DS 2 du 16 octobre 2023

- **La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.**

- **L'usage de tout matériel électronique est interdit.**

- **Vos résultats doivent être encadrés, à la règle, de préférence avec une couleur différente de celle d'écriture.**

- CONSIGNES:
  - Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée: bleue ou noire
  - L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit
  - Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illuster, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.
  - Le sujet est composé de 4 exercices, complètement indépendants.

EXERCICE 1

On note pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x(t) &= 2\cos(t) + \cos(2t) \\ y(t) &= 2\sin(t) + \sin(2t) \end{cases}$ et $M(t)$ le point de coordonnées $(x(t),y(t))$.
On note également Γ la courbe décrite par $M(t)$ quand t décrit $\mathbb{R}$

1. **Préliminaire:**

   Soit $(p,q) \in \mathbb{R}^2$.

   (a) Montrer que $2.\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right).e^{i.(\dfrac{p+q}{2})} = e^{ip} + e^{iq}$

   (b) En déduire une expression factorisée de $\cos(p) + \cos(q)$ et une expression factorisée de $\sin(p) + \sin(q)$

2. **Etude d'un arc paramétré**

   (a) Etude du point $M(0)$.
   Le point $M(0)$ est-il un point régulier?
   Donner l'équation cartésienne de la tangente à Γ au point $M(0)$.

   (b) Etude du point $M(\pi)$.
   Le point $M(\pi)$ est-il un point stationnaire?
   Indiquer la nature de ce point (point d'inflexion, point d'allure ordinaire,...)

   (c) Justifier que l'on peut restreindre l'intervalle d'étude à l'intervalle $I = [0,\pi]$

   (d) Pour tout $t \in I$ déterminer $x'(t)$ et $y'(t)$ sous forme factorisée.

   (e) Dresser le tableau de variations conjoint de x et de y

   (f) Indiquer les coordonnées des points $M(t)$ avec $t \in I$ en lesquels la tangente à la courbe est parallèle à l'axe des abscisses ou à l'axe des cordonnées.

   (g) Dessiner la courbe Γ

3. **Etude de la développée de Γ sur l'intervalle** $]-\pi,\pi[$

   (a) Déterminer la longueur prise le long de la courbe entre les points $M(-\pi)$ et $M(\pi)$.

   (b) Déterminer le repère de Frenet au point $M(t)$

   (c) Déterminer le paramètre angulaire α (on trouvera comme expression une fonction affine de t)

   (d) Déterminer la développée de Γ (on donnera des expressions simplifiées des coordonnées à l'aide du préliminaire)

   (e) On définit les fonctions suivantes $\begin{cases} x_1(t) &= \dfrac{2\cos(t) - \cos(2t)}{3} \\ y_1(t) &= \dfrac{2\sin(t) - \sin(2t)}{3} \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.
   On note $N(t)$ le point de coordonnées $(x_1(t),y_1(t))$
   On note Γ_1 le lieu du point $N(t)$
   Montrer que Γ_1 est l'image de Γ par l' homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{-1}{3}$

4. **Une construction géométrique de Γ**

   Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $Q(t)$ le point de coordonnées $(1 + 2\cos t\,, 2\sin t)$.
   On considère le pointe $A = (-1,0)$
   Γ_1 désignera la courbe décrite par le point $Q(t)$

   (a) Reconnaitre la nature de Γ_1 et donner ses éléments

   (b) $K(t)$ désigne le projeté orthogonal du point A sur la droite tangente à Γ_1 au point $Q(t)$.
   Déterminer les coordonnées de $K(t)$.
   Comparer $K(t)$ et $M(t)$.
   En déduire une caractérisation géomètrique de Γ

EXERCICE 2

On considère la fonction
$$\boxed{\begin{array}{rcl} g : [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si } t>0 \\ a & \text{sinon} \end{cases} \end{array}}$$

Question préliminaire:
Montrer qu'il existe une valeur de a telle que la fonction g soit continue sur $[0+\infty[$.
On supposera dorénavant que a prend cette valeur.

On s'intéresse dans cet exercice à la série de terme général $w_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} g(t)dt$ avec $n \in \mathbb{N}$.

1. **Etude d'une éventuelle grossière divergence**
   (a) Montrer que $\forall n \geqslant 1, |w_n| \leqslant \dfrac{1}{n}$
   (b) Rappeler la définition d'une série grossièrement divergente.
   $\sum w_n$ est-elle grossièrement divergente?

