FORMULAIRE PT*

Table des matières

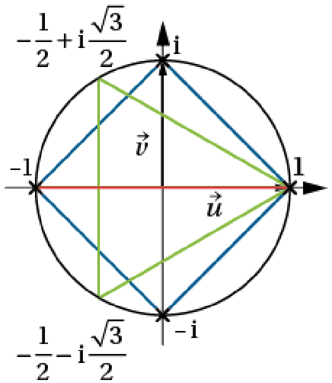
1 Nombres complexes

1.1 Nombres complexes de module 1

θ et θ' sont des réels, n un entier naturel

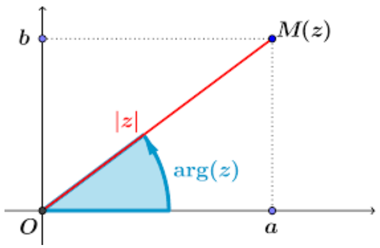
- $e^{i\theta} = \cos\theta + i.\sin\theta \qquad \overline{e^{i\theta}} = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$
- $e^{i\theta}.e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- Formules d'Euler: $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$
- Formule de Moivre: $(\cos\theta + i.\sin\theta)^n) = \cos(n\theta) + i.\sin(n\theta)$ (càd: $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$)
- Racines $n-$ième de l'unité : $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z^n = 1\} = \{e^{2ik\pi/n} \,|\, k \in [\![0,n-1]\!]\}$

$$\mathbb{U}_2 = \{1,-1\} \qquad \mathbb{U}_3 = \{1, e^{2i\pi/3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, e^{4i\pi/3} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\} \qquad \mathbb{U}_4 = \{1,i,-1,-i\}$$



1.2 Modules et arguments

- $z = a + i.b$ avec $a = Re(z)$ et $b = Im(z)$
- $z = r.e^{i\theta}$ avec r module de z et θ argument de z
- $a = r.\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$
- module de z: $|z| = r = \sqrt{a^2+b^2}$
- argument de $z \neq 0$: $\arg(z) = \theta = \begin{cases} \arctan\frac{b}{a} & \text{si } b > 0 \\ \arctan\frac{b}{a} + \pi & \text{si } a < 0 \end{cases}$



2 Trigonométrie

2.1 Les propriétés fondamentales

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leqslant 1$ et $|\cos x| \leqslant 1$
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$, $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ et $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

2.2 Valeurs remarquables à connaître par cœur

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ND	0

- $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\cos(k\pi) = (-1)^k$ et $\sin(k\pi) = 0$

2.3 Les formules de l'angle double à connaître par cœur

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a = \frac{1-\tan^2 a}{1+\tan^2 a}$$

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a = \frac{2\tan a}{1+\tan^2 a}$$

A l'aide de la formule de* $\cos 2a$ *on a directement(à savoir retrouver)

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$$

2.4 Formules d'addition à connaître par cœur

- $\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \sin b.\cos a$
- $\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \sin b.\cos a$

A partir de ces formules on retrouve, lorsque les tangentes sont définies

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} \qquad \text{et} \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$$

2.5 Formules à savoir retrouver à partir des précédentes

- $2.\cos a.\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$
- $2.\sin a.\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$
- $2.\sin a.\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$ et $2.\sin b.\cos a = \sin(a+b) - \sin(a-b)$

En posant $\begin{cases} p &= a+b \\ q &= a-b \end{cases}$ ***on a alors*** $\begin{cases} a &= \dfrac{p+q}{2} \\ b &= \dfrac{p-q}{2} \end{cases}$, ***et les formules ci-dessus donnent***

- $\cos p + \cos q = 2.\cos\dfrac{p+q}{2}.\cos\dfrac{p-q}{2}$
- $\cos p - \cos q = -2\sin\dfrac{p+q}{2}.\sin\dfrac{p-q}{2}$
- $\sin p + \sin q = 2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$ et $\sin p - \sin q = 2\sin\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2}$

2.6 Angles associés

- $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$ $\qquad$ $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$ $\qquad$ $\tan(x+\pi) = \tan(x)$
- $\cos(\pi-x) = -\cos(x)$ $\qquad$ $\sin(\pi-x) = \sin(x)$ $\qquad$ $\tan(\pi-x) = -\tan(x)$
- $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos(x)$ $\qquad$ $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$ $\qquad$ $\tan(x+\frac{\pi}{2}) = \dfrac{-1}{\tan x}$
- $\sin(\frac{\pi}{2}-x) = \cos(x)$ $\qquad$ $\cos(\frac{\pi}{2}-x) = \sin(x)$ $\qquad$ $\tan(\frac{\pi}{2}-x) = \dfrac{1}{\tan x}$

2.7 Formules d'Euler

pour tout x réel on a

$$\cos(x) = \frac{\exp(ix)+\exp(-ix)}{2} = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = \frac{\exp(ix)-\exp(-ix)}{2i} = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

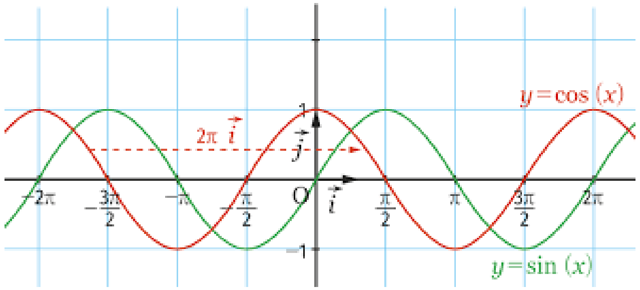
2.8 Equations trigonométriques

- $\cos x = \cos a \iff \begin{cases} x &\equiv a \quad [2\pi] \\ &\text{ou} \\ x &\equiv -a \quad [2\pi] \end{cases}$ $\qquad$ $\sin x = \sin a \iff \begin{cases} x &\equiv a \quad [2\pi] \\ &\text{ou} \\ x &\equiv \pi - a \quad [2\pi] \end{cases}$

