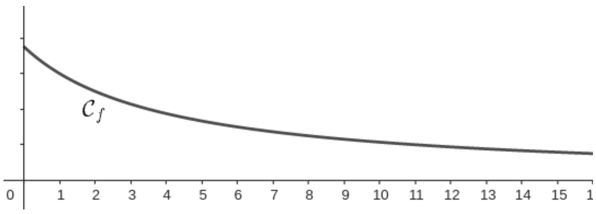
Aucune des réciproques n'est vraie!



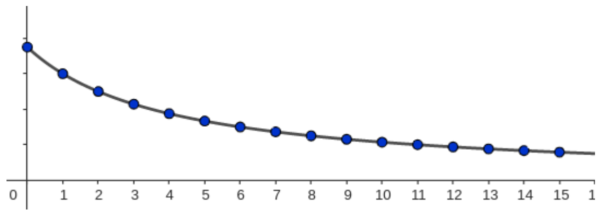
Quand on connaît la fx...



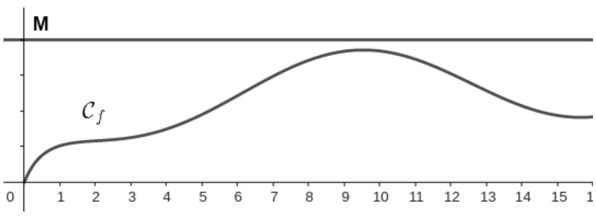
...on connaît la suite



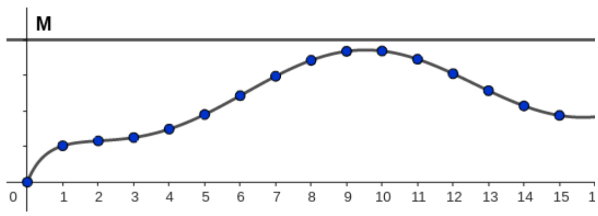
Quand la fx est décroissante...



...la suite est décroissante



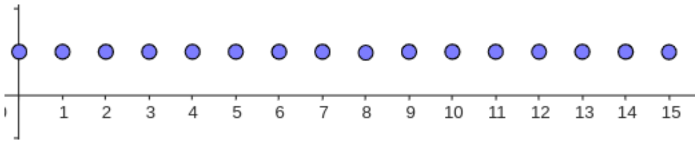
Quand la fx est majorée...



...la suite est majorée

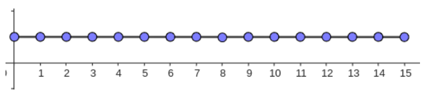
exemple 11:

- La suite (n^2) est une suite croissante car la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$
- La suite $(\arctan n)$ est bornée car la fonction arctan est bornée (sur $\mathbb{R}^+$)

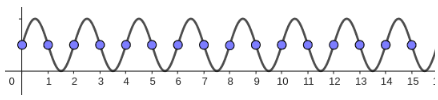


mais quand on connait suelement la suite. . . . . . on ne peut trouver la fonction!

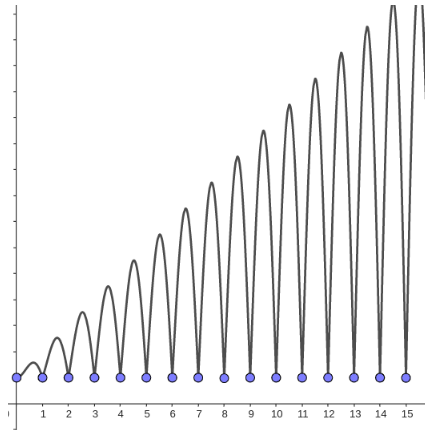
?



?