2. **Une première manière d'étudier la convergence**

   (a) Sans faire d'étude particulière, dessiner l'allure de la courbe représentative de g
   (b) Justifier que la série $\sum w_n$ est une série alternée
   (c) A l'aide d'un changement de variable affine judicieuse choisi, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$
   $$w_n = (-1)^n.\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{\theta + n\pi}d\theta$$
   (d) Déterminer la nature de la série de terme général w_n

3. **Une seconde manière d'étudier la convergence**

   (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \geqslant 1$
   $$w_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)\pi} + \frac{(-1)^n}{n\pi} - x_n \qquad \text{où} \qquad x_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos t}{t^2}dt$$
   (b) Montrer que $x_n = O(\dfrac{1}{n^2})$
   (c) Déterminer la nature de la série de terme général w_n
   (d) La série $\sum w_n$ est-elle absolument onvergente?

EXERCICE 3

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}$ ainsi que $v_n = \ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a
$$v_n = 1 - (n+\frac{1}{2}).\ln(1+\frac{1}{n})$$
2. Déterminer un réel a tel que pour n au voisinage de $+\infty, v_n \sim \dfrac{a}{n^2}$
3. En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ converge, puis que la suite $(\ln(u_n))_{n\geqslant 1}$ est convergente.
4. En déduire avec soin qu'il existe un réel $K>0$ tel que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} K.n^n e^{-n}\sqrt{n}$
5. Application:
   (a) Déterminer la nature de la série de terme général $\sum \dfrac{1}{4^n}.\dbinom{2n}{n}$.
   (b) Aurait-on pu déterminer la nature de cette série avec la Règle de D'Alembert?

EXERCICE 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Les 2 questions de cet exercice sont indépendantes

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   On considère la courbe Γ_λ d'équation $\lambda.x^2 + y^2 + 2\lambda.x - \lambda^2 + \lambda + 4 = 0$.
   (a) Déterminer la nature de Γ_λ *(dans le cas de coniques dégénérées on précisera avec soin les éléments trouvés)*
   (b) Montrer que par tout point du plan passent 2 et exactement 2 courbes de la famille $(\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$

2. Soit Γ la courbe d'équation cartésienne $9x^2 + y^2 - 18x + 2y = 0$
   (a) Ecrire l'équation cartésienne de la tangente à Γ au point $A(2,0)$.
   Vérifier que cette tangente passe par le point $B(3,-9)$
   (b) Déterminer une autre tangente à Γ qui passe par le point $B(3,-9)$
   (c) Déterminer l'angle formé par ces 2 tangentes.

Correction de l'exercice 4

1. La courbe Γ_λ est une courbe du second degré: ce sera donc soit une ellipse, hyperbole, parabole, soit une conique dégénérée

   (a) On commence par distinguer le cas $\lambda = 0$, car détermine la présence de x^2 ou pas

   - cas $\lambda = 0$.
     L'équation devient $y^2 + 4 = 0$.
     Comme un carré est toujours positif, cette équation ne possède pas de solution.
     $\boxed{\text{Conclusion: } \Gamma_0 \text{ est l'ensemble vide}}$
   - cas $\lambda \neq 0$.
     En mettant sous forme canonique la partie en x on trouve

     $$\lambda.(x+1)^2 + y^2 = \lambda^2 - 4$$

     On voit alors des cas à envisager suivant que $\lambda^2 = 4$ ou pas

     i) sous-cas $\lambda = 2$.
     L'équation devient

     $$2(x+1)^2 + y^2 = 0$$

     Or une somme de carrés est nulle ssi chaque terme est nul, on a donc

     $$\begin{cases} (x+1)^2 & = 0 \\ y^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = 0 \\ y & = 0 \end{cases}$$

     $\boxed{\text{Conclusion: } \Gamma_2 \text{ est réduit à un point, le point } (-1{,}0)}$

     ii) sous-cas $\lambda = -2$.
     L'équation devient

     $$-2(x+1)^2 + y^2 = 0 \iff y^2 - [\sqrt{2}(x+1)]^2 = 0 \iff (y - \sqrt{2}(x+1))(y + \sqrt{2}(x+1) = 0$$

     ce qui équivaut à

     $$y = \sqrt{2}.(x+1) \qquad \text{OU} \qquad y = -\sqrt{2}.(x+1)$$

     $\boxed{\text{Conclusion: } \Gamma_{-2} \text{ est la réunion de 2 droites sécantes, les droites } y = \pm\sqrt{2}(x+1)}$

     iii) sous-cas $\lambda^2 \neq 4$
     En utilisant la technique habituelle, l'équation devient

     $$\frac{(x+1)^2}{\frac{\lambda^2 - 4}{\lambda}} + \frac{y^2}{\lambda^2 - 4} = 1$$

