1 Probabilités

Evénements

PrO 1
Expérience: on lance une pièce de monnaie une infinité de fois.
Indiquer si les familles suivantes sont des SCE

1. $\mathcal{F} = (A,B)$ avec A="le premier lancer a donné pile" , B="le premier lancer a donné face"
2. $\mathcal{F} = (A,B)$ avec A="le premier lancer a donné pile" , B="le second lancer a donné face"
3. $\mathcal{F} = (A,B,C)$ avec A="le premier lancer a donné pile" , B="le second lancer a donné face" et C="le second lancer a donné pile"
4. $\mathcal{F} = (A_n)_{n\in[\![0,4]\!]}$ avec $A_n =$" on a obtenu exactement n Piles avec les quatre premiers lancers"
5. $\mathcal{F} = (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $A_n =$ "on a obtenu Face au n-ième lancer " où $n \in \mathbb{N}^*$ et A_0= "aucun lancer n'a donné Face"
6. $\mathcal{F} = (A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec $A_n =$ "on a obtenu Face pour la première fois au n-ième lancer " où $n \in \mathbb{N}^*$
7. $\mathcal{F} = (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $A_n =$ "on a obtenu Face pour la première fois au n-ième lancer " où $n \in \mathbb{N}^*$ et A_0= "aucun lancer n'a donné Face"

PrO 2
Indiquer si les familles suivantes sont des systèmes complets d'événements.

1. **Expérience: on lance 5 fois de suite un dé à six faces**
   i) $(A_n)_{1\leqslant n\leqslant 5}$ avec $A_n =$"le n-ième lancer donne 6"
   ii) $(A_n)_{1\leqslant n\leqslant 6}$ avec $A_n =$"le premier lancer donne n"
   iii) $(A_n)_{2\leqslant n\leqslant 10}$ avec $A_n =$"la somme des lancers est divisible par n"
2. **Expérience: on lance une pièce de monnaie une infinité de fois.**
   i) $(A_n)_{n\geqslant 1}$ avec $A_n =$"le n-ième lancer donne Face"
   ii) $(A_n)_{n\geqslant 1}$ avec $A_n =$"les n premiers lancers donne Face puis Pile"

PrO 3 (évènements)
Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'évènements d'un univers Ω . Ecrire à l'aide des opérateurs ou comparaisons ensemblistes usuelles les situations suivantes :

1. A="l'un au moins des évènements A_1,A_2,A_3 est réalisé"
2. A="l'un et l'un seulement des évènements A_1 et A_2 se réalise"
3. A="A_1 et A_2 se réalisent mais pas A_3"
4. A chaque fois que A_1 est réalisé, A_2 l'est aussi
5. A_1 et A_2 ne se produisent jamais ensemble
6. A_1 ou A_2 se produisent toujours
7. A="Tous les évènements A_i se produisent"
8. A="l'un au moins des A_i se réalise"
9. A="seul un nombre fini d'événements A_i se réalise"

PrO 4
Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'évènements d'un univers Ω.
Décrire "en toutes lettres" la signification des événements ci-dessous

$$\bigcup_{i\geqslant 10} A_i \qquad \bigcap_{i\geqslant 10} A_i \qquad \bigcap_{n=1}^{n=10}\bigcup_{i\geqslant n} A_i \qquad \bigcup_{n=1}^{n=10}\bigcup_{i\geqslant n} A_i \qquad \bigcap_{n=1}^{n=10}\bigcup_{i\leqslant n} A_i \qquad \bigcup_{n=1}^{n=10}\bigcup_{i\leqslant n} A_i$$

PrO 5 (évènements)
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements.
On considère $B = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (\bigcap\limits_{m=n}^{+\infty} A_m)$ et $C = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (\bigcup\limits_{m=n}^{+\infty} A_m)$

1. Montrer que B et C sont des évènements
2. Montrer que $B \subset C$
3. Ecrire avec les quantificateurs l'appartenance de ω pour chacun de ses deux ensembles.
   Décrire alors ces deux événements en langage de tous les jours

remarque: B s'appelle la limite inférieure des évènements, C la limite supérieure

PrO 6
Soit Ω un univers

1. Vérifier que $\{\Omega,\emptyset\}$ est une tribu
2. Dans le cas particulier où $\Omega = \{1,2,3\}$
   Déterminer une tribu qui contient $\{1\}$ et $\{2\}$
3. Soit A un événement.
   Vérifier que $\mathcal{T} = \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$ est une tribu

PrO 7
Dans une urne, il y a un certain nombre de boules numérotées de 1 à 99.
L'expérience aléatoire consiste à extraire une boule et à noter son numéro.
On note $\Omega = \{1,2,\dots,98,99\} = [\![1,99]\!]$
Pour tout $i \in [\![0,9]\!]$ on note

- D_i l'événement le chiffre des dizaines est égal à i
- U_i l'événement le chiffre des unités est égal à i

Compléter...

1. "Le numéro est un multiple de dix" correspond à l'événement
2. L'événement $D_2 \cap U_2$ correspond à l'événement
3. L'événement $D_2 \cup U_2$ correspond à l'événement
4. L'événement $(\overline{D_2} \cap U_2) \cup (D_2 \cap \overline{U_2})$ correspond à l'événement
5. "Le numéro est inférieur à ou égal à 7"
6. "Le numéro est un multiple de 11" correspond à l'événement
7. "Le numéro est supérieur à 70 et le chiffre des unités est supérieur ou égal à celui des dizaines" correspond à l'événement

PrO 8 (union dénombrable d'événements négligeables)
Soit $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'évènements négligeables.

1. Montrer que $\bigcup\limits_{k=0}^{k=n} A_k$ est encore un événement négligeable pour tout $n \geqslant 0$ fixé.
2. Montrer que $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ est encore un événement négligeable.

rem: en revanche une réunion <u>non dénombrable</u> d'événements négligeables pourrait être de probabilité non nul(

Dénombrements

PrO 9

20 livres sont posés sur une étagère rectiligne et répartis au hasard. Parmi ces 20 livres, 3 sont de la même auteure Céline , les autres étant d'auteurs différents.

1. Quel est le nombre de répartitions des 20 livres possibles?
2. Quel est le nombre de répartitions de ces 20 livres avec les 3 livres de Céline côte à côte?

PrO 10

Une classe est composée de 30 élèves dont 3 filles.
Les élèves entrent un à un dans une salle de classe pour assister au cours de Mme Vincentelli.
Combien y-a-il d'entrées possibles…

1. en tout?
2. avec les 3 filles qui entrent en premier
3. avec les 3 filles qui entrent en dernier
4. avec les 3 filles qui entrent parmi les 5 premiers

PrO 11

Un facteur distribue 7 prospectus dans 10 boîtes aux lettres. De combien de façons peut-il le faire…

1. si chaque boîte ne peut contenir qu'un prospectus et les prospectus sont numérotés?
2. si chaque boîte ne peut contenir qu'un prospectus et les prospectus sont identiques?
3. si chaque boîte peut contenir tous les prospectus et les prospectus sont numérotés?
4. si chaque boîte peut contenir tous les prospectus et les prospectus sont identiques?

PrO 12

1. Déterminer le nombre de numéros de téléphone commençant par 06
2. Déterminer le nombre de numéros de téléphone commençant par 06 et composés de 10 chiffres distincts
3. Déterminer le nombre de numéros commençant par 06 et composée des chiffres 0,1,1,1,2,2,3,3,4,6

PrO 13

Dans une pièce, il y a 35 personnes

1. De combien de façons différentes peut-on les compter?
2. De combien de façons différentes si on commence toujours par la même personne?
3. De combien de façons différentes si on compte d'abord les 6 filles puis les 29 garçons?

PrO 14

On dispose de 10 jetons de scrabble portant les lettres de "A" à "J"

1. Combien de mots peut-on écrire avec ces 10 lettres?
2. Combien de mots peut-on écrire avec ces 10 lettres où "B", "A", "C" apparaissent dans cet ordre et côte à cô te?
3. Combien de mots peut-on écrire avec ces 10 lettres où "B", "A", "C" apparaissent dans cet ordre?
4. Combien de mots peut-on écrire avec ces 10 lettres où "B" précède "A",et "D" précède "C"?