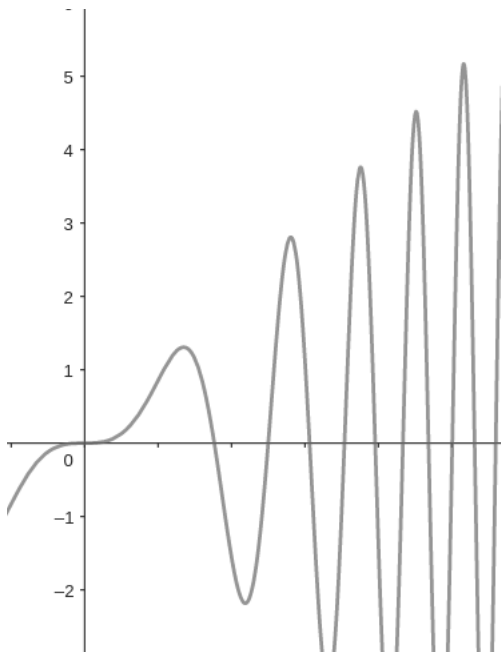


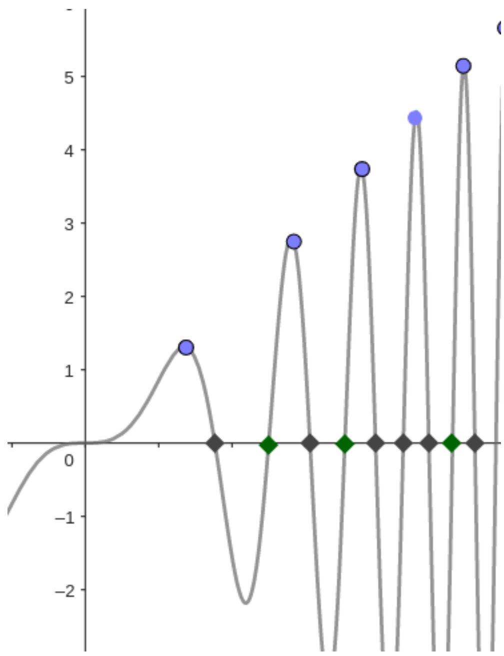
?



méthode 3: comment montrer qu'une fonction n'est pas majorée,. . .

Les contraposées des propositions du théorème précédent peuvent servir pour justifier qu'une fonction n'est pas majorée, n'esp pas minorée ou ne possède pas de limite.
Il s'agit alors de définir judicieusement une suite à partir de la fonction f, càd des points sur la courbe





LA FONCTION $f : x \mapsto x.\sin(x^2)$ . . . et. . . 2 SUITES INTÉRESSANTES

i) la suite $(f(\sqrt{2n\pi + \pi/2}))_{n\in\mathbb{N}} = (2n\pi)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
Ceci prouve que la fonction f N'est PAS majorée

ii) la suite $(f(\sqrt{n\pi}))_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle, elle converge donc vers zéro.

iii) avec i) et ii), on peut affirmer que f ne possède pas de limite en $+\infty$

7 Etude des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

On considère une fonction f définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
On définit la suite (u_n) par son premier terme $u_0 \in I$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$

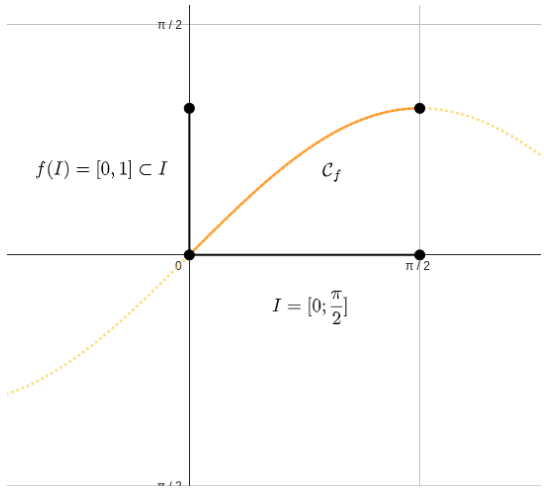
Attention cette fois! Les propriétés de la fonction f NE se transmettent PAS toutes à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$!

théorème 17: intervalle stable par une fonction f et localisation de la suite

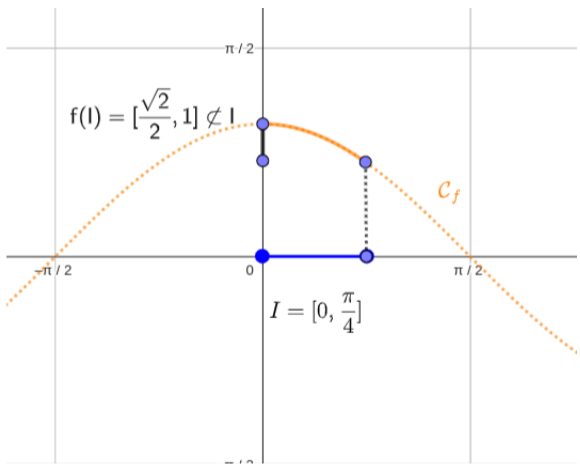
Soit I un intervalle stable par la fonction $f : I \to \mathbb{R}$.(càd que $f(I) \subset I$).