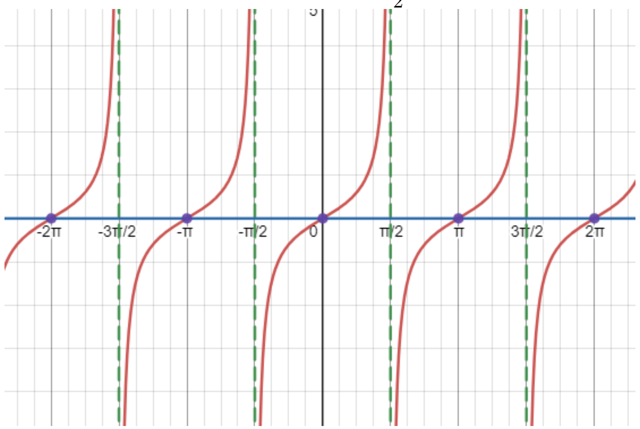
- $\tan x = \tan a \iff x \equiv a \quad [\pi]$

2.9 Propriétés des fonctions trigonométriques

- Les fonctions cos et sin sont définies et C^∞ sur $\mathbb{R}$. Elles sont $2\pi-$ périodiques



- La fonction tan est définie et C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

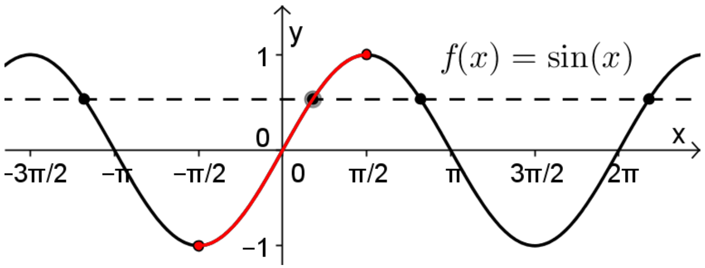


- Les fonctions cos et sin ont pour ensemble image $[-1,+1]$.
- La fonction tan a pour ensemble image $\mathbb{R}$
- La fonction cos est paire; les fonctions sin et tan sont impaires

3 Les fonctions trigonométriques réciproques

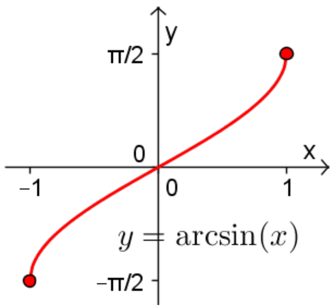
3.1 La fonction ARCSIN

- La fonction sin n'est pas bijective de $\mathbb{R} \to [-1,+1]$



- En revanche la restriction de la fonction sin à $[-\pi/2,+\pi/2]$ réalise une bijection de $[-\pi/2,+\pi/2]$ dans $[-1,+1]$

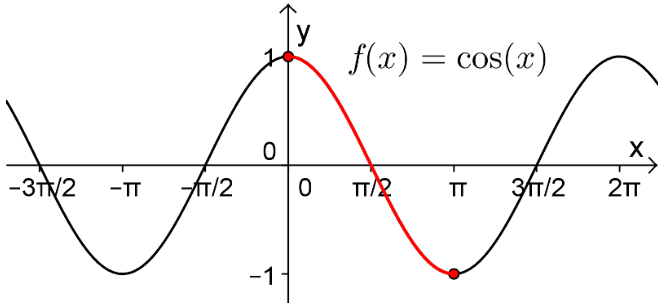
définition 1:
La fonction arcsin est LA FONCTION RÉCIPROQUE DE LA RESTRICTION de la fonction sin à l'intervalle $[-\pi/2,+\pi/2]$



- $\forall x \in [-\pi/2,+\pi/2], \forall y \in [-1,+1]$ on a l 'équivalence $y = \sin x \iff x = \arcsin y$
- $\forall x \in [-\pi/2,+\pi/2]$, $\arcsin(\sin x) = x$
- $\forall y \in [-1,+1]$, $\sin(\arcsin y) = y$
- arcsin est continue sur $[-1,+1]$ et dérivable sur $]-1,+1[$, avec $\boxed{\forall x \in]-1,+1[,\ \arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$
- En appliquant Tayloy-Young, on trouve $\arcsin x \underset{0}{\sim} x$

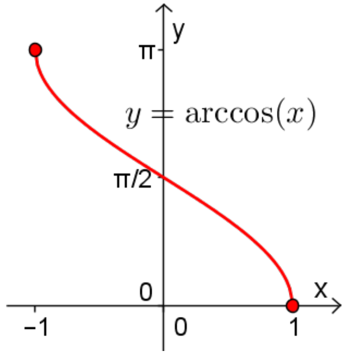
3.2 La fonction ARCCOS

- La fonction cos n'est pas bijective de $\mathbb{R} \to [-1,+1]$



- En revanche la restriction de la fonction cos à $[0,\pi]$ réalise une bijection de $[0,\pi]$ dans $[-1,+1]$

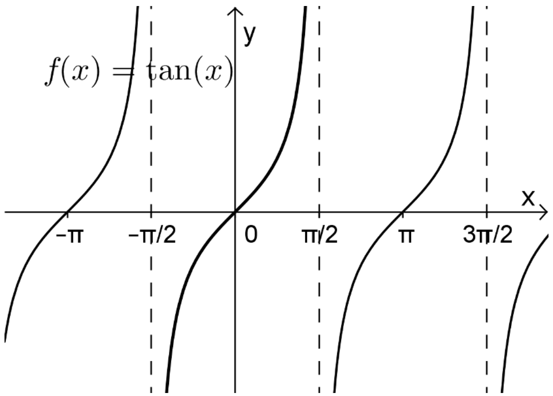
définition 2:
La fonction arccos est LA FONCTION RÉCIPROQUE DE LA RESTRICTION de la fonction cos à l'intervalle $[0,\pi]$



- $\forall x \in [0,\pi], \forall y \in [-1,+1]$ on a l 'équivalence $y = \cos x \iff x = \arccos y$
- $\forall x \in [0,\pi]$, $\arccos(\cos x) = x$
- $\forall y \in [-1,+1]$, $\cos(\arccos y) = y$
- arccos est continue sur $[-1,+1]$ et dérivable sur $]-1,+1[$, avec $\boxed{\forall x \in]-1,+1[,\ \arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$
- $\forall x \in [-1,+1]$, $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$