PrO 15

On constitue un comité de 8 personnes choisies parmi 15 femmes et 12 hommes

1. Combien y a t-il de comités possibles?
2. Combien de comités , si le comité contient 4 hommes et 4 femmes?
3. Combien de comités , si le comité contient au moins 2 femmes?

PrO 16
On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes usuel (7,8,9,10,V,D,R,As) en 4 couleurs (Carreau, Coeur, Trèfle, Pique) Combien y a -t-il de tirages possibles vérifiant les conditions suivantes

1. aucune condition
2. Il y a exactement 2 rois parmi les 5 cartes tirées
3. Il y a au moins un Pique parmi les cartes tirées
4. Il y a un As et deux Carreaux parmi les cartes tirées
5. Il n'y a pas de cartes en dessous du 9 parmi les cartes tirées
6. Il y a deux paires (mais pas de brelan ni de carré)
7. Les cinq cartes tirées sont de la même couleur
8. Les cinq cartes tirées forment une quinte flush (5 cartes qui se suivent dans la même couleur)

PrO 17
Justifier la propriété : pour n et p entiers tels que $n \geq p$, $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$

PrO 18
Soit n un entier.

1. Donner une expression simple de $A = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$, $\quad B = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ $\quad$ et $\quad C = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$
2. Montrer que $D = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n.2^{n-1}$ de deux manières différentes
   - En simplifiant $k \binom{n}{k}$
   - En considérons la dérivée de $f(x) = (1+x)^n$
3. Montrer que $E = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} = n.(n-1)2^{n-2}$ de deux manières différentes
   - En simplifiant $k(k-1) \binom{n}{k}$
   - En considérons la dérivée seconde de $f(x) = (1+x)^n$

   et en déduire $F = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$

PrO 19
Une équipe est composée de $p \geqslant 3$ joueurs que l'on sélectionne parmi $n \geqslant p$ candidats.

1. Combien y-a-t-il d'équipes avec 2 capitaines?
2. Combien y-a-t-il d'équipes avec un capitaine et un vice-capitaine?

Probabilité

PrO 20 (démo de cours: sous-additivité (probabilité d'une union a priori non disjointe))
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dévènements de $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé.

1. cas fini : pour tout entier n, on a $P(\bigcup_{k=0}^{n} A_k) \leq \sum_{k=0}^{n} P(A_k)$
2. cas infini : **Si** la série $\sum_{k\geq 0} P(A_k)$ converge **alors** on a $P(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} P(A_k)$

PrO 21
Soient A et B deux évènements, montrer que $P(A \cup B) + P(A \cup \overline{B}) + P(\overline{A} \cup B) + +P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 3$

PrO 22
Soit $(\mathbb{N},\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé.
Montrer que l'on a toujours $\lim\limits_{n\to\infty} P(\{n\}) = 0$

PrO 23
4 urnes contiennent des boules:

- l'urne 1 contient 3 rouges, 2 blanches et 3 noires
- l'urne 2 contient 4 rouges, 3 blanches et 1 noire
- l'urne 3 contient 2 rouge, 1 blanche, 1 noire
- l'urne 4 contient 1 rouge, 6 blanches, 2 noires

On choisit, de manière équiprobable, une urne et de celle-ci on extrait une boule toujours au hasard

1. Calculer la probabilité que cette boule ne soit pas blanche
2. Si la boule est blanche, quelle est la probabilité qu'elle ait été tirée dans l'urne 3?

PrO 24
Dans un lot de 100 dés à 6 faces, 20 dés sont truqués de la façon suivant: la face 6 est tirée la moitié du temps, et les autres faces apparaissent avec la même probabilité. On choisit un dé au hasard et on le lance.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6?
2. On obtient un 6. Quelle est la probabilité que le dé soit truqué?
3. On obtient un 2. Quelle est la probabilité que le dé soit non truqué?

PrO 25
Les fonctions suivantes définies sur les singletons définissent-elles des probabilité sur Ω?

1. $\Omega = \{0,\dots,N\}$ et $P(\{n\}) = \binom{N}{n}(-1)^n 2^{N-n}$ $\quad$ ($N \geqslant 2$ fixé)
2. $\Omega = \{1,\dots,2N\}$ et $P(\{n\}) = \dfrac{1}{N}.|1-\dfrac{n}{N}|$ $\quad$ ($N \geqslant 2$ fixé)
3. $\Omega = \mathbb{N}$, $P(\{n\}) = \dfrac{2}{3^{n+1}}$
4. $\Omega = \mathbb{N}^*$, $P(\{n\}) = \dfrac{1}{n(n+1)}$

PrO 26
On considère $\Omega = \mathbb{N}^*$ muni de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$.
Pour tout entier i non nul on pose $P(\{i\}) = \dfrac{1}{i^2+i}$.
Vérifier que P est bien un probabilité sur Ω

PrO 27
On considère $\Omega = \mathbb{N}^*$ muni de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$.
Soit $c \in]0,1[$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On pose pour tout entier i non nul, $P(\{i\}) = \lambda.\dfrac{c^i}{i}$.
Déterminer une CNS sur λ pour que P soit une probabilité sur Ω

PrO 28
On dispose d'une urne contenant une boule blanche.
On joue indéfiniment à pile ou face avec une pièce parfaite.
A chaque fois qu'on obtient face, on ajoute une boule noire dans l'urne, la première fois qu'on obtient pile, on tire une boule de l'urne (Si on n'obtient jamais pile, on ne tire aucune boule de l'urne). Montrer que la probabilité d'obtenir une boule blanche vaut $\ln 2$.

PrO 29
On se place dans un univers fini Ω muni d'une probabilité P.

1. Soit 2 évènements A et B indépendants tels que $A \subset B$. Montrer que $P(A) = 0$,ou $P(B) = 1$
2. Montrer que si A est indépendant de lui-même alors $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$
3. Montrer que si $P(A) = 0$ alors A est indépendant de tout évènement. Etudier la réciproque.
4. Même question avec $P(A) = 1$

PrO 30
On lance un dé à cinq faces. On note p_n la probabilité que la somme des résultats des n premiers lancers soit paire. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n. En déduire p_n en fonction de n.
(On pourra noter A_n l'événement "la somme des n premiers lancers est paire")

PrO 31 (il n'existe pas de probabilité uniforme sur un univers dénombrable)
Soit Ω un univers dénombrable: $\Omega = \{\omega_i / i \in \mathbb{N}\}$.
On suppose qu'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que $\forall i \in \mathbb{N}, P(\{\omega_i\}) = q$.
Expliquer pourquoi $q = 0$ et aboutir à une contradiction.

PrO 32
On considère $n \geqslant 2$ personnes un peu sourdes qui se transmettent une information binaire I (du type "oui" ou "non"). La première personne reçoit l'information, la transmet à la deuxième personner, qui la transmet à la troisième et ainsi de suite jusqu'à la $n-$ième personne. Chacun d'eux transmet ce qu'il a entendu avec la probabilité $p \in]0,1[$, et le contraire avec la probabilité $q = 1 - p$

1. Calculer la probabilité p_n que la n-ième personne reçoive la bonne information
2. Que se passe-t-il lorsque $n \to \infty$?

PrO 33
On lance successivement une pièce qui donne pile avec la probabilité p et face avec la probabilité $q = 1-p$.
On note B_n l'événement "on obtient deux piles d'affilée pour la première fois au rang n, P_i l'événement "on obtient pile au rang i et F_i l'événement "on obtient face au rang i

1. Montrer que $P(B_n) = q.P(B_n|F_1) + pq.P(B_n|P1_{\cap}F_2) + p^2.P(B_n|P_1 \cap P_2)$
2. On pose $u_n = P(B_n)$. Déterminer u_1 et u_2. Déterminer une relation de récurrence d'ordre 2 vérifiée par (u_n)
3. (a) En calculant $Q(\pm 1)$ et $Q(0)$ montrer que les racines de $Q = X^2 - pX - pq$ sont dans $]-1,1[$
   (b) Montrer qu'il existe 4 réels (A,B,r_1,r_2) tels que $\forall n \geqslant 0, u_n = A.r_1^n + B.r_2^n$.
   Que peut-on dire à propos de r_1 et r_2?
4. En déduire que $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n\right) = 1$

PrO 34
Une urne contient $2n$ boules : n noires et n blanches . On tire successivement et sans remise n boules de l'urne. On note B_i l'évènement "la i-ième boule tirée est blanche"

1. Quelle est la probabilité de ne tirer que des boules blanches?
2. On suppose que n est pair(on note $n = 2k$) .Quelle est la probabilité de tirer en alternance une boule blanche, puis une une noire , en commençant par une blanche?
3. Quelle est la probabilité de ne tirer qu'une boule blanche?