Si $u_0 \in I$ alors $\begin{cases} \text{la suite donnée par la relation de récurrence } u_{n+1} = f(u_n) \text{ est bien définie} \\ \text{et l'on a même } \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I \end{cases}$

rem: si c'est seulement $u_{n_0} \in I$ alors $\forall n \geqslant n_0, u_n \in I$
rem: si I est bornée, on saura alors que la suite (u_n) l'est aussi ;-)



intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ stable par la fonction sin



intervalle $[0, \frac{\pi}{4}]$ NON stable par la fonction cos

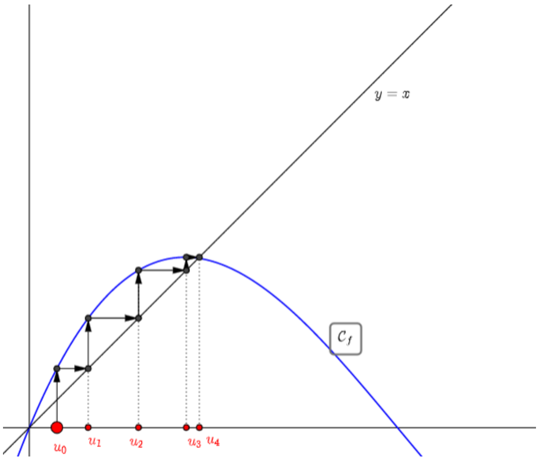
- Etude du sens de variation de (u_n):
  On a $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$.
  Ainsi le sens de variation de la suite (u_n) est donné par le signe de la fonction $x \mapsto f(x) - x$

- Etude des limites possibles de (u_n):
  Si (u_n) converge vers l et si f est continue en l alors $f(l) = l$. (càd l est *un point fixe de* f)
  (lorsque f est continue,
  résoudre l'équation $f(l) = l$ permet de trouver les seules limites *possibles* de la suite)
  (géométriquement, les points fixes correspondent à l'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de la première bissectrice)

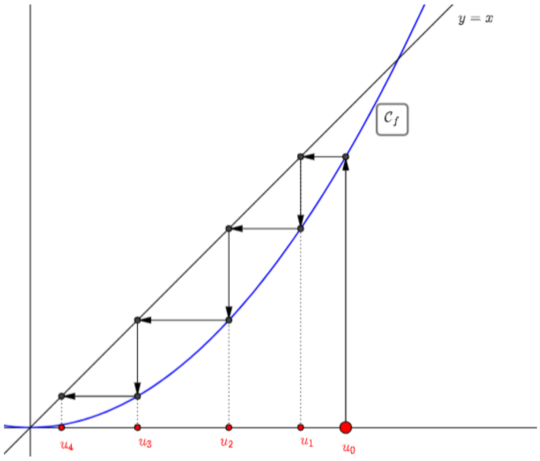
- de l'influence du sens de variation de f sur l'intervalle stable I
  1. Si f est croissante sur I alors
     – la suite (u_n) est monotone.
       (démonstration par récurrence sur n en partant de $u_0 \leqslant u_1$ ou $u_1 \leqslant u_0$)
     – graphiquement, on a un escalier

  2. Si f est décroissante sur I alors
     – les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de sens de variation opposés
       (démonstration par récurrence sur n en partant de $u_0 \leqslant u_2$ ou $u_2 \leqslant u_0$)
     – graphiquement, on a un escargot

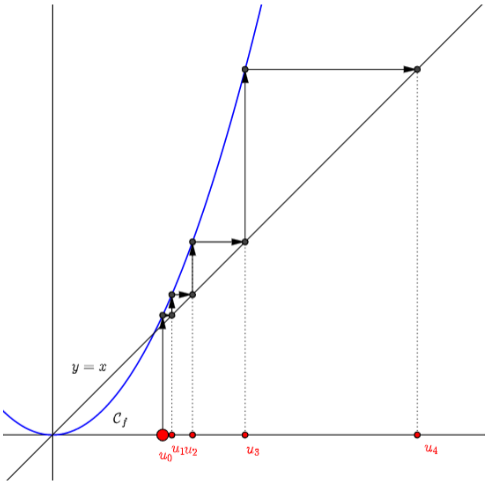
  3. si f n'est pas monotone sur I alors . . . c'est plus compliqué!