     On fait alors le tableau de signes habituel (que je ne reproduis pas ici), et l'on trouve:
     – **Si** $\lambda \in]-\infty, -2[\cup]-2{,}0[$, Γ_λ **est une hyperbole**
     – **Si** $\lambda \in]0{,}2$, Γ_λ **est l'ensemble vide**
     – **Si** $\lambda \in]2, +\infty[$, Γ_λ **est une ellipse**

   (b) On commence par l'étape indispensable: on définit une fonction!
   Soit $\boxed{\begin{array}{rrcl} F: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & 9x^2 + y^2 - 18x + 2y \end{array}}$

   A) • La fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, et l'on a $\nabla_{(x,y)}F = \begin{pmatrix} 18x - 18 \\ 2y + 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 9(x-1) \\ y + 1 \end{pmatrix}$

   • $\nabla_A F = \begin{pmatrix} 18 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$.
   Ainsi A est un point régulier de Γ, et la tangente en A à Γ est la droite qui passe par le point A et de vecteur normal $\nabla_A F$.
   Son équation est donc $\begin{pmatrix} x - 2 \\ y - 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$, càd $\boxed{9x + y - 18 = 0}$

   • Cette droite passe bien par le point $B(3, -9)$ car $9 \times 3 + (-9) - 18 = 0$

   B) Nous allons procéder comme suit

   i) On détermine l'équation générique de la tangente T_{M_0} en un point $M_0(x_0,y_0) \in \Gamma$
   ii) On détermine M_0 pour que $B \in T_{M_0}$

   i) Soit $M_0(x_0,y_0) \in \Gamma$.
   • On a $\nabla_{M_0}F = \begin{pmatrix} 18x_0 - 18 \\ 2y_0 + 2 \end{pmatrix}$.
   Ce gradient est nul ssi $(x_0,y_0) = (1, -1)$.
   Or $(1, -1) \notin \Gamma$ (car $9.1^2 + (-1)^2 - 18.1 + 2.(-1) = -10 \neq 0$.
   On en conclut que M_0 est un point régulier de Γ
   • T_{M_0}, la tangente à Γ en M_0, est la droite qui passe par le point $M_0(x_0,y_0)$ et de vecteur normal $\begin{pmatrix} 18x_0 - 18 \\ 2y_0 + 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 9x_0 - 1 \\ y_0 + 1 \end{pmatrix}$
   càd

   $$9(x_0 - 1)x + (y_0 + 1)y - 9x_0^2 + 9x_0 - y_0^2 - y_0 = 0$$

   Comme $M_0 \in \Gamma$, on a $9x_0^2 + y_0^2 - 18x_0 + 2y_0 = 0$ càd $9x^0 + y_0^2 = 18x_0 - 2y_0$.
   En remplaçant dans l'équation précédente, cela donne

   $$9(x_0 - 1)x + (y_0 + 1)y - 9x_0 + y_0 = 0$$

   ii) Le point $B(3, -9)$ appartient à T_{M_0} ssi $9(x_0 - 1).3 + (y_0 + 1).(-9) - 9x_0 + y_0 = 0$,càd $9x_0 - 4y_0 - 18 = 0$.
   Ainsi le point M_0 cherché vérifie le système

   $$\begin{cases} 9x_0^2 + y_0^2 - 18x_0 + 2y_0 & = 0 \\ 9x_0 - 4y_0 - 18 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 9x_0^2 + y_0^2 - 18x_0 + 2y_0 & = 0 \\ y_0 & = 9x_0/4 - 9/2 \end{cases}$$
   $$\iff \begin{cases} 5x_0^2 - 12x_0 + 4 & = 0 \\ y_0 & = 9x_0/4 - 9/2 \end{cases}$$

   L'équation $5x_0^2 - 12x_0 + 4 = 0$ possède comme solution $x_0 = 2$ et $x_0 = 2/5$, on trouve donc au final

   $$(x_0,y_0) = (2{,}0) = A \qquad \textbf{et} \qquad (x_0,y_0) = (2/5, -18/5) = A'$$

   La tangente cherchée est donc $T_{A'}$.
   Son équation est: $\boxed{27x + 13y + 36 = 0}$

   (c) Le vecteur normal à T_A est $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   Le vecteur normal à $T_{A'}$ est $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 27 \\ 13 \end{pmatrix}$

Notons α l'angle en T_A et $T_{A'}$.
On a

$$\cos\alpha = \frac{\vec{n}_1.\vec{n}_2}{||\vec{n}_1||.||\vec{n}_2||} = \frac{256}{\sqrt{898}.\sqrt{82}}$$