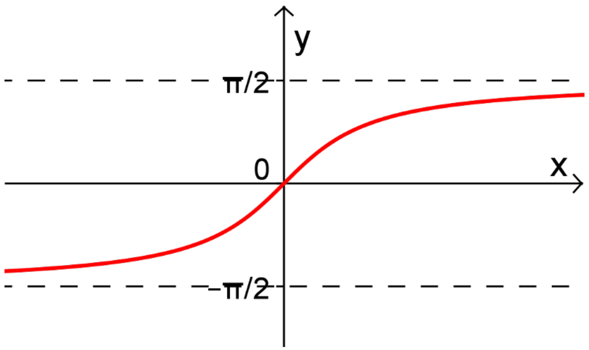
3.3 La fonction ARCTAN

- La fonction tan n'est pas bijective de $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$



- En revanche la restriction de la fonction tan à $]-\pi/2, +\pi/2[$ réalise une bijection de $]-\pi/2, +\pi/2[$ dans $\mathbb{R}$

> **définition 3:**
> La fonction arctan est LA FONCTION RÉCIPROQUE DE LA RESTRICTION de la fonction tan à l'intervalle $]-\pi/2, +\pi/2[$



- $\forall x \in]-\pi/2, +\pi/2[, \forall y \in \mathbb{R}$ on a l 'équivalence $y = \tan x \Longleftrightarrow x = \arctan y$

- $\forall x \in]-\pi/2, +\pi/2[$, $\arctan(\tan x) = x$

- $\forall y \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan y) = y$

- arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}}$

- $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = sg(x).\dfrac{\pi}{2}$ avec $sg(x)$ le signe de x (à savoir redémontrer)

- Rappel: le DL de arctan est au programme

4 Les fonctions hyperboliques

4.1 Définitions et relation fondamentale

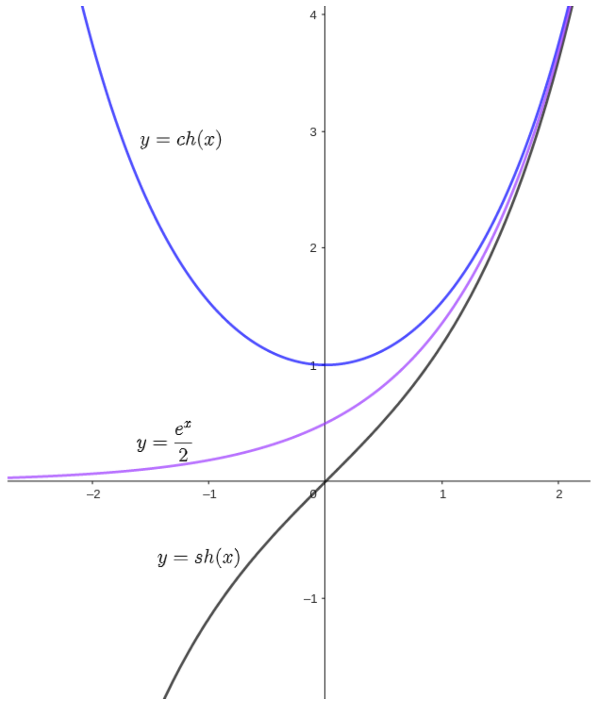
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$

4.2 Propriétés de la fonction ch

- La fonction ch est une fonction définie et C^∞ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$
- La fonction ch est paire
- HP: la restriction de la fonction ch à $[0, +\infty[$ est bijective et sa fonction réciproque est $\begin{array}{ccc} [1, +\infty[& \longrightarrow & [0, +\infty[\\ x & \longmapsto & \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \end{array}$

4.3 Propriétés de la fonction ch

- La fonction sh est une fonction définie et C^∞ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$
- La fonction sh est paire
- HP: La fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et sa fonction réciproque est $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \end{array}$



$$\boxed{\operatorname{ch} x \underset{+\infty}{\sim} \operatorname{sh} x \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}}$$

5 Les fonctions puissances

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x > 0, x^\alpha = e^{x.\ln\alpha}$ *avec la convention* $0^\alpha = 0$ *si* $\alpha > 0$

- $\boxed{\textbf{Règles sur les puissances:}}$
  Pour $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(x,y) \in]0, +\infty[^2$

$$x^\alpha . x^\beta = x^{\alpha+\beta} \qquad \frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha} \qquad \frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta} \qquad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha.\beta} \qquad x^\alpha . y^\alpha = (xy)^\alpha$$

- $\boxed{\textbf{Propriétés de la fonction } x \mapsto x^\alpha}$
  ✓ Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est définie et C^∞ sur $]0, +\infty[$
  (Si $\alpha > 0$, la fonction est prolongeable par continuité en 0 en posant $f_\alpha(0) = 0$)

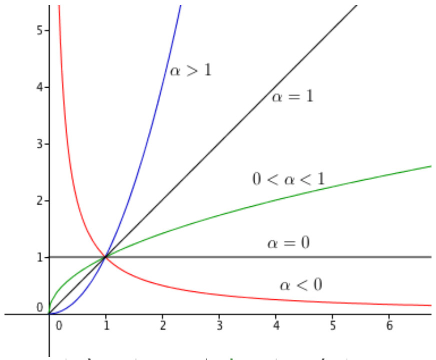
  ✓ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto x^n = \underbrace{x.x.\ldots.x}_{n \text{ fois}}$ est définie et C^∞ sur $\mathbb{R}$

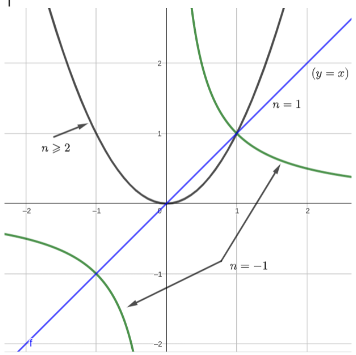
  ✓ Pour $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^n = \dfrac{1}{x^{-n}}$ est définie et C^∞ sur $\mathbb{R}^*$

- $\boxed{\textbf{Racine } n\textbf{-ième}}$
  ✓ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\sqrt[n]{\ }$ est la réciproque de la fonction $\begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & [0, +\infty[\\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$.