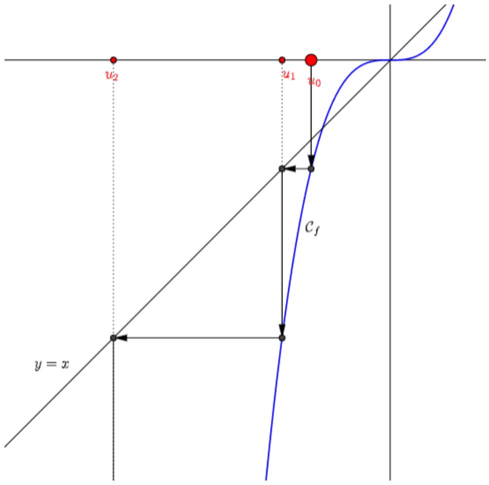
f croissante sur I stable
suite (u_n) croissante convergente



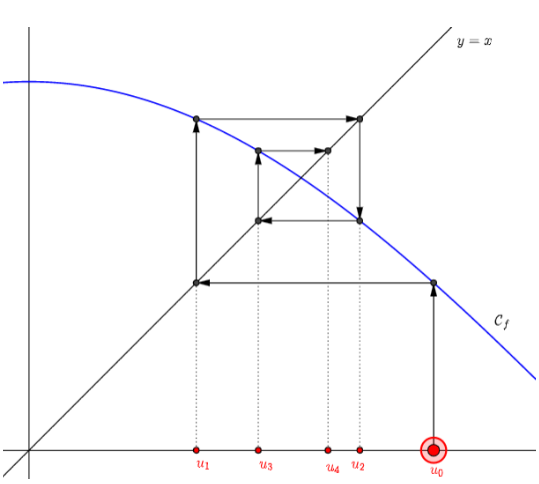
f croissante sur I stable
suite (u_n) décroissante convergente



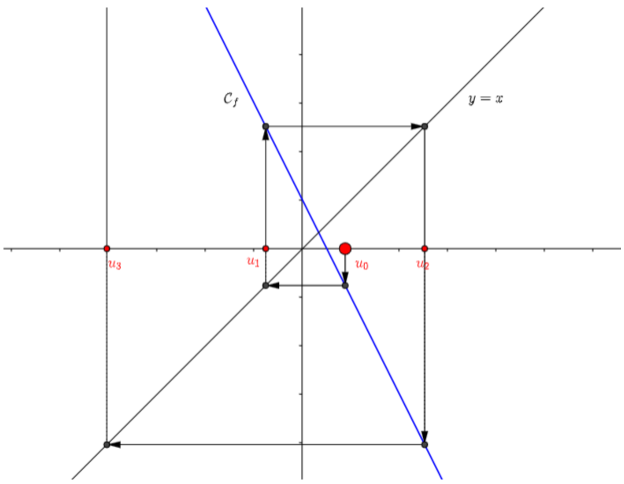
f croissante sur I stable
suite (u_n) croissante divergente



f croissante sur I stable
suite (u_n) décroissante divergente



f décroissante sur I stable
suite (u_n) convergente
les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes



f décroissante sur I stable
suite (u_n) divergente
les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones,
l'une diverge vers $+\infty$, l'autre vers $-\infty$

8 Suites adjacentes

Il faut bien faire la différence entre la définition et le théorème!

définition 14: suites adjacentes

On dit que les deux suites réelles u et v sont adjacentes lorsque :

i) u est une suite croissante.

ii) v est une suite décroissante.

iii) $\lim(u_n - v_n) = 0$

remarque 14 (*Attention !*)

Dire seulement que $\lim(u_n - v_n) = 0$ *n'implique pas que* $\lim u_n = \lim v_n$ *! Pourquoi?*
Lorsque l'on écrit $\lim u_n = \lim v_n$ *cela suppose que les* (u_n) *et* (v_n) *possède une limite, alors que lorsque l'on écrit* $\lim(u_n - v_n) = 0$ *on peut très bien avoir* (u_n) *et* (v_n) *qui ne possèdent pas de limite comme l'atteste l'exemple* $u_n = v_n = (-1)^n$