PrO 35
Soit l'univers $\Omega = \{1, \ldots, 2N\}$. Peut-on trouver deux réels a et b tels que $\forall n \in \Omega, \quad P(\{n\}) = an + b$ définisse une loi de probabilité et que $P(\{1, \ldots, N\}) = \dfrac{1}{4}$?

PrO 36
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements tel que $P(A_{n+1}) = \dfrac{2}{n+1}P(A_n)$ pour tout $n \geqslant 0$

1. Exprimer $P(A_n)$ en fonction de n et de $P(A_0)$
2. Donner la valeur de $P(A_0)$ *(on doit trouver e^{-2})*

PrO 37 (système quasi complet d'événements)
On considère une suite d'événements $(A_n)_{n\geqslant 1}$ que vérifie les propriétés suivantes:

i) *les évènements sont 2 à 2 disjoints :* $\forall i \neq j, \quad A_i \cap A_j = \emptyset$

ii) $P(\bigcup\limits_{n\geqslant 1} A_n) = 1$

(remarque: un tel système est appelé un système quasi complet d'événements)

1. A-t-on $\bigcup\limits_{n\geqslant 1} A_n = \Omega$?
2. On note $A_0 = \overline{\bigcup\limits_{n\geqslant 1} A_n}$. Montrer que $P(A_0) = 0$
3. Justifier que $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est un système complet d'événements
4. Prouver que pour tout événement B on a $P(B) = \sum\limits_{n=\boxed{1}}^{\infty} P(B \cap A_n) = \sum\limits_{n=\boxed{1}}^{\infty} P(A_n)P_{A_n}(B)$

PrO 38
On considère un triangle de sommets A, B et C.
Un kangourou effectue des sauts qui l'amènent toujours d'un sommet à un autre. Lorsqu'il est en un sommet, il a la même probabilité de sauter indifféremment sur l'un des deux autres sommets libres. Au départ, il est en A.
Déterminer la probabilité que le kangourou soit de nouveau en A après n sauts.

1. en introduisant les événements $A_n\,[B_n, C_n]$ "le kangourou est en $A\,[B, C]$ après n sauts." et en déterminant une relation de récurrence entre $P(A_{n+1})$ et $P(A_n)$
2. en considèrant la variable aléatoire X_n qui vaut 1 si le kangourou est au sommet A après n sauts, qui vaut 2 s'il est au sommet B après n sauts et 3 s'il se trouve au sommet C.

PrO 39
On considère l'univers $\Omega = \{a,b,c,d\}$ et les 3 évènements : $E = \{a,d\}, \quad F = \{a,b,c\}, \quad G = \{b,d\}$.
On demande de trouver si elle existe , une probabilité sur Ω telle que

1. $P(E) = 0.5, \quad P(F) = 0.9, \quad P(G) = 0.4$
2. $P(E) = 0.6, \quad P(F) = 0.8, \quad P(G) = 0.7$
3. $P(E) = P(F) = P(G)$

PrO 40
Un individu est choisi au hasard dans une population contenant une proportion $p \in]0,1]$ de tricheurs.
On fait tirer une carte dans un jeu de 52 cartes à cet individu. On admet que si cette personne est un tricheur alors elle tire à coup sûr un as. Si ce n'est pas un tricheur, la carte est sélectionnée parmi les 52 cartes de manière équiprobable.

1. Quelle est la probabilité qu'un individu tire un as?
2. Effectivement, cette personne tire un as, quelle est la probabilité que cette personne soit un tricheur?
3. On fait tirer n fois avec remise une carte dans le jeu de 52 cartes à une même personne. La personne tire à chaque fois un as. Quelle est la probabilité que cette personne soit un tricheur?

PrO 41

1. Soient $A_1, \dots, A_N$ N évènements mutuellement indépendants.
   Montrer que $P(A_1 \cup \cdots \cup A_N) = 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2) \dots (1 - P(A_N))$
2. Aux fléchettes, à chaque coup, un joueur atteint sa cible avec une probabilité de 0.04.
   On suppose les lancers indépendants.
   Combien doit-il faire d'essais pour atteindre la cible avec une probabilité supérieure à 0.95?
   (on trouvera 74)

PrO 42

Soit $(A_n)_{n\geqslant 0}$ une suite (dénombrable) d'événements mutuellement indépendants.

On va montrer que $P(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=0}^{n} P(A_k)$

On note pour tout entier $n, B_n = \bigcap\limits_{k=0}^{n} A_k$

- Que sait-on de la suite $(B_n)_{n\geqslant 0}$
- Exprimer $P(B_n)$ en fonction des probabilités des événements de la famille $(A_n)_{n\geqslant 0}$
- Conclure

PrO 43 (crible de Poincaré (né à Nancy le 29 avril 1854))

Soient A, B, C et D quatre ensembles.

Dans cet exercice le cardinal est noté $|.|$.

On rappelle que si A et B sont deux ensembles alors $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

1. Montrer que

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C \cup D| =& |A| + |B| + |C| + |D| \\ & - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| \\ & + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| \\ & - |A \cap B \cap C \cap D|\end{aligned}$$

2. Application:
   On lance n fois de suite un dé à 4 faces (notées $1, 2, 3$ et 4)
   (a) Quel est le nombre de tirages possibles?
   (b) On note
   - A l'ensemble des tirages où le 1 n'apparait pas
   - B l'ensemble des tirages où le 2 n'apparait pas
   - ...

   Déterminer $|A|$, puis $|A \cap B|$ puis $|A \cap B \cap C|$ et enfin $|A \cap B \cap C \cap D|$
   Puis montrer que $|\overline{A \cup B \cup C \cup D}| = 4^n - 4.3^n + 6.2^n - 4$
   (c) Déterminer la probabilité, noté p_n, qu'au cours de n tirages les 4 faces apparaissent au moins chacune une fois.
   (d) Déterminer $\lim p_n$, puis, à l'aide de la calculatrice, ou d'un programme Python, déterminer le plus petit entier n tel que $p_n \geqslant 0.9$

PrO 44
On dispose d'une urne A contenant deux boules rouges et une boule noire, et d'une urne B contenant deux boules noires et une boule rouge. On effectue un premier tirage dans l'urne A en y extrayant une boule: on note sa couleur et on la remet dans A. Si cette boule est rouge, on effectue deux tirages successifs d'une boule avec remise dans l'urne A. Si elle est noire, les deux tirages successifs avec remise ont lieu dans l'urne B.
On appelle ces deux tirages 2 et 3.

1. Déterminer les probabilités des événements suivants:
   (a) Le tirage 2 a amené une boule noire
   (b) Le tirage 3 a amené une boule noire
   (c) Les tirages 2 et 3 ont amené à chaque fois une boule noire
2. On suppose que le second tirage a amené une boule noire. Quelle est la probabilité pour que le troisième tirage amène une boule noire?
3. Quelle est la probabilité pour que le premier tirage ait amené noir si les deux derniers ont amené noir?

PrO 45
On dispose de 2 pièces: la pièce A donne face avec la probabilité $1/2$, la pièce B donne face avec la probabilité $2/3$
On choisit une pièce au hasard. On la lance. Si l'on obtient face, on conserve la pièce que l'on vient de lancer, sinon on change de pièce. On effectue ainsi une suite de lancers.