Ainsi $\boxed{\alpha = \arccos\frac{256}{\sqrt{898}.\sqrt{82}}}$

Correction de l'exercice 3

1. Soit $n \geqslant 1$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)n^n e^{-n}\sqrt{n}}{(n+1)^{n+1}e^{-(n+1)}\sqrt{(n+1)}} = \frac{n^n e\sqrt{n}}{(n+1)^n\sqrt{n+1}} = (\frac{n}{n+1})^{n+\frac{1}{2}}.e$$

et donc

$$v_n = \ln(\frac{u_{n+1}}{u_n}) = (n+\frac{1}{2})\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)+1$$
$$= -(n+\frac{1}{2})\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)+1$$

2. Ainsi

$$v_n = -(n+\frac{1}{2})\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)+1$$
$$= -(n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n})+1 = -(n+\frac{1}{2})(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o(\frac{1}{n^3}))+1$$

(car on a $\lim\frac{1}{n}=0$ *et on sait que* $\ln(1+x) =_0 x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$*)*
En développant et en gardant bien le bon ordre, cela donne

$$v_n = -1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n^2}-\frac{1}{3n^2}+o(\frac{1}{n^2})+1 = -\frac{1}{12n^2}+o(\frac{1}{n^2}) \sim -\frac{1}{12n^2}$$

Pour reprendre les notations de l'énoncé, on trouve $\boxed{a = \frac{-1}{12}}$

3. *Il s'agit d'utiliser la règle des équivalents puis le théorème lien suite-série.*

- On a $v_n \sim -\frac{1}{12n^2}$.
Comme $-\frac{1}{12n^2}$ est de **signe stable**(précision **indispensable** sur votre copie) et que la série de terme général $-\frac{1}{12n^2}$ est une série de Riemann convergente, on peut affirmer d'après la règle des équivalents que
$\boxed{\sum v_n \text{ est une série convergente}}$
- La série $\sum v_n$ est égal à la série $\sum \ln u_{n+1} - \ln u_n$
Le théorème lien entre suite et série nous permet d'affirmer que:

$$\sum \ln u_{n+1} - \ln u_n \text{ est une } \underline{\text{série}} \text{ convergente ssi la } \underline{\text{suite}}\ (\ln(u_n)) \text{ est convergente}$$

$\boxed{\text{Conclusion : la suite } (\ln u_n) \text{ est convergente}}$
(on rappelle que ce théorème formalise le procédé télescopique: la somme partielle d'indice N de la série indiquée est en effet égal à $\sum_{n=1}^{N}(\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)) = \ln(u_{N+1})-\ln(u_1)$*)*

4. Notons $L = \lim\ln u_n$.
Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$u_n = e^{\ln u_n}$$

Comme la fonction est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit par composition des limites que $\lim u_n = e^L$.
Notons $K = e^L$.
On a bien $K > 0$, et de plus

$$\lim\frac{n!}{K.n^n.e^{-n}.\sqrt{n}} = \lim\frac{u_n}{K} = 1$$

$\boxed{\text{Conclusion: on a montré } \exists K > 0, n! \sim K.n^n.e^{-n}.\sqrt{n}}$

5. (a) Posons $w_n = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} = \frac{(2n)!}{4^n.(n!)^2}$
On a

$$w_n \sim \frac{K.(2n)^{2n}.e^{-2n}.\sqrt{2n}}{4^n.K^2.n^{2n}.e^{-2n}.n} = \frac{\sqrt{2}}{K.\sqrt{n}}$$

Comme $w_n > 0$, et que $\sum\frac{\sqrt{2}}{K.\sqrt{n}}$ est une série de Riemann divergente, on peut affirmer par la règle des équivalents que $\boxed{\sum w_n \text{ diverge}}$

(b) Soit $n \geqslant 1$.
On a

$$\left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| = \frac{(2n+2)!}{(2n)!}.\frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2}.\frac{4^n}{4^{n+1}} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

On a $\lim\left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| = 1$ et ainsi la Règle de D'Alembert ne permettrait pas de conclure

Correction de l'exercice 2

question préliminaire:

- La fonction g est continue sur $]0,+\infty[$ comme quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas
- On sait que $\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t} = 1$.
On en déduit que g est continue en 0 ssi $\boxed{a = 1}$

1. (a) Soit $n \geqslant 1$
   - d'après l'inégalité triangulaire intégrale, on a

$$|w_n| \leqslant \left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} g(t)dt\right| \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|g(t)|dt$$

   - Pour tout $t \in [n\pi,(n+1)\pi]$, on a

$$|g(t)| = \frac{|\sin t|}{|t|} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{n.\pi}$$