théorème 18: théorème des suites adjacentes

Si u et v sont deux suites adjacentes **alors**

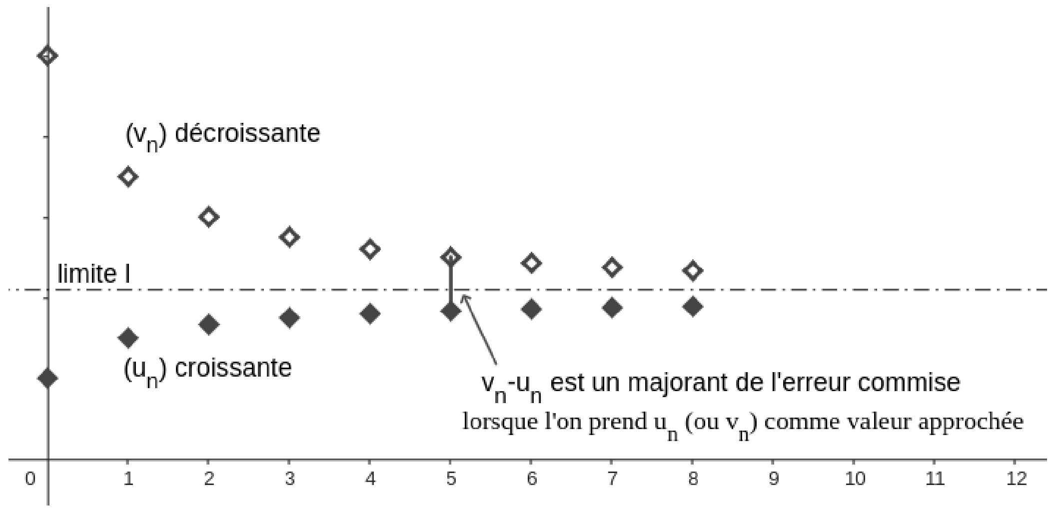
i) u et v sont deux suites convergentes, de même limite l

ii) de plus, on a pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \lim u_n = l = \lim v_n \leqslant v_n$.

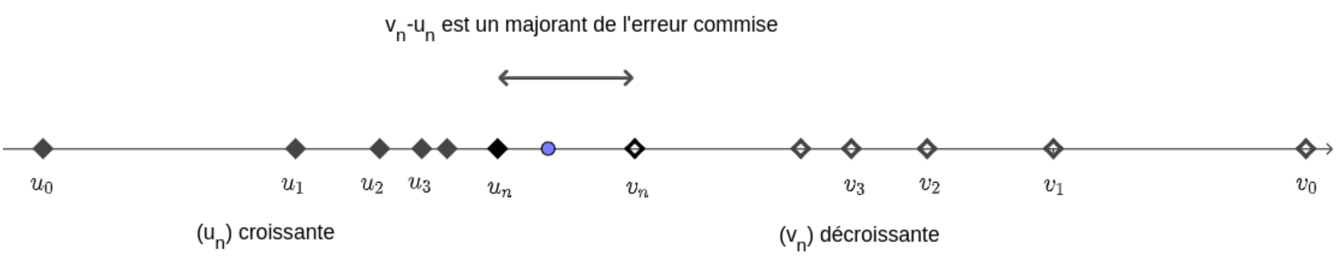
rem:

- u_n *est une valeur approchée par défaut de* l *à* $v_n - u_n$ *près*
- v_n *est une valeur approchée par excès de* l *à* $v_n - u_n$ *près*

représentation dans le plan



représentation sur un axe



9 Suites à valeurs complexes

définition 15: suite complexe

On appelle suite complexe toute fonction de $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Une telle suite est notée $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

remarque 15

On note $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ ou encore $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites complexes. Il s'agit d'un $\mathbb{C}$ espace vectoriel.

Q: une suite complexe bornée est-elle minorée et majorée? NON!

définition 16: suite complexe bornée

On dit que la suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée lorsque la suite réelle positive $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée

définition 17: suite complexe convergente

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.

i) On dit que la suite u converge vers $l \in \mathbb{C}$ lorsque $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |u_n - l| \leqslant \varepsilon$

ii) Dans le cas contraire, on dit que la suite u est divergente.

théorème 19:

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Pour tout n, on note $x_n = Re(u_n)$ et $y_n = Im(u_n)$.
On a alors l'équivalence entre :

1. la suite complexe (u_n) converge vers $l = x + iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
2. les suites réelles (x_n) et (y_n) convergent respectivement vers x et y.

rem: ce théorème précédent permet de ramener l'étude d'une suite complexe à l'étude de deux suites réelles.

exemple:
La suite complexe $u_n = n^2 - i.\dfrac{1}{n}$ diverge car la suite $(\Re e(u_n))$ est divergente

remarque 16

Si on pose $q = r.e^{i\theta}$ on a alors $q^n = r^n.e^{in\theta}$.
La suite des modules de q^n est une suite géométrique de raison $|q|$.
La suites des arguments de q^n est une suite arithmétique de raison θ

remarque 17

En revanche, comme le prouve le contre-exemple ci-dessous la proposition suivante est fausse :
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la suite des modules et la suite des arguments convergent.

Soit la suite u définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{\exp(in\pi)}{n}$.
Cette suite tend vers 0, la suite des modules tend vers 0, mais la suite des arguments n'est pas convergente!