  ✓ Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x,y) \in [0, +\infty[^2$

$$y = x^n \iff x = \sqrt[n]{y} = y^{1/n} \qquad \sqrt[n]{x^n} = x \qquad \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$$





6 Logarithme et exponentielle

6.1 Logarithme néperien

- La fonction ln est l'unique primitive sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1. On a donc

$$\begin{array}{rcl} \ln :]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t} \end{array}$$

- $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$ avec $e \approx 2.718$
- Pour $x > 0, y > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\ln x + \ln y = \ln(xy) \qquad \ln x - \ln y = \ln\frac{x}{y} \qquad \ln\frac{1}{x} = -\ln x \qquad \ln(x^\alpha) = \alpha.\ln x$$

- La fonction ln est définie et C^∞ sur $]0, +\infty[$.
- La fonction ln réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$, de fonction réciproque exp

6.2 Exponentielle

- $e^0 = 1$ $\qquad e^1 = e$
- Pour $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$

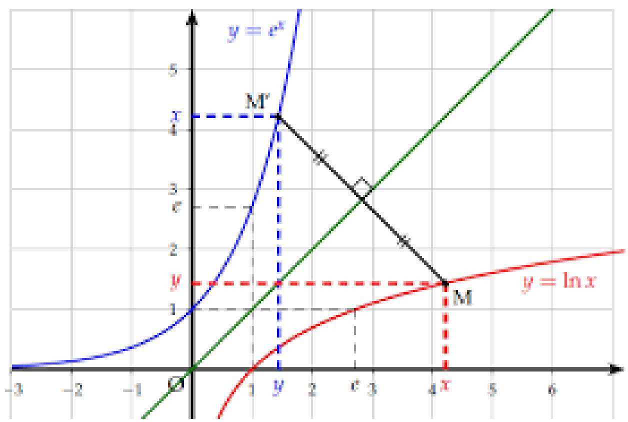
$$e^\alpha . e^\beta = e^{\alpha+\beta} \qquad \frac{1}{e^\alpha} = e^{-\alpha} \qquad \frac{e^\alpha}{e^\beta} = e^{\alpha-\beta} \qquad (e^\alpha)^\beta = e^{\alpha.\beta}$$

- La fonction exp est définie et C^∞ sur $\mathbb{R}$
- La fonction exp réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$, de fonction réciproque ln

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y > 0, \qquad (y = e^x \iff x = \ln y)$$

$$\forall x > 0, \exp(\ln x) = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ln e^x = x$$



7 Croissances comparées

- Les limites des fonctions usuelles sont à connaître, ainsi que leurs graphes
- **le principe des croissances comparées:**

  "En cas de forme indéterminée (en 0 ou en ∞),
  l'exponentielle l'emporte sur les puissances qui l'emportent sur les ln"

  càd pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta.x}} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha.(\ln x)^\beta = 0$$

8 Calculs algébriques

- $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1 = \prod_{k=1}^{n} k$ avec la convention $0! = 1$
- $(n+1)! = (n+1) \times n!$
- $2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n) = 2^n.n!$
- $1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1) = \dfrac{(2n+1)!}{2^n.n!}$
- Lorsque les coefficients ci-dessous ont un sens, on a
  1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \qquad \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$
  2. $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
  3. $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$ (triangle de pascal)
  4. $p.\binom{n}{p} = n.\binom{n-1}{p-1}$ (formule du capitaine)
- $\forall (a,b) \in \mathbb{C}, (a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$ (binôme de Newton)
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ et $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ et $a^3 - b^3 = (a-b).(a^2 + ab + b^2)$
- $\sum_{k=0}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\boxed{1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{sinon} \end{cases}}$
- $ax^2 + bx + c = 0$ a pour racines x_1 et x_2, avec $\begin{cases} x_1 + x_2 &= \dfrac{-b}{a} \\ x_1.x_2 &= \dfrac{c}{a} \end{cases}$

9 Dérivées et primitives

9.1 Opérations

- linéarité : $(\lambda.f + \mu.g)' = \lambda.f' + \mu.g'$
- produit : $(f.g)' = f'.g + f.g'$
- inverse : $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2}$
- quotient : $\left(\dfrac{g}{f}\right)' = \dfrac{g'.f - f'.g}{f^2}$
- composée : $(f \circ g) = g' \times (f' \circ g)$
- réciproque : $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$
- linéarité de la dérivée n-ième: $(\lambda.f + \mu.g)^{(n)} = \lambda.f^{(n)} + \mu.g^{(n)}$
- formule de Leibniz : $(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.f^{(k)}.g^{(n-k)}$

9.2 Dérivées des fonctions usuelles

intervalle	$f(x)$	$f'(x)$
$\mathbb{R}$ avec $m \in \mathbb{N}$ $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ avec $m \in \mathbb{Z}$ et $m \leqslant -1$ $\mathbb{R}_+^*$ avec $m \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	x^m	$m.x^{m-1}$
$\mathbb{R}_+^*$	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\mathbb{R}_+^*$	$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$	$\exp(x)$ $\operatorname{ch} x$ $\operatorname{sh} x$	$\exp(x)$ $\operatorname{sh} x$ $\operatorname{ch} x$
$\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ $\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, +\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$	$\sin x$ $\cos x$ $\tan x$	$\cos x$ $-\sin x$ $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\mathbb{R}$	$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$]-1, +1[$	$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$]-1, +1[$	$\arccos x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

9.3 Dérivées des fonctions composées (se déduit du tableau ci-dessus)

u désigne une fonction dérivable à valeurs dans l'intervalle qu'il faut ...

- $(u^n)' = u'.u^{n-1}$
- $\sqrt{u} = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
- $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
- $(e^u)' = u'.e^u$
- $(\operatorname{ch}(u))' = u'.\operatorname{sh}(u)$ et $(\operatorname{sh}(u))' = u'.\operatorname{ch}(u)$
- $(\cos(u))' = -u'.\sin u$ et $(\sin(u))' = u'.\cos(u)$
- $(\tan(u))' = \dfrac{u'}{\cos^2 u} = u'.(1+\tan^2 u)$
- $(\arctan u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
- $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ et $(\arccos u)' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

9.4 Primitives usuelles

intervalle	$f(x)$	$F(x)$
$\mathbb{R}$ avec $m \in \mathbb{N}$	x^m	$\frac{x^{m+1}}{m+1} + C$
$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ avec $m \in \mathbb{Z}$ et $m \leqslant -2$		$\frac{x^{m+1}}{m+1} + C$
$\mathbb{R}_+^*$avec $m \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$		$\frac{x^{m+1}}{m+1} + C$
$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$
$\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\mathbb{R}$	$\exp(x)$	$\exp(x) + C$
$\mathbb{R}$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x + C$
$\mathbb{R}$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x + C$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$-\cos x + C$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x + C$
$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, +\frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x + C$
$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, +\frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$	$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$
$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$]-1,+1[$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$ <u>ou</u> $-\arccos x + C$

9.5 Primitives des fonctions composées (se déduit du tableau ci-dessus)

Soit u une fonction dérivable à valeurs dans l'intervalle qu'il faut...