1. On note p_n la probabilité de jouer avec la pièce A au n-ième lancer.
   Calculer p_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
2. En déduire la probabilité d'obtenir face au n-ième lancer

PrO 46
On effectue n tirages dans une urne contenant le même nombre de boules blanches que de boules rouges.
Soit A l'événement "on tire au moins deux rouges" et B l'événement "on tire des boules des deux couleurs"
Montrer que A et B sont indépendants ssi $n = 3$

PrO 47
Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n.
On pioche une poignée de jetons qui contient un nombre aléatoire de jetons (éventuellement, notre poignée peut contenir... zéro jeton!)
On note A, [resp. B] l'événement "le numéro 1 [resp. 2] figure dans notre pioche"
On demande de calculer $P(A)$ et de dire si A et B sont indépendants dans chacune des hypothèses suivantes

1. On suppose qu'il y a équiprobabilité sur le nombre de jetons tirés (càd que la probabilité de tirer un jeton est égale à la probabilité de tirer 2 jetons qui est égale à la probabilité de tirer 3 jetons... qui est égale à la probabilité de tirer n jetons.)
   On devra trouver $P(A) = \dfrac{1}{2}$ *et* $P(A \cap B) = \dfrac{1}{3}$
2. On suppose qu'il y a équiprobabilité sur toutes les pioches possibles. *On devra trouver* $P(A) = \dfrac{1}{2}$ *et* $P(A \cap B) = \dfrac{1}{4}$

PrO 48
Considérons une file d'attente de $2n$ personnes (avec $n \geqslant 2$ fixé).
Il y a un nombre de femmes que l'on suppose équiprobablement réparti entre n et $2n$(c'est à dire que pour tout $k \in [\![n,2n]\!]$ la probabilité d'avoir k femmes dans la file d'attente est une constante indépendante de k) On choisit une personne au hasard.
On note $F_k =$" il y a k femmes dans la file" et $F =$"la personne choisie est une femme"

1. Déterminer $P(F_k)$ pour tout $k \in [\![n,2n]\!]$
2. Quelle est la probabilité $P(F)$?
3. On sait que la personne choisie est une femme, quelle est la probabilité que la file ne soit constituée que de femmes?

PrO 49
Un feu bicolore, lorsqu'il est rouge à un instant donné, passe au vert à l'instant suivant avec la probabilité p, et lorsqu'il est vert passe au rouge avec la probabilité q. On suppose que p et q sont deux réels de $]0,1[$.
On note r_n [v_n] la probabilité que ce feu soit rouge [vert] à l'instant $t = n$. On suppose que $r_0 + v_0 = 1$

1. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A.\begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix}$
2. En déduire r_n et v_n en fonction de n puis calculer leurs limites.

PrO 50
A chaque instant, un système ayant 3 états (A,B,C) peut changer d'état, selon la règle

- de A, il passe en B avec la probabilité $1/3$ ou en C avec la probabilité $2/3$
- de B, il passe en A avec la probabilité $1/3$, en C avec la probabilité $1/3$ ou reste en B avec la probabilité $1/3$
- de C, il passe en B avec la probabilité $1/3$ ou en A avec la probabilité $2/3$

Pour tout entier naturel n, on note A_n [B_n, C_n] l'événement " le système est dans l'état A [B, C] à l'instant n"
On note $a_n = P(A_n), b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$

1. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que $\forall n \geqslant 0, a_{n+1} = \dfrac{1}{3}b_n + \dfrac{2}{3}c_n$
2. Exprimer de même b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n
3. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les réels a_n, b_n et c_n en fonction de a_0, b_0, c_0 et n
4. On suppose que $b_0 = \dfrac{1}{3}$. Montrer que pour tout n les événements B_n et B_{n+1} sont indépendants
5. On note T_n l'événement "le système passe à l'état B pour la première fois à l'instant n
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P(T_n) = \dfrac{1}{3}.\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$
   (b) Calculer $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P(T_n)$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nP(T_n)$

PrO 51
On lance une pièce équilibrée n fois ($n \geqslant 2$). Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, A_k désigne l'événement "on obtient pile au k-ième lancer. Soit A_{n+1} l'événement " le nombre de pile obtenus au bout des n lancers est pair"

1. Déterminer la probabilité de chaque événement A_k avec $1 \leqslant k \leqslant n+1$
2. (a) Déterminer $P(\bigcap\limits_{k=1}^{n+1} A_k)$
   (b) En déduire que les événements $A_1, \ldots, A_{n+1}$ ne sont pas mutuellement indépendants
3. Montrer que toute sous-famille de n événements choisis parmi $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$ est formée d'événements mutuellement indépendants

PrO 52

Une urne contient a boules blanches et b boules rouges, pour un total de $N = a + b$ boules. On la vide en tirant une à une et sans remise les boules. On note A_k lévènement "la deuxième boule blanche est sortie au k-ième tirage"

1. Donner i et j deux entiers tels que la famille $(A_k)_{i \leqslant k \leqslant j}$ soit un système complet d'évènements
2. Calculer $P(A_2), P(A_3)$ puis $P(A_k)$ pour $k \in [\![2, b+2]\!]$
3. En déduire $\sum_{k=2}^{b+2} (k-1) \binom{a+b-k}{a-2} = \binom{a+b}{a}$

PrO 53

Une urne contient a boules blanches et b boules noires, pour un total de $N = a + b$ boules. On effectue une série de tirages de la manière suivante : on choisit une boule au hasard dans l'urne. Si elle est blanche , on la remet. Si elle est noire, on la remplace par une boule blanche. Puis on procède au tirage suivant.

1. On note N_j l' évènement : " on tire une boule noire au j-ième tirage " et A_n l'évènement "on obtient pour la première fois une boule blanche au n-ième tirage"
   Exprimer A_n en fonction des N_j, en déduire $P(A_n)$
2. On note B_l l'évènement "il reste l boules noires dans l'urne lorsqu'on obtient la première boule blanche"
   (a) Montrer que pour $1 \leq l \leq b$, $P(B_l) = \frac{b!}{N^b}\left(\frac{N^l}{l!} - \frac{N^{l-1}}{(l-1)!}\right)$
   (b) Calculer $P(B_0)$
   (c) Vérifier que $\sum_{k=0}^{b} P(B_k) = 1$

PrO 54

Soit α et λ deux réels strictement positifs.
Jacqueline part à la chasse aux coléoptères.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'événement "Jacqueline rencontre n coléoptères".
On suppose que $\forall n \geqslant 0, P(A_n) = e^{-\lambda}.\frac{\lambda^n}{n!}$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note B_k l'événement "Jacqueline rencontre k coccinelles".
On suppose que $P(B_k|A_n) = \binom{n}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$

1. Vérifier que $\sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) = 1$.
2. Justifier que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements
3. Déterminer $P(B_k)$ pour $k \in \mathbb{N}$

PrO 55

Eric décide de jouer à Pile ou Face suivant la règle suivante: s'il arrive un moment où il obtient 2 Pile de plus que de Face alors il se déclare vainqueur; en revanche s'il arrive un moment où il obtient 2 Face de plus que de Pile, il se déclare perdant.

1. Quelle est la probabilité que la partie dure au moins $2n$ lancers?
2. Quelle est la probabilité que Claude s'autocongratule?

PrO 56

Deux archers A_1 et A_2 disputent un match. Les archers tirent successivement sur une cible jusqu'à ce que l'un d'eux la touche. A_1 tire en premier. On note $p_i \in]0,1[$ la probabilité que l'archer A_i touche la cible. On note G_i l'événement "l 'archer A_i gagne". Les tirs sont supposés indépendants

1. Calculer la probabilité que A_1 l'emporte au rang $2n+1$, pour $n \in \mathbb{N}$
2. Calculer la probabilité que A_2 l'emporte au rang $2n+2$, pour $n \in \mathbb{N}$
3. En déduire $P(G_1)$ et $P(G_2)$ ainsi que la probabilité que le jeu ne finisse jamais
4. Montrer que $P(G_1) = P(G_2)$ ssi $p_2 = \dfrac{p_1}{1-p_1}$

PrO 57

Deux joueurs A et B jouent. A lance deux fois une pièce équilibrée.
B ne lance qu'une fois une pièce qui fait « pile » avec la probabilité p. Le gagnant est celui qui fait le plus de « faces ». Tant qu'il y a égalité, ils rejouent.

1. Quelle est la probabilité qu'il y ait égalité au premier tour ?
2. Quelle est la probabilité que A gagne le jeu ?
3. Existe-t-il un p tel que le jeu soit équitable ?

