INTEGRATION I
rappels de sup'

Table des matières

- Dans tout ce résumé, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

- On rappelle qu'un segment est un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$.

- **En intégration, la notion de segment est fondamental.**

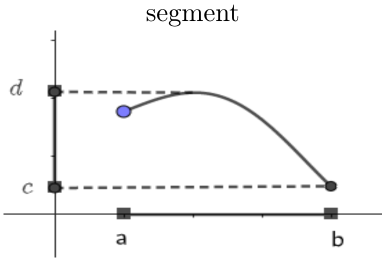
- Ce polycopié ne traite QUE des intégrales de fonctions CONTINUES sur un SEGMENT
- *On verra plus tard comme donner un sens à des intégrales de fonctions continues sur un intervalle qui NE sera PAS un SEGMENT*

- Rappelons un théorème où l'on a déjà rencontré les notions de continuité et de segment

théorème 1: théorème des bornes atteintes

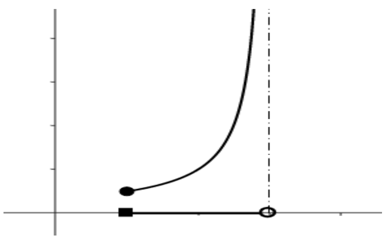
L'image d'un segment par une fonction continue à valeurs réelles est un segment.
autrement dit
Si f est continue sur le segment $[a,b]$ alors il existe $c \leqslant d$ deux réels tels que $f([a,b]) = [c,d]$
Ceci signifie également que toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes

segment



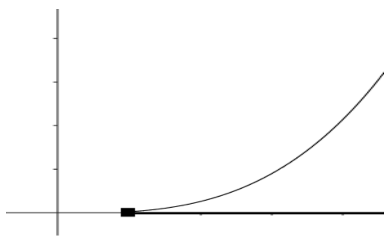
la fx est bornée

intervalle borné semi-ouvert



la fx peut avoir une limite infinie

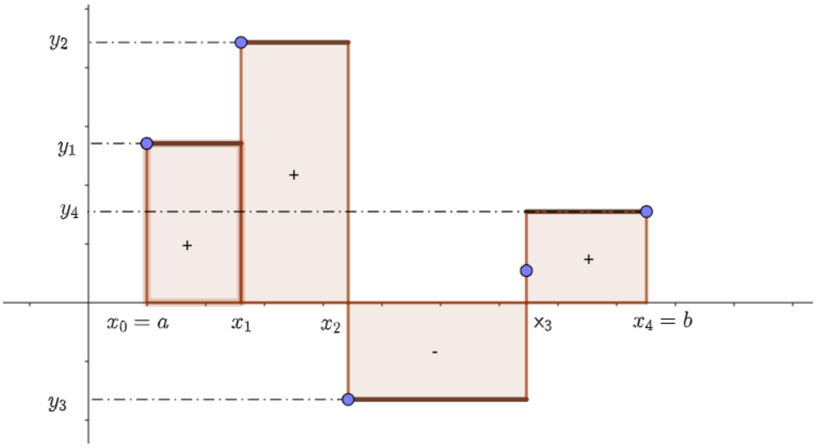
intervalle non borné



la fx peut avoir une limite infinie

1 La base? L'intégrale d'une fonction en escalier sur un segment!

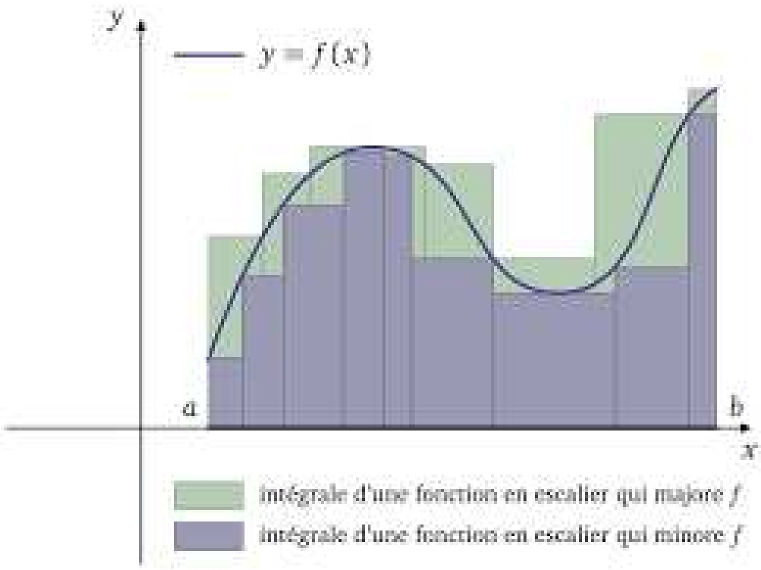
- Au début, on a défini l'intégrale d'une fonction en escalier sur un segment



Par définition, l'intégrale sur le segment $[a,b]$ de cette fonction f est la somme algébrique des aires des rectangles ci-dessus, càd

$$\int_{[a,b]} f = y_1.(x_1 - x_0) + y_2.(x_2 - x_1) + y_3.(x_3 - x_2) + y_4.(x_4 - x_3) = \sum_{i=1}^{4} y_i.(x_i - x_{i-1})$$

- puis, à l'aide d'un théorème admis, on a montré que l'on pouvait définir l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.



Plus précisément, le théorème indique que

✓ si l'on considère toutes les fonctions en escalier qui minorent f et qu'on leur associe leurs intégrales sur le segment $[a,b]$. Alors on obtient un ensemble de nombres qui est majoré. Notons m sa borne supérieure.

✓ si l'on considère toutes les fonctions en escalier qui majorent f et qu'on leur associe leurs intégrales sur le segment $[a,b]$. Alors on obtient un ensemble de nombres qui est minoré. Notons M sa borne inférieure.