- $\displaystyle\int^x u'(t).u^n(t)dt = \frac{u^{n+1}(x)}{n+1} + C$ lorsque $n \neq -1$
- $\displaystyle\int^x \frac{u'(t)}{\sqrt{u(t)}}dt = 2\sqrt{u(x)} + C$
- $\displaystyle\int^x \frac{u'(t)}{u(t)}dt = \ln\lvert u(x)\rvert + C$
- $\displaystyle\int^x u'(t).e^{u(t)}dt = e^{u(x)} + C$
- $\displaystyle\int^x u'(t).\operatorname{ch}(u(t)).dt = \operatorname{sh}(u(x)) + C$
- $\displaystyle\int^x u'(t).\operatorname{sh}(u(t)).dt = \operatorname{ch}(u(x)) + C$
- $\displaystyle\int^x u'(t).\cos(u(t)).dt = \sin(u(x)) + C$
- $\displaystyle\int^x u'(t).\sin(u(t)).dt = -\cos(u(x)) + C$
- $\displaystyle\int^x \frac{u'(t)}{1+u^2(t)}dt = \arctan u(x) + C$
- $\displaystyle\int^x \frac{u'(t)}{\sqrt{1-u^2(t)}}dt = \arcsin(u(x)) + C$

9.6 Intégrales généralisées de référence

- $\displaystyle\int_0^1 \ln t\, dt$ CV
- $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha t}dt$ CV ssi $\alpha > 0$
- Riemann : $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ CV ssi $\alpha < 1$ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$ CV ssi $\alpha > 1$

9.7 Intégrabilités de référence

- $\ln$ est intégrable en 0
- $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est intégrable en $+\infty$ ssi $\alpha > 0$
- $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable en 0 ssi $\alpha < 1$
- $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable en $+\infty$ ssi $\alpha > 1$
- $t \mapsto \dfrac{1}{\lvert t-a\rvert^\alpha}$ est intégrable en 0 ssi $\alpha < 1$

10 Développements limités de référence en 0 (très important)

- $\exp x = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
- $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
- $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
- $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
- $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$
- $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ (seul l'ordre trois est à connaitre)

Théorème de Taylor-Young

Soit $f \in C^n(I,\mathbb{C})$.
Alors f admet en tout point $a \in I$ un DL à l'odre n

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Sommes de Riemann

Lorsque $f \in C^0([a,b],\mathbb{K})$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i\frac{b-a}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a + i\frac{b-a}{n}) = \int_{[a,b]} f$$

Formule de Taylor avec Reste Intégral

Lorsque $f \in C^{n+1}(I,\mathbb{K})$

pour tous a et b éléments de I, on a $f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$

Inégalité de Taylor Lagrange

Soit $f \in C^{n+1}(I,\mathbb{R})$ ainsi que a et b deux réels de l'intervalle I, et notons $M = \max_{[a,b]} |f^{(n+1)}|$

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{M.|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Formule de Taylor polynomiale

Pour tout polynôme P et scalaire a,
on a $P(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$ càd $P(X+a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k$

Série de Taylor

Si f est de classe C^∞ on peut définir la série de Taylor de f qui est $\sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.x^n$

11 Développements en série entière usuels

DSE dans $\mathbb{C}$

- *Rayon*$(\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}) = \infty$ et $\forall z \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$
- *Rayon*$(\sum_{n\geqslant 0} z^n) = 1$ et $\forall |z| < 1, \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$

DSE dans $\mathbb{R}$

série entière	rayon	somme sur l'intervalle ouvert de convergence
$\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$	∞	$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$
$\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	∞	$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$
$\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	∞	$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x$
$\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	∞	$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch} x$
$\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	∞	$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{sh} x$
$\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n x^n$	1	$\forall x \in]-1,+1[, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$
$\sum_{n\geqslant 0} x^n$	1	$\forall x \in]-1,+1[, \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$
$1 + \sum_{n\geqslant 1} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	1	$\forall x \in]-1,+1[, (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$
$\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$	1	$\forall x \in]-1,+1[, \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x)$
$\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$	1	$\forall x \in]-1,+1[, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$
$\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1	$\forall x \in]-1,+1[, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x$

12 Equations différentielles

12.1 Premier ordre homogène

L'équation $\boxed{y' + a(x)y = 0}$ a pour solution générale $\boxed{\begin{array}{rcl} y : I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & K.\exp(-A(x)) \end{array}}$ où A désigne une primitive de a et $K \in \mathbb{K}$ un scalaire quelconque

12.2 Premier ordre complète

- La solution générale de l'équation $\boxed{y' + a(x).y = b(x)}$ s'écrit comme la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée.

- Une solution particulière est trouvée soit de manière évident, soit en utilisant la méthode de la variation de la constante, càd en cherchant une solution particulière de la forme $y_p : x \mapsto K(x).e^{-A(x)}$ avec K fonction dérivable inconnue

12.3 Second ordre homogène à coefficients constants

L'équation différentielle $a.y'' + b.y' + c.y = 0\,(H)$ a pour équation caractéristique $a.X^2 + b.X + c = 0\,(E_c)$
Suivant le signe de Δ les solutions générales ont des formes différentes

12.3.1 cas des fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$

- cas où $\Delta \neq 0$.
  notons r_1 et r_2 les deux racines distinctes de E_c
  La solution générale de (H) est $\boxed{y : x \mapsto A.e^{r_1 x} + B.e^{r_2 x}}$

- cas où $\Delta = 0$.
  notons r_0 la racine double de E_c
  La solution générale de (H) est $\boxed{y : x \mapsto (A.x + B)e^{r_0 x}}$

12.3.2 cas des fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$

- cas où $\Delta > 0$.
  notons r_1 et r_2 les deux racines réelles distinctes de E_c
  La solution générale de (H) est $\boxed{y : x \mapsto A.e^{r_1 x} + B.e^{r_2 x}}$

- cas où $\Delta = 0$.
  notons r_0 la racine double réelle de E_c
  La solution générale de (H) est $\boxed{y : x \mapsto (A.x + B)e^{r_0 x}}$

- cas où $\Delta < 0$.
  notons $\alpha \pm i\beta$ les racines complexes conjuguées de E_c
  La solution générale de (H) est $\boxed{y : x \mapsto = e^{\alpha x}(A.\cos(\beta x) + B.\sin(\beta x))}$

12.3.3 second membre du type $x \mapsto C.e^{\lambda.x}$

On considère l'équation $a.y'' + b.y' + c.y = C.e^{\lambda.x}$ où $(C,\lambda) \in \mathbb{C}^2$.

