DS 2 du 7 novembre 2022

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte *(extrait de rapport de jury)*
- **L'usage de tout matériel électronique est interdit.**
- Vos résultats doivent être encadrés, à la règle, de préférence avec une couleur différente de celle d'écriture.
- Les abréviations sont à proscrire tant que vous ne les avez pas clairement définies dans la copie *(on n'écrira pas "mq" mais "montrer que" ... idem pour CV ou ACV)*
- Nous conseillons fortement aux candidats qui ne savent pas traiter une question d'indiquer qu'ils en admettent le résultat pour la suite.
  (Ecrire par exemple: 3) j'admets le résultat de cette question)
- Ce devoir est constitué de quatre exercices totalement indépendants: vous pouvez les traiter dans l'ordre de votre choix.

- **PAS DE SORTIE AVANT 16H50!**

EXERCICE 1

$\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{K}$

On considère $\boxed{\begin{array}{rcl} p : \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix} \end{array}}$

1. Rappeler la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$
2. Rappeler ce que vous savez sur les projecteurs
3. Montrer que p est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$
4. Montrer que p est un projecteur et déterminer ses éléments géométriques.
   (On déterminera à chaque fois une base de ces éléments)
5. Parmi les matrices suivantes, laquelle représente p dans une base bien choisie

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Ecrire la matrice de p dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On notera A cette matrice
7. En notant D la matrice que vous avez trouvée à la question 5, justifier qu'il existe une matrice inversible P telle que $D = P^{-1}.A.P$, puis donner la matrice P. Est-elle unique?

$\boxed{\textbf{EXERCICE 2}}$

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(E,G)$.

(On rappelle que $\mathcal{L}(E,F)$ désigne l'ensemble des application linéaires de $E \to F$)

Le but de cet exercice est de montrer l'équivalence suivante

$$\ker(u) \subset \ker(v) \Longleftrightarrow \exists\, w \in \mathcal{L}(F,G) \text{ tel que } v = w \circ u$$

1. Rappeler la définition de $\ker u$

2. On suppose qu'il existe $w \in \mathcal{L}(F,G)$ tel que $v = w \circ u$.
   Montrer que $\ker(u) \subset \ker(v)$

3. On suppose que $\dim E = n$, $\dim(\ker(u)) = n - p$ et $\dim F = r$
   (a) Justifier qu'il existe $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ une base de E telle que $(e_{p+1},\dots,e_n)$ soit une base de $\ker u$
   Quelle est alors la dimension de $\mathrm{Im}(u)$?

   (b) Pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$, on pose $f_i = u(e_i)$
   Montrer que la famille $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est une base de $\mathrm{Im}\, u$

   (c) On complète la famille précédente de sorte que $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ soit une base de F.

   i. Justifier qu'il existe $w \in \mathcal{L}(F,G)$ tel que $w(f_i) = \begin{cases} v(e_i) & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

   ii. Montrer que si $\ker u \subset \ker v$ alors $v = w \circ u$

EXERCICE 3

Comme à son habitude, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.
On considère la courbe Γ de représentation paramétrique $\boxed{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & M(t)=(3t-t^3,3t^2) \end{array}}$

1. Etude de la courbe Γ

   (a) Mettre en évidence une symétrie de Γ qui permet de réduire l'intervalle d'étude.
   (b) Dresser le tableau de variation conjoint de x et de y sur l'intervalle $[0,+\infty[$
   (c) Faire l'étude de la branche infinie
   (d) Etude d'un point double

      i. Montrer qu'il existe un unique couple $(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\begin{cases} t_1 < t_2 \\ M(t_1)=M(t_2) \end{cases}$
      ii. Donner les coordonnées de ce point $M(t_1)=M(t_2)$
      iii. Déterminer un vecteur directeur de la tangente à Γ en $M(t_1)$ puis en $M(t_2)$ et en déduire l'angle sous lequel se coupe les tangentes à Γ en ce point.