✓ on prouve que $m = M$. Et c'est cette valeur commune que l'on définit comme l'intégrale de la fonction continue f sur le segment $[a,b]$

On comprend que calculer une primitive de cette manière est inenvisageable... Heureusement le théorème fondamental de l'Analyse nous permet de calculer une intégrale simplement à l'aide de primitives!

remarque 1 (***il faut bien faire la différence entre primitive et intégrale***)

- *une primitive est une* FONCTION *alors qu'une intégrale est un* SCALAIRE

2 Primitives d'une fonction continue sur un intervalle

Q: QU'EST-CE QU'UNE PRIMITIVE?

définition 1: primitive

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On dit que F est une primitive de f sur I lorsque F est dérivable sur I et que $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$
On écrit alors $F' = f$

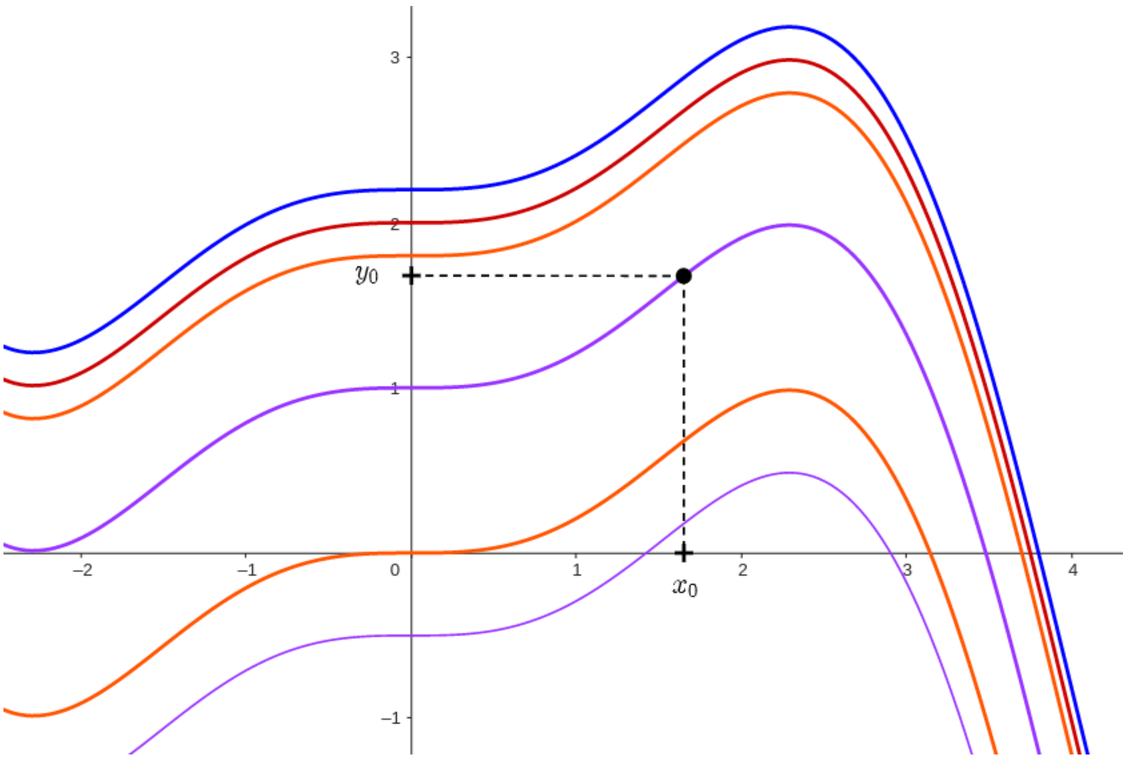
Q: TOUTES LES FONCTIONS POSSÈDENT-ELLES DES PRIMITIVES?

théorème 2:

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f une fonction définie et continue sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Alors:

i) f possède une infinité de primitives sur I, qui sont égales à une constante près.
ii) pour tout $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$ fixés, il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$

C'est ce théorème que l'on doit invoquer pour justifier l'existence d'une primitive
"Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives"



SUR UN INTERVALLE, LES COURBES DES PRIMITIVES D'UNE MÊME FONCTION DESSINENT UN 'MILLEFEUILLE'

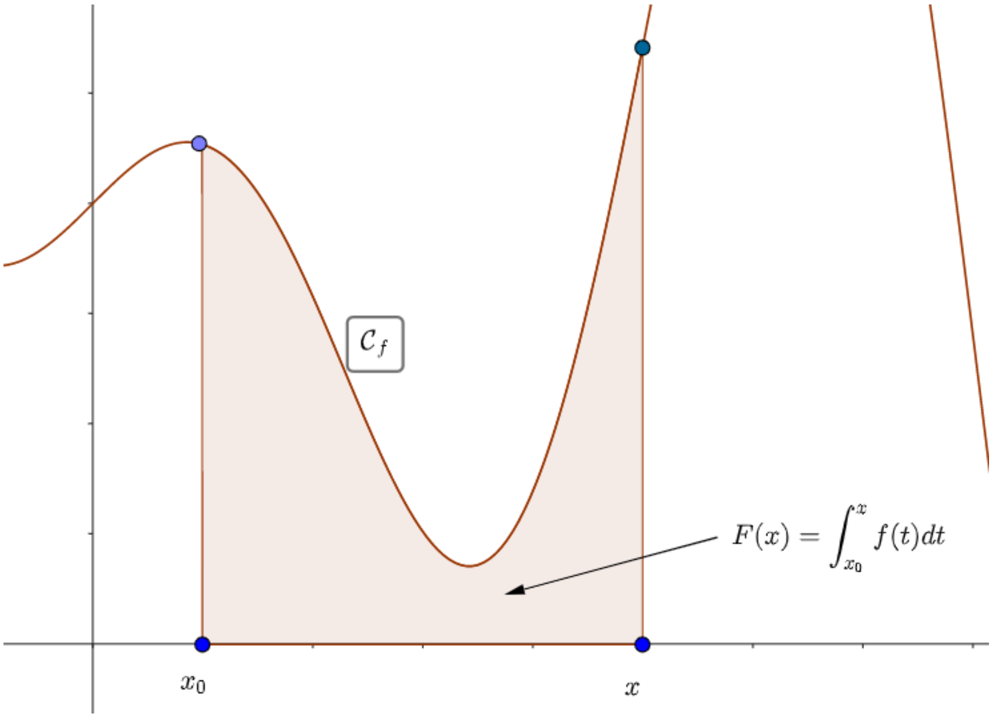
théorème 3: théorème fondamental de l'analyse

Soient:

- I un intervalle de $\mathbb{R}$ et x_0 un élément de I
- f une fonction définie et continue sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

La fonction $\boxed{\begin{array}{rcl} F : I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt \end{array}}$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en x_0.