- si λ n'est pas racine de E_c, il existe une sol.part. de la forme $x \mapsto D.e^{\lambda.x}$
- si λ est racine simple de E_c, il existe une sol.part. de la forme $x \mapsto D.x.e^{\lambda.x}$
- si λ est racine double de E_c, il existe une sol.part. de la forme $x \mapsto D.x^2.e^{\lambda.x}$

avec $D \in \mathbb{K}$ une constante à déterminer

12.3.4 second membre du type $x \mapsto C.\cos(\omega.x)$ ou $x \mapsto C.\sin(\omega.x)$

On considère l'équation $a.y'' + b.y' + c.y = C.\cos(\omega.x)$ où $(C,\lambda) \in \mathbb{R}^2$.

- si $i.\omega$ n'est pas racine de E_c, il existe une sol.part.de la forme $x \mapsto D.\cos(\omega.x) + E.\sin(\omega.x)$
- si $i.\omega$ est racine simple de E_c, il existe une sol.part.de la forme $x \mapsto D.x.\cos(\omega.x) + E.x.\sin(\omega.x)$

avec $(D,E) \in \mathbb{R}^2$ des constantes à déterminer

13 Suites numériques

13.1 Limite de la suite (q^n) (très important)

Soit $q \in \mathbb{R}$

- si $|q| < 1$ alors $\lim q^n = 0$
- si $q = 1$ alors $\lim q^n = 1$
- si $q > 1$ alors $\lim q^n = +\infty$
- si $q = -1$ alors la suite $(q^n) = ((-1)^n)$ ne possède pas de limite.
- si $q < -1$ alors la suite (q^n) ne possède pas de limite

13.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

- $a.u_{n+2} + b.u_{n+1} + c.u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- Equation caractéristique $a.X^2 + b.X + c = 0$
- **expression explicite des suites à valeurs complexes**
  1. **Cas où $\Delta \neq 0$:**
     Notons alors r_1 et r_2 les racines distinctes de l'équation caractéristique.
     Alors :
     $$\exists (A,B) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = A.r_1^n + B.r_2^n$$
  2. **Cas où $\Delta = 0$:**
     Notons alors r_0 la racine double de l'équation caractéristique.
     Alors :
     $$\exists (A,B) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = A.r_0^n + B.n.r_0^n$$
- **expression explicite des suites à valeurs** réelles
  1. **Cas où $\Delta > 0$** : Notons alors r_1 et r_2 les racines distinctes de l'équation caractéristique.
     Alors :
     $$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = A.r_1^n + B.r_2^n$$
  2. **Cas où $\Delta = 0$** : Notons alors r_0 la racine double de l'équation caractéristique.
     Alors :
     $$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = A.r_0^n + B.n.r_0^n$$
  3. **Cas où $\Delta < 0$** : Notons alors r_1 et r_2 les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.
     alors :
     $$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n (A \cos n\theta + B \sin n\theta)$$
     où q est le module de r_1 et θ un argument de r_1

14 Séries numériques de référence

1. **séries de Riemman** : $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$
2. **série géométrique** : $\sum q^n$ converge (acv) ssi $|q| < 1$, et dans ce cas $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$
3. **série de l'exponentielle** : $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge (acv) pour tout $z \in \mathbb{C}$, et de plus $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$
4. **critère spécial des séries alternées**: si la valeur absolue du terme général décroit et tend vers zéro alors la série converge

15 Probabilités

15.1 Evénements

- $\omega \in \overline{A} \iff \omega \notin A$ *($\overline{A}$ = complémentaire de A)*
- $\omega \in A \cup B \iff \omega \in A$ ou $\omega \in B$
- $\omega \in A \cap B \iff \omega \in A$ et $\omega \in B$
- $\omega \in A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_N \iff \exists j \in [\![1,N]\!], \omega \in A_j$ *(union d'une nombre fini d'ensembles)*
- $\omega \in A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_N \iff \forall j \in [\![1,N]\!], \omega \in A_j$ *(intersection d'une nombre fini d'ensembles)*
- $A \setminus B = A \cap \overline{B} = \{\omega \in A \,|\, \omega \notin B\}$
- les $(A_i)_{i \in I}$ sont **deux à deux incompatibles** lorsque $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$
- les $(A_i)_{i \in I}$ constituent **un système complet d'événements** lorsque
  i) $\bigcup\limits_{i \in I} A_j = \Omega$
  ii) $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$

Loi de De Morgan

- Soient A et B deux ensembles (*ou événements si vocabulaire des probabilités*)
  $$\overline{\overline{A}} = A \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
  si $A \subset B$ alors $\overline{B} \subset \overline{A}$
- Soient A, B et C trois ensembles (*ou événements si vocabulaire des probabilités*)
  $$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

généralisation à un nombre fini d'ensemble

- Soient $(A_j)_{1 \leqslant j \leqslant N}$ un nombre fini d'ensembles (*ou événements si vocabulaire des probabilités*).
  On a
  $$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_N} = \overline{\bigcup_{j=1}^{N} A_j} = \bigcap_{j=1}^{N} \overline{A_j} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_N}$$
  $$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_N} = \overline{\bigcap_{j=1}^{N} A_j} = \bigcup_{j=1}^{N} \overline{A_j} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cap \overline{A_N}$$
  $$B \bigcap (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_N) = (B \cap A_1) \bigcup (B \cap A_2) \bigcup \cdots \bigcup (B \cap A_N)$$
  $$B \bigcup (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_N) = (B \cup A_1) \bigcap (B \cup A_2) \bigcap \cdots \bigcap (B \cup A_N)$$

généralisation à un nombre au plus dénombrable d'ensemble

- Soient $(A_i)_{i\in J}$ un nombre au plus dénombrable d'ensembles (*ou événements si vocabulaire des probabilités*).
On a
$$\overline{\bigcup_{j\in I} A_j} = \bigcap_{j\in I} \overline{A_j}$$
$$\overline{\bigcap_{j\in I} A_j} = \bigcup_{j\in I} \overline{A_j}$$
$$B\bigcap(\bigcup_{i\in J} A_i) = \bigcup_{i\in J}(B\bigcap A_i)$$
$$B\bigcup(\bigcap_{i\in J} A_i) = \bigcap_{i\in J}(B\bigcup A_i)$$