PrO 58

On dispose de 2 pièces de monnaie : la pièce A amène Pile avec la probabilité $a \in]0,1[$ et la pièce B amène pile avec la probabilité $b \in]0,1[$. On commence par choisir au hasard, de manière équiprobable, une des deux pièces. Puis on effectue le premier lancer avec cette pièce. Si l'on obtient Pile, on conserve la même pièce, sinon on la change. Et on effectue suivant le même principe des lancers...On obtient ainsi une suite infinie de lancers.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les événements

- V_n : "on utilise la pièce A pour la première fois au $n-$i-ème lancer
- U_n : "on a obtenu n Piles lors des n premiers lancers"

1. Calculer $P(V_n)$ et $P(U_n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
2. Calculer $P(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n)$.
3. Pour $N \geqslant 1$ fixé, calculer $P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n)$
4. Calculer $P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V_n)$.

PrO 59

A et B jouent avec deux dés non truqués. A gagne si la somme des dés est 6 et B gagne si la somme des deux dés est 7. La partie se termine si un des deux joueurs gagne.

1. Quelle est la probabilité pour que A gagne au n-ième coup?
2. Quelle est la probabilité p_n pour que A gagne en n coups maximun?
3. Quelle est la probabilité q_n pour que B gagne en n coups maximun?
4. Montrer que la probabilité que la partie ne se termine pas est nulle.

(on introduira tous les événements utiles à la résolution)

Variables aléatoires

PrO 60
On considère une va discrète X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 3.P(X = n + 2) = 4.P(X = n + 1) - P(X = n)$$

1. Déterminer la loi de X
2. Déterminer $P(X^2 - X - 6 \geqslant 0)$
3. X admet-elle une espérance? Une variance? Si oui, les calculer!
   (On pourra considérer $Y = X + 1$)

PrO 61
Une urne contient p boules numérotées de 1 à p. On tire une boule au hasard et on note X son numéro. On replace cette boule dans l'urne et on échange toutes les boules qui ont un numéro strictement inférieur à X par une boule de numéro X (l'urne conserve le même nombre de boules). On recommence cette procédure n fois. X_n est le numéro de la boule obtenue au n-ième tirage.

1. Trouver la loi de X_1.
2. Montrer que $P(X_2 = k) = \dfrac{2k-1}{p^2}$ pour $k \in \{1, \dots, p\}$ (On pourra utiliser le SCE lié à X_1)
3. Montrer que $P(X_{n+1} = p) = \dfrac{p-1}{p} P(X_n = p) + \dfrac{1}{p}$
4. En déduire $P(X_n = p)$

PrO 62
Soit $n \geqslant 2$ un entier fixé.
Une assemblée est composée de n garçons (notés $g_1, g_2, \dots, g_n$) et de n filles (notées $f_1, f_2, \dots, f_n$). Chaque garçon choisit au hasard une fille (indépendamment du choix des autres garçons) et lui envoie une carte d'invitation à une soirée.
On note X_i la variable de Bernoulli égale à 1 si et seulement si la fille f_i est invitée.
On note X la variable aléatorie égale au nombre de filles invitées

1. Donner la loi de X_i et $E(X)$
2. On note Y le nombre de filles invitées plusieurs fois, Z_i le nombre d'invitations reçues par la fille f_i et Y_i la variable de Bernoulli égale à 1 si et seulement si la fille f_i est invitée plusieurs fois.
   Déterminer la loi de Z_i, la loi de Y_i . En déduire $E(Y)$

PrO 63
On lance n fois un dé équilibré à six faces.
On note X le nombre de numéros différents sortis
Pour $i \in \{1, \dots, 6\}$, on note X_i la variable de Bernoulli qui vaut 1 si le numéro i est sorti

1. Déterminer la loi de X_i
2. Ecrire X sous forme d'une somme de variables aléatoires et en déduire son espérance
3. Pour $i \neq j$ calculer
   (a) $P(X_i = 0 \text{ et } X_j = 0))$. Les variables X_i et X_j sont elles indépendantes?
   (b) $P(X_i = 1 \cap X_j = 0)$, puis $P(X_i = 1 \cap X_j = 1)$

PrO 64

Un jeune homme écrit à une jeune fille au cours d'une année non bissextile. Il lui écrit à coup sûr le jour de l'an (le premier janvier) puis s'il lui a écrit le jour j, il lui écrit le jour $j+1$ avec la probabilité $\frac{1}{2}$, s'il ne lui a pas écrit le jour j, il lui écrit à coup sûr le lendemain.

On note X_j la variable de Bernoulli qui vaut 1 s'il écrit à la jeune fille le jour j et 0 sinon.

1. Trouver une relation entre $P(X_{i+1}=1)$ et $P(X_i=1)$
2. En déduire la loi de X_j
3. Soit X la variable égale au nombre de lettres envoyées. Donner $E(X)$

PrO 65

On dispose de deux boîtes A et B. La boîte A contient 4 boules rouges et 7 boules vertes.

La boîte B contient 6 boules rouges et 5 boules vertes.

On choisit une boîte au hasard puis une poignée de 3 boules dans celle-ci.

Soit$X$ le nombre de boules rouges obtenues.

Déterminer la loi de X puis son espérance.

PrO 66

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit des réels $(p_i)_{1\leq i\leq 2n-1}$ par

$\forall i \in \{1,\ldots,n\}, \quad p_i = a.i$ et $\forall i \in \{1+n,\ldots,2n-1\}, \quad p_i = a.(2n-i)$ où a est un nombre réel fixé

1. Pour quelle valeur de a ces réels définissent-ils la loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\{1,\ldots,2n-1\}$?

   On suppose désormais que a est égal à cette valeur
2. Démontrer que X et $Y = 2n - X$ ont la même loi . En déduire $E(X)$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\quad \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\quad \sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
4. Calculer $E(X^2)$ en déduire V(X)

PrO 67

Un lapin se déplace de façon aléatoire sur un axe gradué. A l'instant 0, il est l̀'origine, et à chaque instant entier, il se déplace d'une unité vers la droite avec la probabilité p et d'une unité vers la gauche avec la probabilité $q = 1-p$. On note X_n son abscisse après n pas et D_n le nombre de pas vers la droite après n pas

1. Donner la loi de D_n, exprimer X_n en fonction de D_n
2. En déduire l'espérance et la variance de X_n. Pour quelle valeur de p, la variable X_n est-elle centrée?

PrO 68

On considère une assemblée de n personnes. Une urne contient toutes les listes non ordonnées d'une longueur quelconque(mais non nulle!),écrite avec les noms de ces n personnes.

Combien y a t-il de listes dans l'urne? *(pour $n = 2$, il y a donc 3 listes)*

On tire au hasard un papier et on appelle X la variable aléatoire égale au nombre de personnes figurant sur la liste.

1. Déterminer la loi de X
2. Calculer son espérance (*on trouvera* $\frac{n.2^{n-1}}{2^n-1}$)
3. Calculer sa variance

PrO 69
Initialement, une urne A contient 2 jetons numérotés 0 et une urne B contient 2 jetons numérotés 1.
A chaque coup, on échange un jeton pris au hasard dans A et un jeton pris au hasard dans B.
X_n est la somme des numéros des jetons de l'urne A aprés n échanges.
On note $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}$

1. Trouver une matrice M telle que $U_{n+1} = M.U_n$.
2. Diagonaliser M.
3. En déduire la loi de X_n

PrO 70
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ et d''efinies sue le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.
On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = X_n X_{n+1}$

1. Déterminer la loi de Y_n, son espérance et sa variance.
2. Soient $i < j$ deux entiers naturels distincts.
   Discuter suivant les valeurs de i et j de l'indépendances de Y_i et de Y_j.
3. Calculer $E(Y_i.Y_j)$ pour $i \leqslant j$

PrO 71
Une urne contient des boules de 3 types différents mais indiscernables au toucher.
Pour $i \in \{1,2,3\}$, on note p_i la proportion de boules de type i. On tire n boules au hasard et avec remise.
On note X_i le nombre de boules tirées de type i.

1. Donner la loi de X_i et sa variance
2. Montrer que X_i et X_j ne sont pas indépendantes
3. Donner la loi de $X_i + X_j$ pour $i \neq j$ et sa variance

PrO 72
Une urne contient des boules de 3 types différents mais indiscernables au toucher.
Il y a 4 boules du type 1, 5 boules du type 2 et 6 boules du type 3.
On tire 3 boules simultanément.
On note X_i le nombre de boules tirées de type i.