   (e) Dessiner la courbe Γ
   (f) Calculer la longueur de la courbe entre les point $M(t=-\sqrt{3})$ et $M(t=\sqrt{3})$

2. Etude de la développée de Γ

   (a) question préliminaire:
   Montrer que pour tout $u\in]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[$ on a

$$\cos(2u)=\frac{1-\tan^2 u}{1+\tan^2 u} \qquad \text{et} \qquad \sin(2u)=\frac{2\tan u}{1+\tan^2 u}$$

   (b) Déterminer le repère de Frenet au point $M(t)$
   (c) Montrer que $\forall t\in\mathbb{R},\exists!\,\varphi\in]-\pi,+\pi[\,|\,t=\tan\frac{\varphi}{2}$
   (d) En déduire l'expression du vecteur unitaire tangent $\overrightarrow{T}$ en fonction de φ. Que représente φ?
   (e) Montrer que la courbure γ vaut $\dfrac{2}{3(1+t^2)^2}$
   (f) En déduire les coordonnées du centre de courbure
   (g) Retrouver ce résultat en utilisant le second moyen au programme pour déterminer la développée d'une courbe

EXERCICE 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. On note $F(\sqrt{3},0)$ et Δ la droite d'équation $x = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.
   Déterminer l'équation cartésienne de la conique de foyer F, de droite directrice Δ et d'excentricité $e = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   On considère maintenant et jusqu'à la fin de cet exercice, E la courbe d'équation cartésienne $x^2 + 4y^2 = 4$

2. (a) Montrer que tout point de E est un point régulier
   (b) Soit $M(x_0,y_0) \in E$.
   Montrer que la tangente à E au point $M(x_0,y_0)$ a pour équation cartésienne $\dfrac{x_0.x}{4} + y_0.y - 1 = 0$

3. Soit D une droite d'équation cartésienne $ux + vy + w = 0$ avec $(u,v) \neq (0,0)$.
   Nous allons montrer dans cette question l'équivalence

$$D \text{ est tangente à } E \iff 4u^2 + v^2 - w^2 = 0$$

   (a) Montrer que si D est tangente à E alors $4u^2 + v^2 - w^2 = 0$
   (b) Réciproquement, on suppose que $4u^2 + v^2 - w^2 = 0$
      i. Montrer que $w \neq 0$
      ii. Justifier que D est une droite tangente à Γ.

4. On considère E' la courbe d'équation paramétrique $\begin{cases} x & = 4\cos(t) \\ y & = 2\sin t \end{cases}$ avec $t \in [0,2\pi]$
   On note $P(t)$ le point de coordonnées $(4.\cos t, 2\sin t)$
   (a) Sur un même dessin représenter E et E'.
   (On ne demande pas de faire d'étude)
   (b) Soient $P(t)$ et $P(t')$ deux point distincts de E'
      i. Ecrire une équation cartésienne de la droite $(P(t)P(t'))$
      ii. Montrer que cette droite est tangente à E ssi $2\cos^2(t' - t) - \cos(t' - t) - 1 = 0$
      iii. En déduire que la droite $(P(t)P(t'))$ est tangente à E ssi $t' - t \equiv \pm\dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$
   (c) Soient $0 \leqslant t_1 < t_2 < t_3 \leqslant 2\pi$ trois réels.
   On suppose que les droites $(P(t_1)P(t_2))$ et $(P(t_2)P(t_3))$ sont toutes les deux tangentes à E.
   Montrer que la droite $(P(t_1)P(t_3))$ est alors elle aussi tangente à E.
   Compléter le dessin de la question 3(a) pour illustrer ce résultat.