15.2 Formules de probabilité

- $P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset) = 0$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$
- **probabilité conditionnelle:** $P(A|B) = P_A(B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ càd $P(A\cap B) = P(A).P_A(B)$
- **formule de Bayes** $P_B(A) = \dfrac{P(A)}{P(B)}.P_A(B)$ càd $P(A).P_A(B) = P(B).P_B(A)$
- **si événements 2 à 2 incompatibles**: $P(\bigcup_{j\in J} A_j) = \sum_{j\in J} P(A_j)$ avec J au plus dénombrable
- **formule des probabilités composées**
$$P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)\times\cdots\times P_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-2}}(A_{n-1}).P_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$$
- A et B indépendants: $P(A\cap B) = P(A).P(B)$
- $A_1,\ldots,A_N$ mutuellement indépendants: $P(A_1\cap\cdots\cap A_N) = P(A_1)\times\cdots\times P(A_N)$
- **Formule des probabilités totales:** si $(A_n)_{n\in I}$ est un (quasi-)SCE
$$P(B) = \sum_{n\in I} P(B\cap A_n) = \sum_{n\in I} P(A_n).P_{A_n}(B)$$
- **continuité croissante:** si $\forall n\in\mathbb{N}, A_n\subset A_{n+1}$ alors $\boxed{P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)}$
- **continuité décroissante:** si $\forall n\in\mathbb{N}, A_{n+1}\subset A_n$ alors $\boxed{P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)}$

15.3 Variables aléatoires

15.3.1 Espérance, variance, covariance

- $\boxed{\text{Si } X(\Omega) = \{x_1,\ldots,x_n\} \text{ fini.}}$
  - ✓ $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i.P(X=x_i) = \sum_{x\in X(\Omega)} x.P(X=x)$
  - ✓ $E(g(X)) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i).P(X=x_i) = \sum_{x\in X(\Omega)} g(x).P(X=x)$ (théorème de Transfert)
  - ✓ $V(X) = E(\,[X-E(X)]^2\,) = E(X^2) - [E(X)]^2$ (formule de Koenig-Huygens)
  - ✓ $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$
  - ✓ X est une variable aléatoire CENTRÉE RÉDUITE lorsque $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$
- $\boxed{\text{Si } X(\Omega)\subset\mathbb{N} \text{ dénombrable}}$
  - ✓ $E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n.P(X=n) = \sum_{n=0} P(X\geqslant n)$ si CV
- ✓ $E(a.X+b.Y) = a.E(X) + b.E(Y)$ (linéarité de l'espérance)
  - ✓ $V(aX+b) = a^2.V(X)$
  - ✓ $cov(X,Y) = E\left((X-E(X)).(Y-E(Y))\right) = E(X.Y) - E(X).E(Y)$
  - ✓ $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2cov(X,Y)$
  - ✓ $V(X-Y) = V(X) + V(Y) - 2cov(X,Y)$
  - ✓ cov est bilinéaire

15.3.2 Loi uniforme

Soit $n\geqslant 1$

- $X\sim\mathcal{U}(\{x_1,x_2,\ldots,x_n\})$ lorsque $\begin{cases} X(\Omega) = \{x_1,x_2,\ldots,x_n\} \\ P(X=x_k) = \dfrac{1}{n} \end{cases}$
- cas particulier:
$X\sim\mathcal{U}([\![1,n]\!])$ lorsque $\begin{cases} X(\Omega) = [\![1,n]\!] \\ P(X=k) = \dfrac{1}{n} \end{cases}$

15.3.3 Loi de Bernoulli

Soit $p\in[0,1]$, on note $q = 1-p$

- $X\sim\mathcal{B}(p)$ lorsque $\begin{cases} X(\Omega) = \{0,1\} \\ P(X=1) = p \text{ et } P(X=0) = q \end{cases}$
- $E(X) = p$
- $V(X) = pq$
- $G_X(t) = 1 - p + pt$ et $R = \infty$
- **épreuve de Bernoulli:** *c'est une expérience aléatoire qui n'a que deux issues possibles*
  i. Succès (de probabilité p)
  ii. Echec (de probabilité $q = 1-p$)
  Si X désigne la v.a. qui vaut 1 en cas de succès et 0 sinon alors $X\sim\mathcal{B}(p)$

15.3.4 Loi binomiale

Soit $p \in [0,1]$, on note $q = 1 - p$

- $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ lorsque $\begin{cases} X(\Omega) = [\![0,n]\!] \\ P(X = k) = \dbinom{n}{k} .p^k.q^{n-k} \end{cases}$
- $E(X) = np$
- $V(X) = n.p.q$
- $G_X(t) = (1 - p + pt)^n$ et $R = \infty$

- **schéma de Bernoulli:** *c'est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre de succès p.*
  Si X désigne la v.a. qui compte le nombre de succès alors $X \sim \mathcal{B}(n,p)$

15.3.5 Loi géométrique

Soit $p \in]0,1[$, on note $q = 1 - p$

- $X \sim \mathcal{G}(p)$ lorsque $\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ P(X = k) = q^{k-1}.p \end{cases}$
- $E(X) = \dfrac{1}{p}$
- $V(X) = \dfrac{q}{p^2} = \dfrac{1-p}{p^2}$
- $G_X(t) = \dfrac{pt}{1 - qt} = \dfrac{pt}{1 - (1-p)t}$ et $R = \dfrac{1}{1-p} = \dfrac{1}{q}$

- *La loi géométrique est aussi appelée* ***la loi du premier succès****.*
  On répète de manières indépendantes une même expérience de Bernoulli de paramètre de succès p.
  Si X désigne le rang du premier succès alors $X \sim \mathcal{G}(p)$

15.3.6 Loi de Poisson

Soit $\lambda > 0$

- $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ lorsque $\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N} \\ P(X = k) = e^{-\lambda}.\dfrac{\lambda^k}{k!} \end{cases}$
- $E(X) = \lambda$
- $V(X) = \lambda$
- $\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = e^{\lambda.(t-1)} = \exp(\lambda.(t-1))$ et $R = \infty$