On en déduit par croissance de l'intégrale que

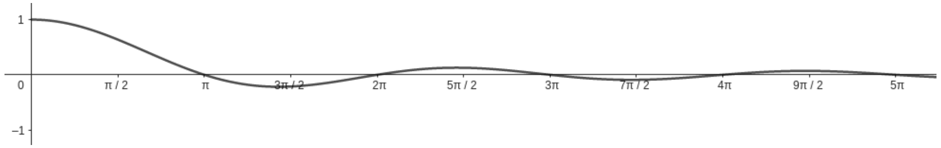
$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |g(t)|dt \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{n.\pi}dt = \frac{1}{n}$$

On a montré que $\boxed{\forall n \geqslant 1, |w_n| \leqslant \frac{1}{n}}$

(b)
- Par définition, on dit qu'une série est grossièrement divergente lorsque son terme général ne tend pas vers 0
- D'après l'inégalité ci-dessus, comme $\lim \frac{1}{n} = 0$, on en déduit que $\lim w_n = 0$.

  Ainsi, $\boxed{\text{la série } \sum w_n \text{ N'est PAS une série grossièrement divergente}}$

2. (a)



(b) Nous allons montrer que le signe de w_n change suivant la parité de n.
- Soit n un entier pair.

  On sait alors que sur l'intervalle $[n\pi,(n+1)\pi]$, on a $\sin t \geqslant 0$, et donc $g(t) \geqslant 0$.

  Par positivité de l'intégrale, on en déduit que

$$w_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} g(t)dt \geqslant 0$$

- Soit n un entier impair.

  On sait alors que sur l'intervalle $[n\pi,(n+1)\pi]$, on a $\sin t \leqslant 0$, et donc $g(t) \leqslant 0$.

  Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$w_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} g(t)dt \leqslant 0$$

On a ainsi bien prouvé que $\boxed{\sum w_n \text{ est une série alternée}}$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

On effectue le changement de variable affine (et donc C^1) $\theta = t - n\pi$ (et donc $d\theta = dt$)

On n'oublie pas de changer les bornes, et cela donne

$$w_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin(\theta + n\pi)}{\theta + n\pi}d\theta$$

On sait aussi que

$$\sin(\theta + n\pi) = \sin(\theta).\cos(n\pi) + \cos(\theta).\sin(n\pi) = (-1)^n.\sin\theta$$

On en déduit bien que

$$w_n = (-1)^n.\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{\theta + n\pi}d\theta$$

(d)
- Tout est fait pour nous faire utiliser le critère spécial de convergence!
- On a déjà vu en Q1b) que $\lim w_n = 0$, donc $\boxed{\lim |w_n| = 0}$

- Avec l'expression ci-dessus, on a $|w_n| = \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{\theta + n\pi}d\theta$
- Montrons que $(|w_n|)$ est une suite décroissante.

  Soit $n \in \mathbb{N}$.

  On a par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned} |w_n| - |w_{n+1}| &= \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{\theta + n\pi}d\theta - \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{\theta + (n+1)\pi}d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \sin\theta.\left(\frac{1}{\theta + n\pi} - \frac{1}{\theta + (n+1)\pi}\right)d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \sin\theta.\left(\frac{n.\pi}{(\theta + n\pi)(\theta + (n+1)\pi)}\right)d\theta \end{aligned}$$

  Or

$$\forall\theta \in [0,\pi],\ \sin\theta.\left(\frac{n.\pi}{(\theta + n\pi)(\theta + (n+1)\pi)}\right) \geqslant 0$$

  On a donc par positivité de l'intégrale

$$\int_0^{\pi} \sin\theta.\left(\frac{n.\pi}{(\theta + n\pi)(\theta + (n+1)\pi)}\right)d\theta \geqslant 0$$

  Conclusion: $\boxed{\text{on a bien montré que } (|w_n|) \text{ est décroissante}}$

Par application du critère spécial de convergence des séries alternée, on peut affirmer que $\boxed{\sum w_n \text{ converge}}$

3. (a) Soit $n \geqslant 1$.

On réalise une intégration par parties en posant $u(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = -\cos t$.

Ces fonctions sont bien de classe C^1 sur $[n\pi,(n+1)\pi]$, et l'on obtient

$$\begin{aligned} w_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}dt &= \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} - \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos t}{t^2}dt \\ &= -\frac{\cos((n+1)\pi)}{(n+1)\pi} + \frac{\cos(n\pi)}{n\pi} - x_n \end{aligned}$$

Or on sait que $\forall p \in \mathbb{Z}$, $\cos(p\pi) = (-1)^p$, d'où

$$w_n = -\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\pi} + \frac{(-1)^n}{n\pi} - x_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)\pi} + \frac{(-1)^n}{n\pi} - x_n$$

(b) Soit $n \geqslant 1$.