c'est à dire que $F' = f$ et que $F(x_0) = 0$

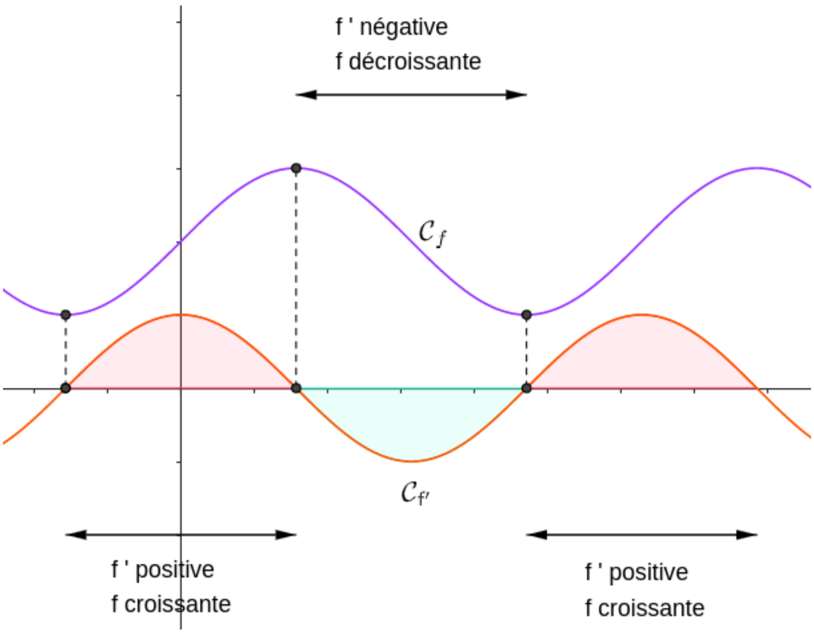


théorème 4: autre formulation du théorème fondamental de l'analyse

Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle I et $x_0 \in I$. Alors

$$\forall x \in I, f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)dt$$

rem: comme f est C^1 alors f' est C^0



exemple 1: la fonction $\ln$

La fonction ln est par définition l'unique primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ qui s'annule en un. On a donc

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[, \ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}}$$

exemple 2:

On considère la fonction $\boxed{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{x^2} \end{array}}$

Déterminer, à l'aide d'une expression intégrale, la primitive de f sur $\mathbb{R}$...

$i)$ ... qui s'annule en π $\quad ii)$ ... qui vaut 3 en π $\quad iii)$ ... qui vaut π en 3

méthode 1: notations des primitives

f étant une fonction continue sur un intervalle I, on note souvent :

i) $x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ la primitive de f sur I qui s'annule en x_0

exemple: la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2}{1-x^2}$ *est continue sur l'intervalle* $]1,+\infty[$,
elle admet donc une unique primitive qui s'annule en 2, et c'est la fonction

$$F : x \mapsto \int_{2}^{x} \frac{2dt}{1-t^2} = \ln|1+x| - \ln|1-x| - (\ln 3 - \ln 1) = \ln(1+x) - \ln(x-1) - \ln 3$$

ii) $\displaystyle\int^{x} f(t)dt$ la primitive *générique* de f sur I

exemple: $\displaystyle\int^{x} \frac{2dt}{1-t^2} = \int^{x} \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}dt = \ln|1+x| - \ln|1-x| + cste$

Il est toujours recommandé de donner un nom aux fonctions que l'on considère

3 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Q: UNE INTÉGRALE EXISTE-T-ELLE TOUJOURS?

théorème 5: théorème fondamental du calcul intégral

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, et f une fonction définie et continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Alors:

i) l'intégrale de f sur le segment $[a,b]$ existe, càd $\displaystyle\int_a^b f$ existe.

ii) et l'on a $\displaystyle\int_a^b f = F(b) - F(a)$ où F désigne une primitive quelconque de f sur $[a,b]$

L'intégrale d'une fonction continue sur un segment existe toujours.
Ppur justifier qu'une intégrale NON généralisée existe, on écrit au choix

- **"une fonction CONTINUE sur un SEGMENT est intégrable* sur ce segment"**.
- **"la fonction f est CONTINUE sur le SEGMENT $[a,b]$ donc $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ existe"**

rem: on verra plus tard une définition plus générale de 'intégrable sur un intervalle'

- L'intégrale d'une fonction continue sur un segment existe toujours... contrairement à l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle quelconque!(voir polycopié 'Intégrales généralisées')

- Si $[a,b]$ est un segment de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$,
l'intégrale de f sur $[a,b]$ est notée $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ ou $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ ou $\displaystyle\int_a^b f$

- Lorsque $a > b$, la notation $\int_{[a,b]} f$ n'a pas de sens mais les notations $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f$ ont sens, car par définition, on pose
$$\int_a^b f = -\int_b^a f = -\int_{[b,a]} f$$
- dans une intégrale, la variable est muette: elle peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre. D'où: $\boxed{\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(\theta)d\theta = \int_a^b f(\zeta)d\zeta = \dots}$

3.1 Propriétés

théorème 6: linéarité de l'intégrale

L'application $\boxed{\begin{array}{ccc} C^0([a,b],\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)dt \end{array}}$ est une application linéaire.

c'est à dire:
l'application qui à une fonction associe son intégrale sur un segment donné est une application linéaire
Ce théorème est souvent utilisé sans le citer dans les calculs, c'est lui qui nous permet d'écrire

$$\forall (f,g) \in (C^0([a,b],\mathbb{K}))^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt$$

théorème 7: positivité et croissance de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur le segment $[a,b]$ (avec ici $a \leqslant b$)). Alors:

i) Si $f \geqslant 0$ alors $\int_{[a,b]} f \geqslant 0$ POSITIVITÉ DE L'INTÉGRALE

ii) Si $f \geqslant g$ alors $\int_{[a,b]} f \geqslant \int_{[a,b]} g$ CROISSANCE DE L'INTÉGALE

rem: pour le i), on dit encore que "l'intégrale d'une fonction positive est positive"
rem: à noter que la réciproque est fausse; ce n'est pas parce que l'intégrale d'une fonction est positive que fonction est nécessairement positive.

démonstration

Soit f une fonction continue et positive sur le segment $[a,b]$

- *Comme f est continue sur $[a,b]$, on sait que f possède une primitive sur ce segment, notons la F.*
  Sur l'intervalle $[a,b]$, on a $F' = f \geqslant 0$.
  La fonction F est donc croissante(au sens large) sur l'intervalle $[a,b]$.