- *La loi de Poisson n'est associée à aucune expérience aléatoire*

16 Géométrie plane

16.1 Outils

- le produit scalaire caractérise l'orthogonalité
- le déterminant caractérise la colinéarité

16.2 Points et vecteurs

- $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$
- $||\overrightarrow{AB}|| = AB = d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- $Mil[AB] = \dfrac{1}{2}(A + B) = (\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2})$

16.3 Droites du plan

- La droite qui passe par le point $A(x_A,y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = (d_1,d_2)$
  - ✓ a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x &= x_A + t.d_1 \\ y &= y_A + t.d_2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$
  - ✓ a pour équation cartésienne $\begin{vmatrix} x - x_A & d_1 \\ y - y_A & d_2 \end{vmatrix} = 0$
- toute droite du plan admet une équation cartésienne du type $\boxed{ux + vy + w = 0 \text{ avec } (u,v) \neq (0,0)}$
  - ✓ un vecteur directeur est $\begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix}$ et un vecteur normal est $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$
  - ✓ deux droites sont parallèles ssi $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = 0$
  - ✓ deux droites sont perpendiculaires ssi $\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$ *(produit scalaire)*
- toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées possède une éq. cart. réduite du type $\boxed{y = mx + p}$
  - ✓ m est le coefficient directeur de la droite
  - ✓ un vecteur directeur est $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ et un vecteur normal est $\begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix}$
  - ✓ deux droites sont parallèles **ssi** $m_1 = m_2$
  - ✓ deux droites sont perpendiculaires **ssi** $m_1.m_2 = -1$
- distance entre un point et une droite
  - ✓ la distance du point $M_0(x_0,y_0)$ à la droite d'équation $(D) : ux + vy + w = 0$ est donnée par la formule
    $$\boxed{\frac{|ux_0 + vy_0 + w|}{\sqrt{u^2 + v^2}} = d(M_0,(D))}$$
  - ✓ la distance du point M_0 à la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est donnée par la formule
    $$\boxed{d(M_0,D) = \frac{| < \overrightarrow{AM},\vec{n} > |}{||\vec{n}||}}$$

16.4 Cercles du plan

Le cercle de centre $\Omega(x_0,y_0)$ et de rayon $R > 0$

- a pour équation cartésienne $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$
- a pour équation paramétrique $\begin{cases} x &= x_0 + R.\cos t \\ y &= y_0 + R.\sin t \end{cases}$ avec $t \in [0,2\pi]$ par exemple
- a pour équation complexe $|z - \omega| = R$ avec $\omega = Affixe(\Omega)$

16.5 Coniques dans le plan

- Ellipse
  - ✓ excentricité $e < 1$
  - ✓ équation réduite $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
  - ✓ représentation paramétrique $\begin{cases} x &= a.\cos t \\ y &= b.\sin t \end{cases}$ avec $t \in [0,2\pi]$ par exemple
- Parabole
  - ✓ excentricité $e = 1$
  - ✓ équation réduite $y^2 = 2px$
  - ✓ représentation paramétrique possible $\begin{cases} x &= \frac{t^2}{2p} \\ y &= t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$
- Hyperbole
  - ✓ excentricité $e > 1$
  - ✓ équation réduite $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
  - ✓ représentation paramétrique $\begin{cases} x &= \pm a.\operatorname{ch} t \\ y &= b.\operatorname{sh} t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$
  - ✓ droites asymptotes $y = \pm \dfrac{b}{a} x$

16.6 Aire d'un triangle

- Aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $|\det(\vec{u},\vec{v})|$
- l'aire du triangle ABC est donnée par la formule $\boxed{\dfrac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\right| = \dfrac{1}{2}.AB.AC.|\sin(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})|}$

17 Géométrie de l'espace

17.1 Outils

- le produit scalaire caractérise l'orthogonalité
- le produit vectoriel caractérise la colinéarité
- le déterminant caractérise la coplanarité

17.2 Plans de l'espace

- le plan qui passe par le point $A(x_A,y_A,z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{d} = (d_1,d_2,d_3)$ et $\vec{\delta} = (\delta_1,\delta_2,\delta_3)$
  - ✓ a pour rep. paramétrique $\begin{cases} x &= x_A + t.d_1 + \theta.\delta_1 \\ y &= y_A + t.d_2 + \theta.\delta_2 \\ z &= z_A + t.d_3 + \theta.\delta_3 \end{cases}$ avec $(t\,\theta) \in \mathbb{R}^2$
  - ✓ a pour équation cartésienne $\begin{vmatrix} x - x_A & d_1 & \delta_1 \\ y - y_A & d_2 & \delta_2 \\ z - z_A & d_3 & \delta_3 \end{vmatrix} = 0$
  - ✓ un vecteur normal au plan est $\vec{d} \wedge \vec{\delta}$

- tout plan de l'espace possède une équation cartésienne du type $\boxed{ax + by + cz + d = 0 \text{ avec } (a,b,c) \neq (0,0,0)}$ le vecteur (a,b,c) est alors un vecteur normal au plan

- La distance du point $M_0(x_0,y_0,z_0)$ au plan (P) : $ax + by + cz + d = 0$ est donnée par la formule

$$\boxed{\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = d(M_0,(P))}$$

17.3 Droites de l'espace

- La droite qui passe par le point $A(x_A,y_A,z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = (d_1,d_2,d_3)$ a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x &= x_A + t.d_1 \\ y &= y_A + t.d_2 \\ z &= z_A + t.d_3 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

- La distance d'un point M_0 à une droite (D) définie par un point A et un vecteur directeur $\vec{d}$ est donnée par la formule

$$\boxed{d(M_0,(D)) = \frac{||\overrightarrow{AM_0} \wedge \vec{d}\,||}{||\vec{d}\,||}}$$

- Une droite peut être définie comme l'intersection de 2 plans par un système d'équations cartésiennes $\begin{cases} ax + by + cz + d &= 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' &= 0 \end{cases}$

  Dans ce cas $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite

17.4 Sphère de l'espace

- La sphère de centre $\Omega = (x_0,y_0,z_0)$ et de rayon $R > 0$ a pour équation cartésienne

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

17.5 Aire du parallélépipède

- Aire du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$: $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$