1. Donner la loi de $X_1 + X_2 + X_3$, son espérance et sa variance.
2. Donner la loi de X_1
3. Déterminer l'espérance et la variance de X_1
4. Montrer que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes
5. Donner la loi de $X_1 + X_2$

PrO 73
On lance deux dés à six faces parfaitement équilibrés.
On note X le numéro le plus petit et Y le numéro le plus grand.

1. Déterminer la loi de Y et celle de X
2. Calculer $E(X), E(Y), V(X), V(Y)$

PrO 74 (utilisation du théorème de tranfert ou calcul de la loi)
Soit X une v.a. qui suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.
On note $Y = (-1)^X$ et $Z = \dfrac{Y+1}{2}$
Déterminer les espérances et variances de Y et Z

PrO 75 (résultats immédiats en percevant l'espérance comme une moyenne)
Montrer les résultats suivants:

1. Si X est la var constante égale à c alors $E(X) = c$
2. Si X est une var pour laquelle il existe un réel c tel que $P(X = c) = 1$ alors $E(X) = c$
3. s'il existe $(m,M) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall \omega \in \Omega, m \leqslant X(\omega) \leqslant M$ alors $m \leqslant E(X) \leqslant M$

PrO 76 (démo de cours)
Soit X une v.a.r.d
On dit que la variable aléatoire X est presue sûrement constante lorsque $\exists c \in \mathbb{R}$ tel que $P(X = c) = 1$

1. Montrer que si X est presque sûrement constante alors $V(X) = 0$
2. Montrer la réciproque

PrO 77
Un compteur devrait afficher les valeurs d'une variable aléatoire X suivant une loi $\mathcal{B}(n,p)$.
Mais lorsque X est nulle, il affiche un nombre au hasard entre 1 et n.
Lorsque X est non nulle, il affiche bien X.
On note Y la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre affiché par le compteur.
Déterminer la loi de Y, ainsi que son espérance et sa variance.

PrO 78
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Déterminer l'espérance de $Y = \dfrac{1}{X+1}$

PrO 79 (l'indépendance deux à deux n'implique pas la mutuelle indépendance)
Soient X et Y deux variables indépendantes qui suivent la même loi uniforme $\mathcal{U}(\{-1, +1\})$.
On considère la v.a $Z = XY$
Montrer que X, Y et Z sont des variables indépendantes deux à deux, mais qu'elles ne sont pas mutuellement indépendantes.

PrO 80
Soient $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des variables mutuellement indépendantes qui suivent la même loi $\mathcal{U}([\![1,N]\!])$.
On note $M = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
Pour tout $k \in [\![1,N]\!]$ déterminer $P(M \geqslant k)$ puis la loi de M

PrO 81 (démo de cours: espérance et variance pour la loi binomiale)
Montrer que si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ alors $E(X) = n.p$ et $V(X) = n.p.q$

PrO 82

1. Montrer que $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ est une série convergente et calculer sa somme.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$.
   On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall n \geqslant 1, P(X = n) = \dfrac{a}{n(n+1)(n+2)}$
   (a) Déterminer a
   (b) Montrer que X est d'espérance finie et donner $E(X)$
   (c) La variable aléatoire $Y = (-1)^X.X^2$ possède-t-elle une espérance?

PrO 83
Montrer que si une var X est bornée, alors elle est d' espérance finie . Plus précisément, montrer que s'il existe $(m,M) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall \omega \in \Omega, m \leqslant X(\omega) \leqslant M$ alors $m \leqslant E(X) \leqslant M$

PrO 84

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. On considère $Y = (-1)^X$ et $Z = \dfrac{1}{(X+1)(X+2)}$

1. Montrer que Y et Z admettent des espérances finies
2. Déterminer l'espérance de Y et celle de Z en utilisant le théorème de transfert
3. Déterminer la loi de Y, puis retrouver son espérance

PrO 85 (un exemple de var. d'espérance non finie)

Une urne contient initialement une boule blanche et une noire. On effectue des tirages dans cette urne, en remettant après chaque tirage la boule tirée, et en ajoutant une nouvelle boule de la même couleur que la boule tirée. On note X le nombre de tirages nécessaires avant de tirer une boule blanche.
Déterminer la loi de X. Est-elle d'espérance finie?

PrO 86

On considère une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall n \geqslant 1, P(X = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$

et une v.a. Y telle que $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $G_Y(t) = \dfrac{t + (1-t)\ln(1-t)}{t}$ pour $t \neq 0$

1. Déterminer $G_Y(0)$
2. Déterminer $G_X(t)$
3. Que dire de X et Y?

PrO 87

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
Par la méthode de votre choix, déterminer $E((X-3)^2)$ et $E(\frac{1}{X})$

PrO 88

Soit X une va à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice: $G_X(t) = \dfrac{t}{2-t^2}$ pour tout $t \in]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$
(on suppose que chaque événement élémentaire est de probabilité non nulle)
Déterminer la loi de X. Reconnaître la loi de $Y = \dfrac{1}{2}(X+1)$. En déduire $E(X)$ et $V(X)$

PrO 89

Soient $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ deux var indépendantes. Déterminer la loi X conditionnelle à $X+Y = k$.
On devra trouver $\mathcal{B}(k, \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu})$

PrO 90

On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n.
La boîte k renferme k boules numérotées de 1 à k.
On choisit au hasard une boîte puis une boule dans cette boîte.
On note X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

1. Donner $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ ainsi que la loi de X.
2. Pour $(k,j) \in [\![1,n]\!]^2$ déterminer $P_{X=k}(Y = j)$
3. Calculer $P(X = Y)$
4. Donner la loi de Y et calculer son espérance *(on trouvera* $E(Y) = \dfrac{n+3}{4}$*)*

PrO 91
On lance un dé équilibré à 6 faces. On note X la va égale au nombre de lancer pour obtenir le 1.

1. Donner la loi de X.
2. Le 1 n'est pas sorti lors des 100 premiers lancers: quelle est la probabilité qu'il sorte la première fois lors du 111 ème lancer? Comparer avec $P(X=11)$

PrO 92 (répétitions d'un nombre fini d'expériences identiques indépendantes)
On réalise n expériences indépendantes de type Succès-Echec de même probabilité de succès p. On note Y le nombre de succès obtenus, et X le rang du premier succès (et $X=0$ au cas où aucun succès n'est observé). Donner les lois de X et de Y.

PrO 93 (répétitions d'un nombre infini d'expériences identiques indépendantes)
On réalise une infinité d'expériences indépendantes de type Succès-Echec de même probabilité de succès p(schéma de Bernoulli). On note X le rang du premier succès (et $X=0$ au cas où aucun succès n'est observé). Donner la loi de X .

PrO 94

1. Soient $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$ deux var indépendantes . Montrer que $X+Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n+m,p)$
2. Soient $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$ deux var indépendantes. Chercher la loi de $X|(X+Y=k)$
3. Soient $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ deux var indépendantes. Chercher la loi de $X|(X+Y=k)$

On sera peut être amené à utiliser <u>*la formule de Vandermonde*</u>*: soient* m *et* n *deux entiers,* p *un entier inférieur à* $\min(m,n)$*. alors on a* $\binom{m+n}{p} = \sum\limits_{k=0}^{p} \binom{m}{k} \cdot \binom{n}{p-k}$

PrO 95 (classique mais. . . peu représentatif)
On lance deux dés à six faces truqués distinguables.
On note $X_1[X_2]$ le numéro du premier [second], ainsi que $Y = X_1 + X_2$.
On va montrer par l'absurde qu'il n'est pas possible de truquer les 2 dés de manière à ce que Y suive une loi uniforme .
On suppose que $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([\![2,12]\!])$

1. Expliquer pourquoi il existe $(a_1 \dots, a_6) \in \mathbb{R}^6$ et $(b_1 \dots, b_6) \in \mathbb{R}^6$ tels que
$$G_{X_1}(t) = t.(a_1 + a_2 t + \cdots + a_6 t^5) \overbrace{=}^{def} t.Q_1(t) \quad \text{et} \quad G_{X_2}(t) = t.(b_1 + b_2 t + \cdots + b_6 t^5) \overbrace{=}^{def} t.Q_2(t)$$
2. (a) Montrer que $a_1.b_1 = a_6.b_6 = \dfrac{1}{11}$
   (b) Montrer que Q_1 est un polynôme de degré 5 à coefficients réels qui possède au moins une racine réelle différente de 0 et 1
3. Donner $G_Y(t)$ et expliquer à quoi est égal $G_{X_1}(t).G_{X_2}(t)$
4. Justifier que $\forall t \notin \{0,1\}, \dfrac{1-t^{11}}{1-t} = 11.Q_1(t).Q_2(t)$
5. Etablir une contradiction avec la question 2.