On reprend exactement la même idée qu'en 1(a), et l'on trouve

$$|x_n| \leqslant \frac{\pi}{(n\pi)^2} = \frac{1}{n^2.\pi}$$

Ainsi

$$\forall n \geqslant 1, \frac{|x_n|}{\frac{1}{n^2}} = n^2.|x_n| \leqslant \frac{1}{\pi}$$

Ceci prouve que la suite $(n^2.|x_n|)$ est bornée, càd $\boxed{x_n = O(\frac{1}{n^2})}$

(c) On conclut alors, comme par la méthode d'éclatement

- La série $(\dfrac{(-1)^n}{n\pi})$ est clairement une série alternée qui vérifie le critère spécial, donc elle converge
- Idem pour la série $(\dfrac{(-1)^n}{(n+1)\pi})$
- $\sum x_n$ est une série absolument convergente par comparaison avec la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ qui est absolument convergente

Ainsi $\sum w_n$ est la somme de 3 séries convergentes, donc $\boxed{\sum w_n \text{ converge}}$

(d) On a

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{(-1)^n}{\pi}.\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}\right) - x_n \\ &= \underbrace{\frac{(-1)^n}{\pi}.\frac{2n+1}{n(n+1)}}_{=y_n} - x_n \end{aligned}$$

avec

$$y_n \sim \frac{(-1)^n}{\pi}.\frac{2n}{n.n} = \frac{(-1)^n.2}{\pi.n}$$

comme $x_n = O(\dfrac{1}{n^2})$ on a donc $x_n = o(y_n)$

Ainsi $w_n \sim y_n$ et $|w_n| \sim |y_n| = \dfrac{2}{\pi.n}$

Comme $\sum \dfrac{2}{\pi.n}$ est une série de Riemann divergente, par la règle des équivalents, on peut affirmer $\sum |w_n|$ est divergente.

$\boxed{\text{Conclusion: } \sum w_n \text{ N'est PAS absolument convergente}}$

Correction de l'exercice 1

1. préliminaire:

(a) Soit $(p,q) \in \mathbb{R}^2$.
On utilise la formule d'Euler

$$\begin{aligned} 2.\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).e^{i\frac{p+q}{2}} &= 2.\frac{e^{i\frac{p-q}{2}}+e^{i\frac{q-p}{2}}}{2}.e^{i\frac{p+q}{2}} \\ &= e^{i\frac{p-q}{2}}.e^{i\frac{p+q}{2}} + e^{i\frac{q-p}{2}}.e^{i\frac{p+q}{2}} \\ &= e^{ip}+e^{iq} \end{aligned}$$

(b) En considérant la partie réelle et la partie imaginaire de l'égalité précédente, cela donne

$$\cos(p)+\cos(q) = 2.\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sin(p)+\cos(q) = 2.\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

2. Etude d'un arc paramétré

(a) Etude du point $M(0)$

- Les fonctions x et y sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et l'on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) &= -2\sin(t) - 2\sin(2t) \\ y'(t) &= 2\cos(t) + 2\cos(2t) \end{cases}$$

- Ainsi $\overrightarrow{M'(0)} = (x'(0),y'(0)) = (0,4) \neq (0,0)$, et $\boxed{M(0) \text{ est un point régulier}}$
- La tangente au point $M(0) = (3,0)$ est dirigée par le vecteur $(0,4)$: $\boxed{\text{il s'agit donc d'une tangente verticale d'équation } x = 3}$

(b) Etude du point $M(\pi)$

- On a cette fois $\overrightarrow{M'(\pi)} = (x'(\pi),y'(\pi)) = (0,0)$ et $\boxed{M(\pi) \text{ est un point stationnaire}}$
- Nous allons déterminer la nature de ce point en effectuant un développement limité grâce à la formule de Taylor-Young.
On a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x''(t) &= -2\cos(t) - 4\cos(2t) \\ y'(t) &= -2\sin(t) - 4\sin(2t) \end{cases}$$

et donc $\overrightarrow{M''(\pi)} = (x''(\pi),y''(\pi)) = (-2,0) \neq (0,0)$
et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x^{(3)}(t) &= 2\sin(t) + 8\sin(2t) \\ y^{(3)}(t) &= -2\cos(t) - 8\cos(2t) \end{cases}$$

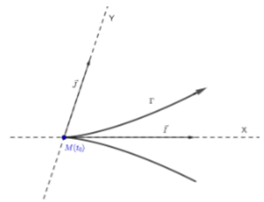
et donc $\overrightarrow{M^{(3)}(\pi)} = (x^{(3)}(\pi),y^{(3)}(\pi)) = (0,-6)$

La formule de Taylor-Young à l'ordre 3 permet décrire

$$M(\pi+h) = M(\pi) + \sum_{k=1}^{3} \frac{\overrightarrow{M^{(k)}(\pi)}}{k!}.h^k + o(h^k) = M(\pi) - h^2.(1,0) - h^3(0,1) + o(h^3)$$