- *Par définition d'une fonction croissante,*
  comme $a \leqslant b$ on a $F(a) \leqslant F(b)$,
  et donc $\int_a^b f = F(b) - F(a) \geqslant 0$

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ telles que $f \geqslant g$.

- *Notons $h = f - g$.*
  h est continue sur $[a,b]$ (car différence de 2 fonctions continues) et positive.
  D'après le point précédent, on peut affirmer que $\int_a^b h \geqslant 0$ càd $\int_a^b f - g \geqslant 0$
- *Par linéarité de l'intégrale, on a $\int_a^b f - g = \int_a^b f - \int_a^b g$*
  On a ainsi prouvé que $\int_a^b f - \int_a^b g \geqslant 0$ càd $\int_a^b f \geqslant \int_a^b g$

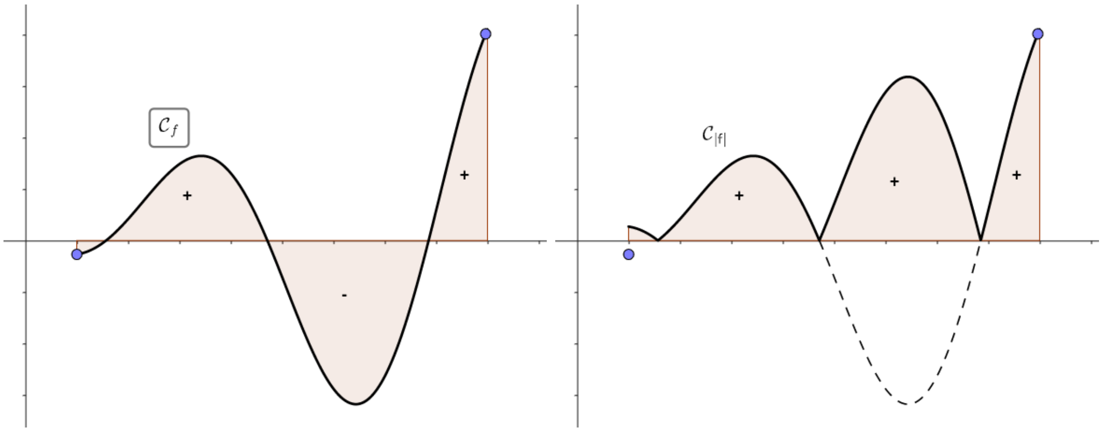
théorème 8: inégalité triangulaire intégrale

Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$. Alors

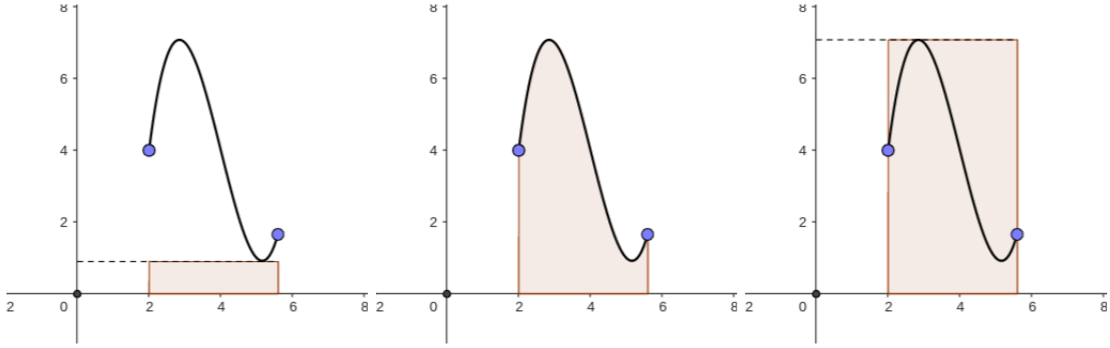
i) $\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$

ii) En notant $m = \min\limits_{[a,b]} f$ et $M = \max\limits_{[a,b]} f$ on a $\boxed{m.(b-a) \leqslant \int_{[a,b]} f \leqslant M.(b-a)}$

- illustration du i)



- illustration du ii)

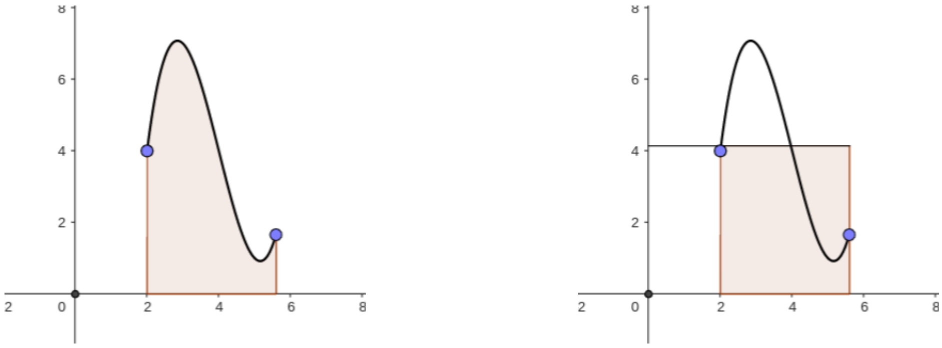


définition 2: valeur moyenne d'une fonction sur un segment

Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$

On appelle <u>valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a,b]$</u> le scalaire suivant : $\boxed{\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)dt}$

rem: on rappelle que le théorème dit de " l'égalité de la moyenne" permet d'affirmer que si f est continue sur le segment $[a,b]$ alors il existe $c \in [a,b] \mid \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)dt = f(c)$



théorème 9: théorème de nullité de l'intégrale

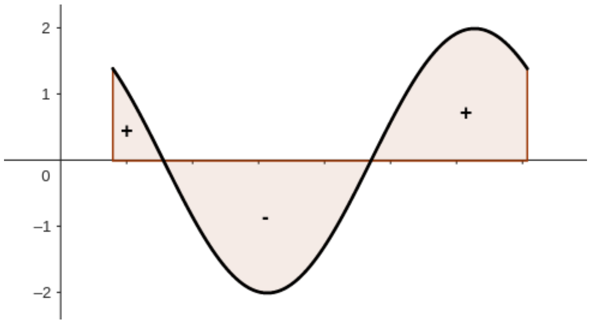
Soit f une fonction CONTINUE et de SIGNE CONSTANT sur le segment $[a,b]$, avec $a < b$

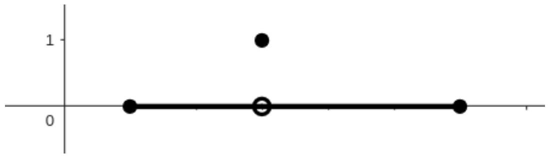
Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$ alors f est nulle sur $[a,b]$

rem: les hypothèses "continue" et "de signe constant" sont indispensables!

rem: "f est nulle sur $[a,b]$" signifie que $\forall t \in [a,b], f(t) = 0$ (on dit encore que "f est identiquement nulle que $[a,b]$")

- Les conditions DE SIGNE CONSTANT ET CONTINUE NE sont PAS superflues.