PrO 96
Soient A, B et C trois événements indépendants.
On note $X = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C$
Calculer $E(X), E(X^2)$ ainsi que la loi de X

PrO 97 (fonction indicatrice d'un évènement)
Soit un espace probabilisé fini (Ω,P) . On appelle indicatrice d'un évènement A , la variable alátoire χ_A définie par $\forall \omega \in \Omega, \quad \chi_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ et $\chi_A(\omega) = 0$ sinon

1. Vérifier que si A et B sont deux évènements
$$X_{A\cap B} = \chi_A.\chi_B, \quad \chi_{\overline{A}} = 1 - \chi_A, \quad X_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A.\chi_B$$
2. Démontrer que $E(\chi_A) = P(A)$
3. Soit $(A_k)_{1\le k\le n}$ une famille de n évènements, interpréter $\sum\limits_{k=1}^{n} \chi_{A_k}$. Quel est le nombre moyen d'évènements réalisés?
4. Parmi 2n personnes formant n couples, m personnes décèdent. En moyenne combien de couples ont survécu?

PrO 98
Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n .On tire au hasard et avec remise N jetons. On appelle X le plus grand des numéros tirés.

1. Déterminer pour $k \in \{1,\dots,n\}, \quad P(X \le k)$
2. Montrer que pour $k \in \{2,\dots,n\}, \quad P(X = k) = P(X \le k) - P(X \le k-1)$
En déduire pour $k \in \{1,\dots,n\}, \quad P(X = k)$
3. Démontrer que $E(X) = n - \sum\limits_{k=1}^{n} (\dfrac{k-1}{n})^N$
En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{E(X)}{n}$ puis donner un équivalent de $E(X)$
4. Quelle est la limite de $E(X)$ quand $N \to +\infty$

PrO 99
Dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé . On considère pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble E_n des points du plan de coordonnées $(\dfrac{i}{n},\dfrac{j}{n})$ avec $(i,j) \in \{0,\dots,n\}^2$

1. Déterminer le nombre déléments de E_n, puis le nombre de segments reliant deux points de E_n
2. soit Ω l'ensemble des carrés non réduits à un point dont les sommets sont dans E_n et dont les côtés sont parallèles aux axes
Déterminer le nombre de carrés de Ω qui ont leurs arrêtes de longueur $\dfrac{k}{n}$, en déduire $card(\Omega)$
3. A l'aide de X la variable aléatoire égale au périmètre des carrés de Ω, donner la valeur moyenne des périmètres des carrés de Ω et la limite de cette moyenne quand n tend vers $+\infty$

PrO 100
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue des tirages sans remise dans cette urne jusqu'à ce que le numéro tiré ait un numéro supérieur ou égal au numéro tiré juste avant. On note X le nombre de tirages effectués (par exemple, une suite de tirages possibles est 4,2,1,2 et dans ce cas $X = 4$)

1. Donner $X(\Omega)$
2. Donner la loi de X puis son espérance pour $n = 3$, puis pour $n = 4$
3. Dans le cas général, déterminer $P(X = k)$ pour $k \in ,[\![2,n]\!]$ et justifier que $E(X) = \sum\limits_{k=0}^{n-2} \dfrac{1}{k!} + \dfrac{1}{n!}$
4. Que vaut $\lim E(X)$ lorsque $n \to +\infty$?

PrO 101
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ et soit Y une variable aléatoire indépendante de X et qui suit la loi uniforme sur $\{1,2\}$
Chercher la loi de $Z = XY$, son espérance et sa variance
Calculer la probabilité que Z soit paire

PrO 102
Le matin, un étudiant effectue n recherches(indépendantes bien sûr!) pour essayer de résoudre n exercices. Pour chaque exercice, il a une probabilité p de le résoudre et $q = 1 - p$ de ne pas le résoudre.

1. On note X le nombre d'exercices résolus le matin. Quelle est la loi de X? Donner son espérance et sa variance
2. Cet étudiant tente le soir, une seconde fois, de résoudre les $n - X$ exercices qui lui ont résisté le matin. On note Y le nombre d'exercices résolus le soir, et $Z = X + Y$. Quelles sont les valeurs que peut prendre Z?
3. Calculer $P(Z = 0)$ et $P(Z = 1)$ (on doit obtenir $P(Z = 1) = npq^{2n-2}(1 + q)$)
4. Démontrer que $P(Z = l) = \sum\limits_{k=0}^{l} P((X = k) \cap (Y = l - k))$ pour tout $l \geqslant 0$
5. Calculer $P_{X=k}(Y = h)$ pour les valeurs de k et h pour lesquelles cela a un sens. En déduire $P(Z = l)$
6. Montrer que $\binom{n}{k}\binom{n-k}{l-k} = \binom{n}{l}\binom{l}{k}$, et en déduire que $P(Z = l) = \binom{n}{l} p^l(1 + q)^l(q^2)^{n-l}$
7. En constatant que $p(1 + q) = 1 - q^2$, reconnaitre la loi suivie par Z

PrO 103
Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire simultanément deux jetons. On note X le plus petit numéro tiré et Y le plus grand

1. Quelle est la loi conjointe de (X,Y)?
2. En déduire les lois marginales de X et de Y
3. Calculer $E(Y)$, $E(Y(Y - 2))$, $E(Y^2)$ puis la variance de Y
   On rappelle $\sum\limits_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$
4. Montrer que X et n+1-Y ont la même loi et en déduire l'espérance et la variance de X

PrO 104
On dispose de $2n + 1$ jetons dont une face est noire et l'autre est blanche.
On lance simultanément ces jetons.
On note B le nombre de faces blanches obtenues et N le nombre de faces noires
Expliquer pourquoi une seule des 2 couleurs apparaît un nombre impair de fois. On désigne par X la variable égale à ce nombre impair.

1. donner la loi de B, la loi de N, donner leur espérance et leur variance
2. Calculer cov(B,N)
3. Calculer la loi de X , son expérance et sa variance

PrO 105
Soit (X,T) un couple de variables aléatoires v̀aleurs dans $\mathbb{N}^2$ tel que $P((X,T) = (p,q)) = a\dfrac{p+q}{p!q!2^{p+q}}$

1. Déterminer le réel a
2. Calculer les lois marginales
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes?

PrO 106
Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires v̀aleurs dans $\mathbb{N}^2$ tel que $P((X,Y) = (p,q)) = a\dfrac{c^{p+q}}{p!q!}$

1. Déterminer le réel a
2. Calculer les lois marginales
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes?
4. Déterminer la loi de S=X+Y

PrO 107
On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*, p_n = \dfrac{1}{n.2^n.\ln(2)}$

1. Vérifier que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n = 1$
2. On considère la va X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $P(X = n) = p_n$
   (a) X admet-elle une espérance? Si oui, la calculer!
   (b) La va $Y = (\ln 2).X - 1$ possède-t-elle une espérance?