Notons $\vec{I} = (-1,0)$ et $\vec{J} = (0,-1)$
$(\vec{I},\vec{J})$ est une famille libre: nous allons considérer le repère $(M(\pi),\vec{I},\vec{J})$
et nous noterons $(X(\pi+h),Y(\pi+h))$ les coordonnées de $M(\pi+h)$ dans ce repère.
Comme $M(\pi+h) = M(\pi) + h^2\vec{I} + h^3\vec{J} + o(t^3)$ on a

$$X(\pi+h) = h^2 + o(h^3) \underset{h\to 0}{\sim} h^2 \quad \text{et } Y(\pi+h) = h^3 + o(h^3) \underset{h\to 0}{\sim} h^3$$



Ce qui permet de faire localement le dessin ci-contre
$\boxed{M(\pi) \text{ est un point de rebroussement de première espèce}}$

(c) Réduction de l'intervalle d'étude.

- Les fonctions x et y sont 2π-périodiques: il suffit d'étudier et de tracer ses fonctions sur un intervalle de longueur 2π et l'on obtient toute la courbe
- La fonction x est paire et la fonction y est impaire: on en déduit qu'il suffit de faire l'étude sur l'intervalle $I = [0,\pi]$ puis d'effectuer une symétrie par rapport à l'axe des abscisses pour obtenir toute la courbe.

(d) On a déjà calculé les dérivées dans la la question 2a); il suffit d'utiliser les formules établies en 1b) pour obtenir:

$$\forall t \in I, x'(t) = -2(\sin(t) + \sin(2t)) = -4.\cos(\frac{t}{2}).\sin(\frac{3t}{2})$$

et

$$\forall t \in I, y'(t) = 2(\cos(t) + \cos(2t)) = 4.\cos(\frac{t}{2}).\cos(\frac{3t}{2})$$

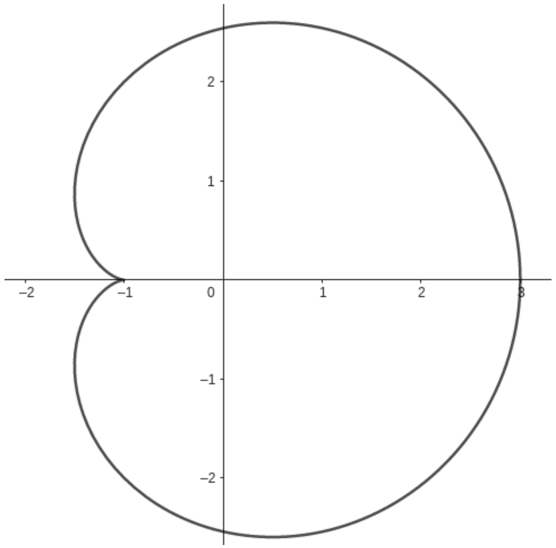
(e)

t	0		$\pi/3$		$2\pi/3$		π
$x'(t)$	0		$-$		0	$+$	0
$x(t)$	3	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{-3}{2}$	$\nearrow$	-1
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$+$	0		$-$		0

(f)

(g) D'après le tableau ci-dessus, il y a

- une tangente verticale en $M(0)$ et $M(2\pi/3)$
- une tangente horizontale en $M(\pi/3)$
- une tangente horizontale en $M(\pi)$ d'après l'étude précédente



(h)

3. Etude de la développée de Γ sur l'intervalle $[0,\pi[$.

(a) Soit $t \in]-\pi,\pi[$.

On a

$$\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{16\cos^2\frac{t}{2}.\left[\cos^2(\frac{3t}{2}) + \sin^2(\frac{3t}{2})\right]} = 4.\left|\cos\frac{t}{2}\right| = 4.\cos\frac{t}{2}$$

La longueur cherchée est donc

$$l = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}.dt = \int_{-\pi}^{\pi} 4.\cos\frac{t}{2}.dt = \left[8.\sin\frac{t}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 16$$

(b) Soit $t \in]-\pi,\pi[$.
On a

$$s'(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{16\cos^2\frac{t}{2}.\left[\cos^2(\frac{3t}{2}) + \sin^2(\frac{3t}{2})\right]} = 4.\left|\cos\frac{t}{2}\right|$$

Comme $t \in]-\pi,\pi[$ on a $\frac{t}{2} \in]-\pi/2,\pi/2[$ et donc $\cos\frac{t}{2} > 0$.