- **démonstration**

  Soit f une fonction continue et positive sur le segment $[a,b]$ telle que $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$ avec $a < b$

  On reprend les notations de la démo précédente.

  Comme $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$, on a donc $F(a) = F(b)$

  Ainsi la fonction F est croissante sur $[a,b]$ avec $F(a) = F(b)$: on peut affirmer que F est constante sur $[a,b]$.
  On a alors la dérivée de F qui est forcément nulle sur $[a,b]$,
  càd $\forall t \in [a,b], f(t) = F'(t) = 0$: f est bien identiquement nulle sur $[a,b]$

théorème 10: seconde version du théorème de nullité de l'intégrale

Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$.

Si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt = 0$ alors f est nulle sur $[a,b]$

exemple 3: important dans la pratique, rédaction à adopter

Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{t})dt$ existe et est STRICTEMENT positive.

- *La fonction $\sqrt{\ }$ est continue sur $[0,\pi^2]$ à valeurs dans $[0,\pi]$*
- *La fonction $\sin$ est continue de $[0,\pi]$ à valeurs dans $[0,1]$*
- *Par composition, on peut donc affirmer que la fonction $f : t \mapsto \sin(\sqrt{t})$ est CONTINUE sur $[0,\pi^2]$ à valeurs dans $[0,1]$ (donc POSITIVE) et NON IDENTIQUEMENT NULLE car $f(\pi^2/4) = 1$*
- *Par théorème, on peut donc affirmer que $I = \displaystyle\int_0^{\pi^2} f(t)dt > 0$*

Dans ce raisonnement, on utilise à la fois la propriété de positivité de l'intégrale (qui permet d'affirmer que $I \geqslant 0$) puis la contraposée de l'implication du théorème de la nullité de l'intégrale.

exemple 4:

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\displaystyle\int_0^1 P^2(t)dt = 0$. Montrer que P est le polynôme nul

théorème 11: Relation de Chasles

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in C^0(I,\mathbb{K})$

i) $\forall (a,b,c) \in I^3$

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

ii) $\forall (a,b) \in I^2$,

$$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$$

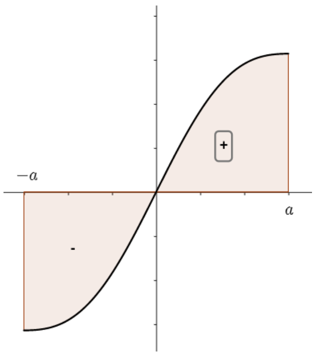
3.2 parité, périodicité et intégrale

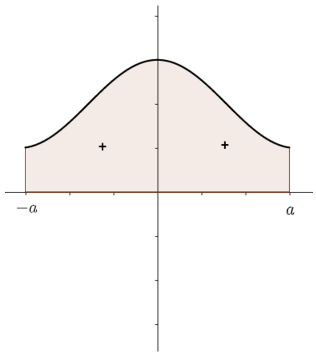
théorème 12: parité et intégrale

Soit f une fonction continue sur le segment $[-a,a]$

i) Si f est impaire alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)dt = 0$

ii) Si f est paire alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)dt = 2.\int_0^a f(t)dt$



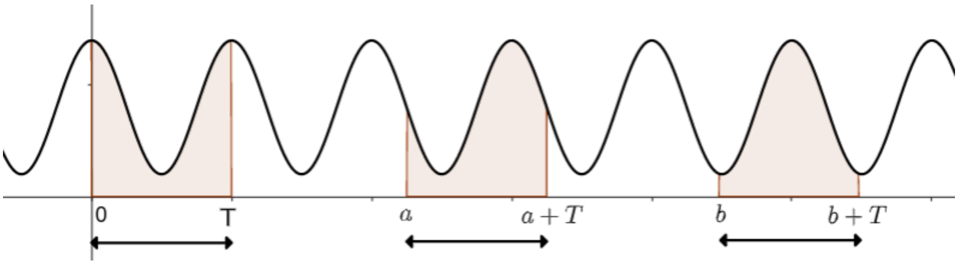


théorème 13: périodicité et intégrale

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T. Alors

pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$

rem: en particulier la valeur moyenne d'une fonction périodique sur une période est indépendante du choix de l'intervalle d'intégration



exemple 5: fonctions périodiques

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $T-$périodique.

Montrer que si de plus f est paire [resp. impaire] alors $\displaystyle\int_0^T f = 2\int_0^{T/2} f$ [resp. $\displaystyle\int_0^T f = 0$]

3.3 Intégration par parties

Q: LA FORMULE DE DÉRIVATION D'UN PRODUIT DONNE-T-ELLE UNE FORMULE POUR LES INTÉGRALES?

théorème 14: intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I. **Alors :**

$$\boxed{\forall (a,b) \in I^2, \int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt}$$

exemple 6: primitive de arcsin

- La fonction arcsin est définie et continue sur $[-1,+1]$: elle possède donc une primitive sur cet intervalle.
- Nous allons déterminer une primitive de arcsin... mais attention! arcsin est de classe C^1 sur $]-1,+1[$ uniquement!
- Sur l'intervalle $]-1,+1[$, on pose $u(t) = t$ (et donc $u'(t) = 1$) et $v'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ (et on choisit $v(t) = \arcsin t$), u et v sont bien C^1 sur $]-1,+1[$

  la formule d'intégration par parties donne

  $$\int^x \arcsin(t)dt = x.\arcsin(x) - \int^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt = x.\arcsin(x) - \frac{1}{2}\int^x \frac{2t}{\sqrt{1-t^2}}dt = x.\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + Cste$$