PrO 108
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$
Déterminer la loi, l'espérance et la variance de $Z = X - Y$

PrO 109
X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé indépendantes. X suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ et Y suit la loi $\mathcal{B}(p)$. On pose Z=XY

1. Déterminer G_X et G_Y les fonctions génératrices de X et de Y
2. Montrer que la fonction génératrice de Z vérifie $G_Z = G_Y \circ G_X$
3. En déduire E(Z) et V(Z)

PrO 110
Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ mutuellement indépendantes et de loi $\mathcal{G}(p_1)$ et $\mathcal{G}(p_2)$ respectivement avec $p_1 \neq p_2$ On notera $q_1 = 1 - p_1$ et $q_2 = 1 - p_2$

1. Déterminer la loi de $S = X_1 + X_2$
2. Calculer $P(X_1 \geq k)$ et $P(X_2 \geq k)$
3. Calculer $P(X_1 \leq X_2)$ et $P(X_2 \leq X_1)$ ainsi que $P(X_1 = X_2)$
4. On pose $M = \min(X_1,X_2)$. Calculer $P(M \geq m)$, en déduire la loi de M
5. Démontrer que la loi de X_1 sachant $(X_1 \leq X_2)$, la loi de X_2 sachant $(X_2 \leq X_1)$ et la loi de M sont les mêmes

PrO 111
On effectue une suite d'expériences indépendantes à deux issues possibles A et B. On s'intéresse à la longueur X_1 de la première série ininterrompue de A ou B et à X_2 la longueur de la deuxième série ininterrompue.
Par exemple , si on obtient AAABBBBAB alors $X_1 = 3$ *et* $X_2 = 4$
On note p la probabilité d'obtenir A et $q = 1 - p$ celle d'obtenir B

1. Déterminer les lois de X_1, de (X_1,X_2) et de X_2
2. Calculer les espérances et variances de X_1 et X_2
3. Montrer que X_1 et X_2 sont indépendantes si et seulement si $p = \dfrac{1}{2}$

PrO 112
Julien part à la chasse aux coléoptères.
On suppose que le nombre N de coléoptères qu'il croise suit une loi de Poisson de paramètre λ.
La probabilité qu'un coléoptère soit une coccinelle est égale à $\alpha > 0$.
On note C le nombre de coccinelles rencontrées.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![0,n]\!], P(C = k|N = n) = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}\alpha^k(1-\alpha)^{n-k}$
2. Déterminer la loi conditionnelle de C sachant $N = n$
3. En déduire la loi de C et son espérance

PrO 113
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne. X_1 est le premier numéro tiré, X_2 est le second

1. Déterminer la loi de (X_1,X_2) puis les lois de X_1 et de X_2
2. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes?

PrO 114
Soit X une vard admettant une variance $\sigma^2 > 0$.
Montrer que $\forall \alpha > 0, P(|X - E(X)| < \alpha.\sigma) \geqslant 1 - \dfrac{1}{\alpha^2}$

PrO 115
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de va indépendantes de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.
Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left|\dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \dfrac{1}{p}\right| < \varepsilon\right) = 1$

PrO 116 (classique: somme de deux lois géométriques)
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.
Déterminer la loi de $X + Y$

PrO 117 (classique: somme de deux lois géométriques)
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.
En utilisant les fonctions génératrices, déterminer la loi de $X + Y$

PrO 118
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.
On note $Z = \max(X,Y)$ et $T = \min(X,Y)$
Déterminer la loi de Z et déterminer son espérance (si elle existe)
(On pourra commencer par déterminer $P(Z \leqslant n)$)
Mêmes questions avec T. Z et T sont-elles indépendantes?

PrO 119
Soient X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

1. Déterminer la loi de $S = X + Y$
2. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $S = k$ avec $k \geqslant 2$ fixé.
3. Déterminer $P(S \geqslant n)$ pour $n \geqslant 2$
4. Calculer $P(S \geqslant Z)$ et $P(S = Z)$

PrO 120
On considère X une va dont la loi est donnée par le tableau

x	-2	-1	0	1	2
$P(X = x)$	0.1	0.1	0.3	0.2	0.3

On pose $Y = |X|$ et $Z = X^3 - X$

1. Donner $X(\Omega), Y(\Omega)$ et $Z(\Omega)$
2. Donner les lois de Y et de Z
3. Espérance et variance de ces va

PrO 121
Soi X une v.a.r.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant 0, P(X=n) = \frac{1}{4}\left(\frac{1+a^n}{n!}\right)$

1. Déterminer la fonction génératrice de X. En déduire son espérance et sa variance.
2. Y étant une v.a.r.d indépendante de X et suivant la même loi, on pose $S = X+Y$.
   Déterminer la fonction génératrice de $S = X+Y$. En déduire la loi de S

PrO 122

1. Soit $X_n \sim \mathcal{B}(n,p)$. Montrer que $P\left(p - \sqrt{\frac{5}{n}} \leqslant \frac{X_n}{n} \leqslant p + \sqrt{\frac{5}{n}}\right) \geqslant 0.95$
2. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que $X_n \sim \mathcal{B}(p_n)$.
   Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - \frac{p_1+\cdots+p_n}{n}\right| < \varepsilon\right)$ pour tout $\varepsilon > 0$ fixé.

Covariance

PrO 123
Soit (X,Y) un couple de v.a discrètes dont la loi est donnée par le tableau de gauche suivant:

$X \setminus Y$	1	2	3	4
1	0.08	0.04	0.16	0.12
2	0.04	0.02	0.08	0.06
3	0.08	0.04	0.16	0.12

$Z \setminus T$	1	2	3	4
1	0.08	0.08	0.24	0.12
2		0.02		
3				

1. Déterminer (X,Y) (on devra trouver 0)
2. On pose $Z = \min(X,Y)$ et $T = \max(X,Y)$. Déterminer (Z,T)
   (on trouvera $E(ZT) = 5.6$ et $(Z,T) = 0.2496$)

PrO 124 (covariance nulle n'implique pas l'indépendance!)
On lance deux fois une pièce de monnaie équilibrée.
Soient X la variable prenant pour valeur de nombre de Pile obtenus moins un, et Y la variable prenant pour valeur le nombre de Pile au deuxième lancer moins le nombre de Pile au premier lancer.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X,Y)
2. Calculer la covariance des variables X et Y
3. Montrer que les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

PrO 125
Une boite contient $n-2$ boules blanches et 2 boules noires. On tire n boules sans remise. On note X le rang d'arrivée de la première boule noire et Y le rang de la seconde

1. Déterminer la loi du couple (X,Y). En déduire les lois de X et de Y
2. Montrer qu'il existe un réel a tel que Y et $a-X$ ont la même loi. En déduire une relation entre $E(X)$ et $E(Y)$, puis entre $V(X)$ et $V(Y)$
3. Déterminer $cov(X,Y)$

PrO 126
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne. X_1 est le premier numéro tiré, X_2 est le second

1. Déterminer la loi de (X_1,X_2) puis les lois de X_1 et de X_2
2. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes? Calculer $cov(X_1,X_2)$.

PrO 127
Une urne contient des boules de types différents (bleues,jaunes, etc) mais indiscernables au toucher. Le type numéro i est en proportion p_i. On tire n boules au hasard et avec remise. On note X_i le nombre de boules tirées de type i.

1. Donner la loi de X_i et sa variance
2. Montrer que X_i et X_j ne sont pas indépendantes
3. Donner la loi de $X_i + X_j$ pour $i \neq j$ et sa variance
4. En déduire $cov(X_i,X_j)$

PrO 128
Soit $n \geqslant 2$ fixé et a un réel.
On considère les variables aléatoires X et Y définies par $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1,n]\!]$ et
pour tout $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$, $P(X = i \cap Y = j) = p_{i,j} = a.i.j$

1. Déterminer a pour que les réels $p_{i,j}$ définisse une loi conjointe.

2. Déterminer les lois marginales de X et de Y. Calculer leur espérance
3. Les variables X et Y sont ' elles indépendantes?
4. Donner cov(X,Y), en déduire $E(XY)$
5. On pose Z=X+Y. Déterminer la loi de Z

PrO 129
Soit X une va possédant une variance
Soient X_1 et X_2 deux va qui suivent la m̂ loi que celle de X et telles que $X_1 + X_2$ suit la loi de la va $2X$.

1. Montrer que $(X_1,X_2) = V(X)$
2. Montrer que $V(X_1 - X_2) = 0$
3. En déduire que $P(X_1 = X_2) = 1$

PrO 130 (formules autour de la covariance, démo de cours)
.

1. Développer $(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i X_i, \sum\limits_{j=1}^{m} b_j Y_j)$
2. Montrer que
$$V(X_1 + X_2 + X_3) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + 2.(X_1,X_2) + 2.(X_1,X_3) + 2.(X_2,X_3)$$
3. Justifier que $V(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} V(X_k) + 2 \sum\limits_{1\leq i<j\leq n} (X_i,X_j)$
4. Montrer que si $X_1,\ldots X_n$ sont 2 à 2 indépendantes alors $V(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} V(X_k)$

PrO 131
On lance n fois une pièce de monnaie qui a la probabilité p de tomber sur Pile.
On note X le nombre de Piles obtenus et Y le nombre de Faces obtenus.

1. Donner les lois de X et Y ainsi que leurs espérances et variances.
2. En utilisant la relation $X + Y = n$, déterminer (X,Y)

FIN des exercices PrO