D'où $\boxed{\forall t \in]-\pi,\pi[, s'(t) = 4.\cos\frac{t}{2}}$

On en déduit que

$$\boxed{\overrightarrow{T} = \begin{pmatrix} -\sin(\frac{3t}{2}) \\ \cos(\frac{3t}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{3t}{2} + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{3t}{2} + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}}$$

(c) Ceci prouve que

$$\boxed{\forall t \in]-\pi,\pi[, \alpha(t) = \frac{3t}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{3t+\pi}{2}}$$

(d) Sur $]-\pi,\pi[$, on a

$$\boxed{\gamma = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\frac{d\alpha}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{3/2}{4.\cos\frac{t}{2}} = \frac{3}{8.\cos\frac{t}{2}}}$$

On en déduit ainsi que pour $t \in]-\pi,\pi[$

$$\begin{aligned} C(t) &= M(t) + \frac{1}{\gamma(t)}\overrightarrow{N} \\ &= \begin{pmatrix} 2\cos(t) + \cos(2t) \\ 2\sin(t) + \sin(2t) \end{pmatrix} + \frac{8\cos(t/2)}{3}\begin{pmatrix} -\cos(3t/2) \\ -\sin(3t/2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\cos(t) + \cos(2t) \\ 2\sin(t) + \sin(2t) \end{pmatrix} - \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 2\cos(t/2)\cos(3t/2) \\ 2\cos(t/2)\sin(3t/2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\cos(t) + \cos(2t) \\ 2\sin(t) + \sin(2t) \end{pmatrix} - \frac{4}{3}\begin{pmatrix} \cos(2t) + cos(t) \\ \sin(2t) + \sin(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On trouve ainsi

$$\boxed{\forall t \in]-\pi,\pi[, C(t) = \left(\frac{2\cos(t) - \cos(2t)}{3}, \frac{2\sin(t) - \sin(2t)}{3}\right)}$$

(e) Notons h l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{-1}{3}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$

Notons $R(t)$ l'image du point $M(t)$ par h.

On a

$$\begin{cases} x_R(t) &= \dfrac{-1}{3}.x_M(t) = \dfrac{-2\cos(t)-\cos(2t)}{3} \\ y_R(t) &= \dfrac{-1}{3}.y_M(t) = \dfrac{-2\sin(t)-\sin(2t)}{3} \end{cases}$$

On remarque que le point $C(t+\pi)$ a pour coordonnées

$$\begin{cases} x_1(t+\pi) &= \dfrac{2\cos(t+\pi)-\cos(2(t+\pi))}{3} = \dfrac{2\cos(t+\pi)-\cos(2t+2\pi)}{3} = \dfrac{-2\cos(t)-\cos(2t)}{3} \\ y_1(t+\pi) &= \dfrac{2\sin(t+\pi)-\sin(2(t+\pi))}{3} = \dfrac{2\sin(t+\pi)-\sin(2t+2\pi)}{3} = \dfrac{-2\sin(t)-\sin(2t)}{3} \end{cases}$$

On vient de prouver que $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, h(M(t)) = C(t+\pi)}$

Passons maintenant à l'image globale de Γ par h, on peut ainsi écrire

$$h(\Gamma) = \{h(M(t))|t \in \mathbb{R}\} = \{C(t+\pi)|t \in \mathbb{R}\} = \{C(u)|u \in \mathbb{R}\} = \mathcal{C} \qquad \text{cqfd!}$$

4. (a) $\boxed{\text{Le cercle de centre } \Omega(1{,}0 \text{ et de rayon } 2}$

(b) Soit $t \in \mathbb{R}$

- La tangente à Γ_1 au point $Q(t)$ est dirigé par le vecteur $Q'(t) = (-2\sin(t), 2\cos(t))$
  Un vecteur orthogonal au vecteur $Q'(t)$ est $\overrightarrow{n} = (\cos(t), \sin(t))$
- D'après la formule du projeté orthogonale, on a

$$\overrightarrow{AK(t)} = \frac{<\overrightarrow{AQ(t)}, \overrightarrow{n}>}{||\overrightarrow{n}|||^2}.\vec{n}$$

  Ainsi

$$\begin{aligned} K(t) &= A + \frac{<\overrightarrow{AQ(t)}, \overrightarrow{n}>}{||\overrightarrow{n}|||^2}.\vec{n} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + < \begin{pmatrix} 2\cos(t)+2 \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} > . \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (2\cos(t)+2). \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1+2\cos^2(t)+2\cos(t) \\ 2\cos(t).\sin(t)+2\sin(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2t)+2\cos(t) \\ \sin(2t)+2\sin(t) \end{pmatrix} \\ &= M(t) \end{aligned}$$

- On en déduit que Γ est le lieu des projetés du point A sur les tangentes au cercle Γ_1