  Cette formule n'est valable, a priori, que sur $]-1,+1[$
  mais l'on peut montrer qu'elle est aussi valable sur $[-1,+1]$

3.4 Changement de variables

Q: Y A-T-IL UN THÉORÈME QUE JE PEUX NE PAS MÉMORISER?

théorème 15: changement de variable(appellation peu adaptée en fait)

Soient $f \in C^0(I,\mathbb{R})$ et $\phi \in C^1([c,d],I)$. **Alors :**

$$\boxed{\int_c^d f(\phi(u)).\phi'(u)du = \int_a^b f(t)dt \text{ où } a = \phi(c) \text{ et } b = \phi(d)}$$

Si F désigne une primitive de f alors la fonction $F \circ \phi$ est une primitive de la fonction $\phi' \times f \circ \phi$
Il s'agit juste de reconnaitre ou de faire apparaitre la dérivée d'une fonction composée

démonstration

Soit $f \in C^0(I,\mathbb{R})$ et $\phi \in C^1([c,d],I)$

- On a $[c,d] \xrightarrow[\phi]{} I \xrightarrow[f]{} \mathbb{R}$ donc la composée $f \circ \varphi$ est bien définie sur $[c,d]$
- La fonction $f \circ \varphi$ est continue sur $[c,d]$ comme composée de fonctions continues.
  La fonction φ' est continue sur $[c,d]$ car φ est C^1 sur $[c,d]$.
  Ainsi la fonction $\varphi'.(f \circ \varphi)$ est continue sur le segment $[c,d]$ et donc l'intégrale $\displaystyle\int_c^d f(\phi(u)).\phi'(u)du$ existe
- Notons F une primitive de f sur I,
  la fonction $F \circ \phi$ est alors une primitive de la fonction $\phi' \times f \circ \phi$ sur l'intervalle $[c,d]$. D'où:

$$\int_c^d f(\phi(u)).\phi'(u)du = \int_c^d (F \circ \phi)'(u)du = [F \circ \phi(u)]_c^d = F(\phi(d)) - F(\phi(c)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$$

remarque 2

- *Noter que ϕ n'est pas nécessairement bijective dans le théorème 15.*
  (en revanche, on verra que les changements de variables dans les intégrales généralisées devront forcément être bijectifs)

$$\int_0^{3\pi} \arctan(\sin u).\cos u\, du = \int_0^0 \arctan t dt = 0 \text{ (on a posé } t = \sin u\text{)}$$

  (il faut juste s'assurer que ϕ est C^1 sur $[c,d]$, ce qui est le cas de la fonction sin *sur $[0,3\pi]$)*
  (on n'aurait pas pu poser $u = \tan t$ car la fonction tan *n'est pas définie et continue sur $[0,3\pi]$)*
- *Mais, tout de même, dans la pratique, on considère souvent des changements de variables bijectifs!*
- *voir l'annexe 1 pour les changements de variables classiques... mais hors-programme.*

exemple 7:

Calculer $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\mathrm{ch}(t)}$ de deux manières différentes

i) Le changement de variable $u = \mathrm{sh}(t)$ est de classe C^1, avec $du = \mathrm{ch}(t).dt$.
Cela donne

$$F(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{ch}(t)}{\mathrm{ch}^2 t}dt = \int_0^x \frac{\mathrm{ch}(t)}{1+\mathrm{sh}^2(t)}dt = \int_0^{\mathrm{sh}\, x} \frac{du}{1+u^2} = [\arctan(u)]_0^{\mathrm{sh}\, x} = \arctan(\mathrm{sh}\, x)$$

ii) Le changement de variable $u = e^t$ est de classe C^1, avec $du = e^t.dt$.
Cela donne

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\mathrm{ch}\, t} = \int_0^x \frac{2dt}{e^t+e^{-t}} = \int_0^x \frac{2e^t dt}{e^{2t}+1} = \int_1^{e^x} \frac{2du}{u^2+1} = [2\arctan(u)]_1^{e^x} = 2\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}$$

iii) On vient de prouver que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan(\mathrm{sh}\, x) = 2\arctan(e^x) - \dfrac{\pi}{2}$

3.5 Formules de Taylor

théorème 16: formule de Taylor avec reste intégral

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de classe C^{n+1} sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors:

$$\boxed{\text{pour tous } a \text{ et } b \text{ éléments de } I, \text{ on a } f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)dt}$$

Dans le cas où $n = 0$, la formule donne $\boxed{\text{si } f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \text{ alors on a } f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)dt}$

la démonstration se réalise par récurrence sur n.

- **initialisation:**
  Soit f une fonction de classe C^1 sur I
  La fonction f' possède comme primitive la fonction f (!)
  On a donc $\displaystyle\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$ soit $f(b) = f(a) + \displaystyle\int_a^b f'(t)dt$
  (ce qui correspond à la relation cherchée pour $n = 0$)

- **hérédité: on suppose le relation vraie pour un $n \geqslant 0$ fixé quelconque**
  Soit $f \in C^{n+2}(I,\mathbb{K})$.
  On a donc a fortiori $f \in C^{n+1}(I,\mathbb{K})$ et d'après l'hypothèse de récurrence

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \qquad (*)$$

On réalise une ipp sur l'intégrale $\displaystyle\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$ en posant: $\begin{cases} u(t) = \dfrac{-(b-t)^{n+1}}{n+1} & \text{et donc } u'(t) = (b-t)^n \\ v(t) = f^{(n+1)}(t) & \text{et donc } v'(t) = f^{(n+2)}(t) \end{cases}$

On aura donc pour le crochet

$$[u(t)v(t)]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a) = \frac{(b-a)^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(a)$$

et ainsi

$$\begin{aligned} \int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)dt &= [u(t)v(t)]_a^b + \frac{1}{n+1}\int_a^b (b-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)dt \\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(a) + \frac{1}{n+1}\int_a^b (b-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)dt \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)dt = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b (b-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)dt$$

en reportant dans $(*)$ cela donne

$$\begin{aligned} f(b) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{1}{n!}\left[\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b (b-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)dt\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b (b-t)^n f^{(n+2)}(t)dt \end{aligned}$$

corollaire 1: inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $f \in C^{n+1}(I,\mathbb{R})$ ainsi que a et b deux réels de l'intervalle I.
Notons $M = \max\limits_{[a,b]} |f^{(n+1)}|$
On a alors

$$\boxed{\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right| \leqslant \frac{M.|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}}$$

démonstration dans le cas où $a \leqslant b$
On a d'après *la formule de Taylor avec reste intégral* puis *l'inégalité triangulaire intégrale*

$$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right| = \left|\frac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)dt\right| \leqslant \frac{1}{n!}\int_a^b \left|(b-t)^n f^{(n+1)}(t)\right| dt$$

Or pour tout $t \in [a,b]$ on a

$$\left|(b-t)^n f^{(n+1)}(t)\right| = |b-t|^n.|f^{(n+1)}(t)| \underbrace{=}_{\text{car } b-t \geqslant 0} (b-t)^n.|f^{(n+1)}(t)| \leqslant M.(b-t)^n$$

D'où, *par croissance de l'intégrale,*

$$\int_a^b \left|(b-t)^n f^{(n+1)}(t)\right| dt \leqslant \int_a^b (b-t)^n.Mdt = M.\left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{n+1}\right]_a^b = \frac{M}{n+1}.(b-a)^{n+1}$$

Par transitivité de $\leqslant$, on obtient

$$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right| \leqslant \frac{1}{n!}\int_a^b \left|(b-t)^n f^{(n+1)}(t)\right| dt \leqslant \frac{M}{n!(n+1)}(b-a)^{n+1} = \frac{M}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

3.6 Sommes de Riemann / méthode des rectangles

théorème 17: sommes de Riemann

Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Alors les sommes de Riemann de f convergent vers $\displaystyle\int_{[a,b]} f$.

C'est à dire que :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right) = \int_{[a,b]} f} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right) = \int_{[a,b]} f}$$

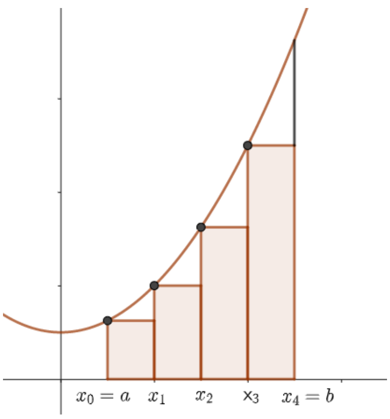
rem: la quantité $h = \dfrac{b-a}{n}$ s'appelle le PAS DE LA SUBDIVISION, *il s'agit de la base commune des rectangles utilisés pour approximer l'aire sous la courbe*

rem: très souvent, on note $x_k = a + i.h = x_{k-1} + h$

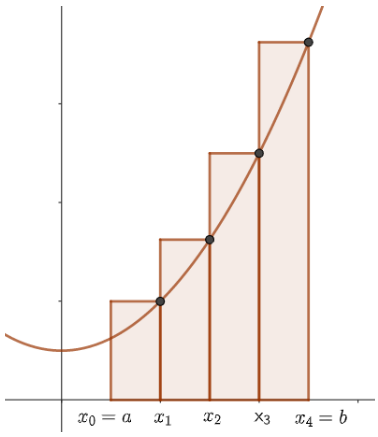
rem: dans le cas où f est monotone sur $[a,b]$, les sommes précédentes encadrent l'intégrale

rem: dans le cas particulier où $[a,b] = [0,1]$, on a les formules

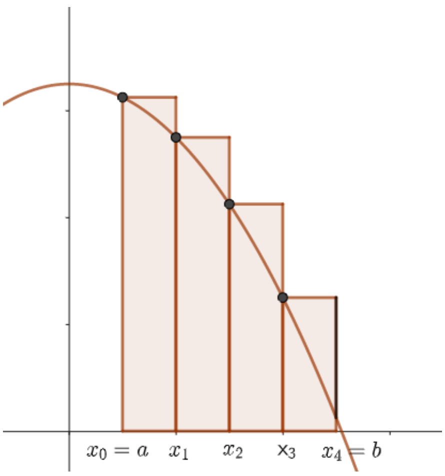
$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_{[a,b]} f} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_{[a,b]} f}$$



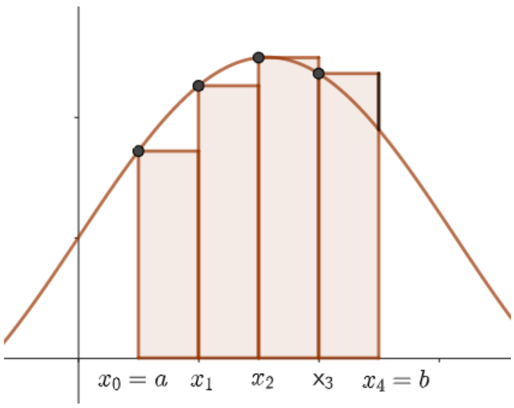
"somme de Riemann gauche"
elle minore $\int_a^b f$ lorsque f croissante



"somme de Riemann droite"
elle majore $\int_a^b f$ lorsque f croissante



"somme de Riemann gauche"
elle majore $\int_a^b f$ lorsque f décroissante



"somme de Riemann gauche"
fonction NON monotone

exemple 8: très classique

Déterminons $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}\right)$

On commence par remarquer, grâce à un changement d'indice, que

$$R_n=\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{n+i}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}$$

- *Considérons la fonction* $\boxed{\begin{array}{rcl} f:[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{1+t}\end{array}}$ *qui est continue sur le segment* $[0,1]$
- D'après le théorème précédent, on peut affirmer que

$$R_n=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}f(\frac{i}{n})=\frac{1}{n}f(0)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})\longrightarrow 0+\int_0^1 f(t)dt=\ln 2$$

- **La méthode consiste à remplacer le** $\frac{i}{n}$ **par** t **(et cela donne la fonction) et à considérer le segment** $[a,b]=[0,1]$
- *On peut remarquer sur cet exemple que le terme "de trop" n'était pas du tout gênant: on pourrait également écrire dans le théorème la formule* $\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n}f(a+i\frac{b-a}{n})=\int_{[a,b]}f$.

exemple 9:

Déterminer $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{2i\pi}{n}$

remarque 3

Dans les formules des sommes de Riemann, il y a $\sum_{i=0}^{n-1}$ *et* $\sum_{i=1}^{n}$ *car on peut donner un sens géométrique à ces quantités. Cependant les formules sont encore exactes avec* $\sum_{i=1}^{n-1}$ *ou* $\sum_{i=0}^{n}$ *ou* $\sum_{i=0}^{n-2}$ *comme le prouve l'exemple précédent.*

4 Annexe 1: changements de variables classiques (hors-programme)

- polynômes en $\sin t$ et $\cos t$: on se ramène au calcul de $\int \sin^p t\cos^q t dt$ que l'on calcule de la manière suivante :
  - ✓ si p est pair et q est impair alors on pose $x=\sin t$
  - ✓ si p est impair et q est pair alors on pose $x=\cos t$
  - ✓ si p et q sont impairs alors on pose $x=\cos 2t$
  - ✓ si p et q sont pairs alors ... on linéarise
- fractions rationnelles en $\sin t$ et $\cos t$: $Q(\sin t,\cos t)=f(t)$ avec $Q\in\mathbb{K}[X,Y]$
  Règle de Bioche :
  - ✓ si $f(-t)=-f(t)$ alors on pose $x=\cos t$
  - ✓ si $f(\pi-t)=-f(t)$ alors on pose $x=\sin t$
  - ✓ si $f(\pi+t)=f(t)$ alors on pose $x=\tan t$
  - ✓ sinon on pose $x=\tan\frac{t}{2}$
- fractions rationnelles en e^t ou $\operatorname{sh} t$ et $\operatorname{ch} t$: on pose $x=e^t$
- fractions rationnelles en t et $(\frac{at+b}{ct+d})^{1/n}$: on pose $x=(\frac{at+b}{ct+d})^{1/n}$

5 Annexe 2 : de l'importance du théorème fondamental de l'analyse

cas d'une fx non C^0 : une intégrale peut exister sans que la primitive existe...

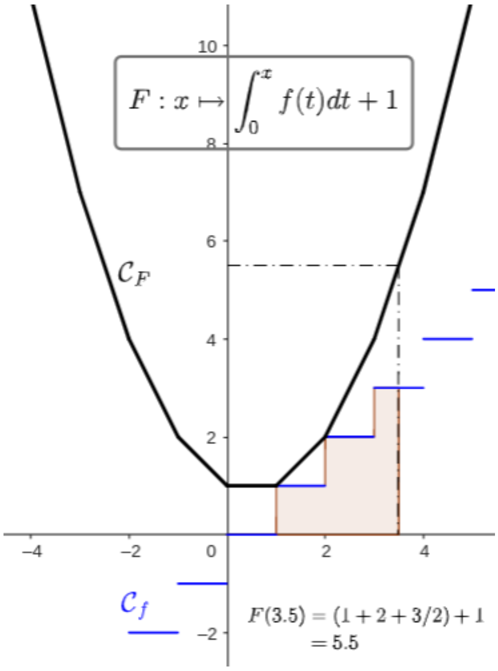
- Considérons f la fonction partie entière
- La fonction f est une fonction en escalier, on sait que l'intégrale de f sur tout segment existe
- A $x \geqslant 0$ fixé, l'intégrale de f sur le segment $[0,x]$ existe; *par exemple*

$$\int_0^{3.5} f = 0.(1-0) + 1.(2-1) + 2.(3-2) + 3.(3{,}5-3) = 4{,}5$$

- A $x < 0$, l'intégrale de f sur le segment $[x,0]$ existe; *par exemple*

$$\int_{-2}^{0} f = -1.(0-(-1)) + -2.((-1)-(-2)) = -3 \qquad \text{et donc} \qquad \int_0^{-2} f = 3$$

- On peut ainsi dire que pour tout x réel, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x f$ existe.
- Notons $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)dt + 1$.
  D'après ce qui est dit ci-dessus, la fonction F est bien définie sur $\mathbb{R}$



graphe de la fonction F

- Cependant, on NE peut PAS dire que F est une primitive de la fonction f. En effet, la fonction f n'est pas pas continue sur $\mathbb{R}$ donc **le théorème fondamental de l'Analyse NE s'applique PAS**
- D'ailleurs la fonction F n'est même pas dérivable sur $\mathbb{R}$.
  Montrons que F n'est pas dérivable en 1
  - ✓ $\forall x \in [0,1], F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt + 1 = \int_0^1 0.dt + 1 = 1$
  - ✓ $\forall x \in [1,2], F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt + 1 = \int_0^1 0.dt + \int_1^x 1.dt + 1 = (x-1)+1 = x$
  - ✓ $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} 0 = 0$ ceci prouve que $F'_g(1)$ existe et vaut 0
  - ✓ $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} 1 = 1$ ceci prouve que $F'_d(1)$ existe et vaut 1
  - ✓ Comme $F'_g(1) \neq F'_d(1)$, F n'est pas dérivable en 1

6 Intégrales faussement généralisées

exemple 10:

Considérons l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t}dt$.
Cette intégrale est-elle du genre rencontrée précédemment?

La réponse est non... et oui!

Explications:

- La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.
  Elle n'est donc pas continue sur le SEGMENT $[0,\pi]$,
  mais uniquement sur L'INTERVALLE SEMI-OUVERT $]0,\pi]$

- Voyons le graphe de $\boxed{\begin{array}{rcl} f :]0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{\sin(t)}{t} \end{array}}$

- La fonction f est *prolongeable par continuité en* 0 car $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin(t)}{t} = 1$

  Ainsi si on considère la fonction $\boxed{\begin{array}{rcl} \overline{f} : [0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\sin(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases} \end{array}}$

  La fonction $\overline{f}$ est, quant à elle, CONTINUE sur le SEGMENT $[0,\pi]$,
  et donc on sait que $\displaystyle\int_0^\pi \overline{f}(t)dt$ existe!

- Dans ce genre de situation, on dit que

$$\textit{l'intégrale } \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t}dt \textit{ est faussement généralisée en } 0$$

  et tout se passe comme pour les intégrales "classiques" de première année!

définition 3: fonction prolongeable par continuité

Soit I un intervalle, et x_0 un élément de I ou une borne **finie** de I.
Soit f une fonction continue sur l'intervalle $I - \{x_0\}$.
On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 lorsque $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x)$ **existe et est finie**

La fonction ainsi prolongée est la fonction $\begin{array}{rcl} \overline{f} : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \textit{si } x \neq x_0 \\ l = \displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) & \textit{si } x = x_0 \end{cases} \end{array}$

Très souvent, l'énoncé dit que "l'on appellera encore f la fonction ainsi prolongée"

rem: on ne dit jamais qu'une fonction est prolongeable par continuité en $+\infty$ ou en $-\infty$