CORRECTION EXERCICE 1

1. $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) = 4$
2. - **dÃ©finition:** Soit p un endomorphisme de E.
     On dit que p est UN PROJECTEUR DE E lorsque $p \circ p = p$ (càd $p^2 = p$)

   - **thÃ©orÃ¨me;** Soit p un projecteur de E.(càd p est un endomorphisme de E vérifiant $p \circ p = p$)
     On a alors :
     i) $\operatorname{Im} p \oplus \ker p = E$
     ii) $\operatorname{Im} p = \ker(p - id)$
     iii) p est <u>la</u> projection sur $\operatorname{Im} p = \ker(p - id) = E_1(p)$ parallèlement à $\ker p = E_0(p)$
     rem: on prouve dans la démonstration que

     $$\forall \vec{x} \in E, \vec{x} = \underbrace{p(\vec{x})}_{\in \operatorname{Im}(p)} + \underbrace{(\vec{x} - p(\vec{x}))}_{\in \ker(p)}$$

   - **thÃ©orÃ¨me:** oit f un endomorphisme de E, avec $\dim E = n < \infty$.
     Il y a équivalence entre :
     i.) f est un projecteur
     ii.) il existe une base $\mathcal{B}$ de E pour laquelle on a :

     $$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = diag(\underbrace{1, \ldots, 1}_{r}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-r})$$

     et dans ce cas, on a alors $\boxed{\operatorname{tr} f = \operatorname{rg} f = r}$

3. - Montrons que p est une application linéaire.
     Soit $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, et λ un scalaire.
     On note $M_3 = \lambda.M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} \lambda.a_1 + a_2 & \lambda.b_1 + b_2 \\ \lambda.c_1 + c_2 & \lambda.d_1 + d_2 \end{pmatrix}$
     d'où

     $$\begin{aligned}
     p(M_3) &= p(\begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix} \\
     &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_3 + d_3 & 0 \\ 0 & a_3 + d_3 \end{pmatrix} \\
     &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda.a_1 + a_2 + \lambda.d_1 + d_2 & 0 \\ 0 & \lambda.a_1 + a_2 + \lambda.d_1 + d_2 \end{pmatrix} \\
     &= \frac{\lambda}{2}. \begin{pmatrix} a_1 + d_1 & 0 \\ 0 & a_1 + d_1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_2 + d_2 & 0 \\ 0 & a_2 + d_2 \end{pmatrix} \\
     &= \lambda.p(M_1) + p(M_2)
     \end{aligned}$$

   - Comme par définition, $p : \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ on a peut affirmer que p est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

4. • On montre que p est un projecteur en vérifiant que $p \circ p = p$

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

On a

$$\begin{aligned}
(p \circ p)(M) = p(p(M)) &= p(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix}) \\
&= \frac{1}{2} p(\begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix}) && \text{car } p \text{ linéaire} \\
&= \frac{1}{2} . \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a+d+a+d & 0 \\ 0 & a+d+a+d \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix} \\
&= p(M)
\end{aligned}$$

• On sait alors que p est la projection sur $\mathrm{Im}(p) = \ker(p - id)$ parallèlement à $\ker(p)$.

• On a

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Longleftrightarrow p(M) = 0 \Longleftrightarrow a + d = 0 \Longleftrightarrow d = -a$$

donc

$$\begin{aligned}
Ker(p) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{K}^3\} &= \{a.\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=M_1} + b.\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=M_2} + c.\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=M_3} \mid (a,b,c) \in \mathbb{K}^3\} \\
&= \mathrm{vect}(M_1, M_2, M_3)
\end{aligned}$$

Montrons que (M_1,M_2,M_3) est une famille libre.

Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{K}^3$ tel que $\lambda_1.M_1 + \lambda_2.M_2 + \lambda_3.M_3 = 0$

On a ainsi $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & -\lambda_1 \end{pmatrix} = 0$

et donc directement $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\boxed{\text{Conclusion } (M_1,M_2,M_3) \text{ est une base de } \ker(p)}$

• Le théorème du rang appliqué à p donne $\mathrm{rg}(p) = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) - \dim \ker(p) = 4 - 3 = 1$

• On remarque $p(I_2) = I_2$ et ainsi $I_2 \in \ker(p - id)$

Comme on sait que $\mathrm{Im}(p) = \ker(p - id)$ et que $\dim \mathrm{Im}(p) = 1$, on peut alors affirmer que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{vect}(I_2)$

• $\boxed{\text{Conclusion } p \text{ est la projection sur } \mathrm{vect}(I_2) \text{ parallèlement à } \mathrm{vect}(M_1,M_2,M_3)}$

5. D'après le cours, on sait que la matrice de p dans la base concaténée $\mathcal{B} = (I_2,M_1,M_2,M_3)$ est

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. La base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est $\mathcal{C} = (\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix})$

   La calcul donne $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(p) = \begin{pmatrix}1/2 & 0 & 0 & 1/2\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\1/2 & 0 & 0 & 1/2\end{pmatrix}$
7. D'après la formule de changement de base pour les endomorphismes, en notant P la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$, on a $D = P^{-1}.A.P$.

   On a donc ici $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\1 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

   A noter que la matrice P n'est pas unique car on pourrait par exemple permuter les trois derniers vecteurs de la base $\mathcal{B}$

CORRECTION EXERCICE 2

1. $\ker(u) = \{x \in E \,|\, u(x) = 0\}$
2. **On suppose qu'il existe** $w \in \mathcal{L}(F,G)$ **tel que** $v = w \circ u$

   Soit $x \in \ker(u)$

   On a donc $u(x) = 0$

   Ainsi $v(x) = (w \circ u)(x) = w(u(x)) = w(0) = 0$ car w est une application linéaire.

   ce qui prouve que $x \in \ker(v)$

   $\boxed{\text{Conclusion } \ker(u) \subset \ker(v)}$
3. **On suppose que** $\dim E = n$, $\dim(\ker(u)) = n - p$ **et** $\dim F = r$
   (a)
   - Comme $\dim(\ker(u)) = n-p$, on sait qu'il existe $n-p$ vecteurs de E qui forment une base de $\ker(u)$.

     Notons $(e_{p+1}, \ldots ,e_n)$ une base de $\ker(u)$.

     (Vous pouvez bien vérifier qu'avec ces indices, il y a $n-p$ vecteurs dans cette famille)
   - La famille $(e_{p+1}, \ldots ,e_n)$ étant une famille libre de $n-p)$ vecteurs, le théorème de la base incomplète nous permet d'affirmer que l'on peut compéter cette famille à l'aide de $n-(n-p) = p$ vecteurs de E pour obtenir une base de E.

     Notons $(e_1, \ldots ,e_p)$ ces vecteurs.
   - On a bien montré qu'il existe $(e_1,e_2, \ldots ,e_n)$ une base de E telle que $(e_{n-p}, \ldots ,e_n)$ soit une base de $\ker(u)$
   - Le théorème du rang donne $\dim E = \dim\ker u - \mathrm{rg}(u)$.

     D'où $\boxed{rg(u) = n-(n-p) = p}$

   (b)
   - On sait que l'image d'une base de E par u est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(u)$.

     Donc
     $$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{vect}(u(e_1), \ldots ,u(e_n))$$
     or pour $k \in [\![n-p,n]\!]$ on a $u(e_k) = 0$ car $e_k \in \ker u$

     On en déduit ainsi que
     $$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{vect}(u(e_1), \ldots ,u(e_p))$$
     càd
     $$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{vect}(f_1, \ldots ,f_p)$$

- On vient de montrer que la famille $\mathcal{F} = (f_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} u$. Comme $card(\mathcal{F}) = p = \dim \operatorname{Im} u$, on peut par théorème affirmer que $\mathcal{F}$ est une base de $\operatorname{Im} u$

  Conclusion: $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est une base de $\operatorname{Im} u$

(c) i. Il s'agit de citer un théorème du cours, à savoir le théorème 7 du poly "Applications linéaires".
Une application est entièrement définie sur une base, ceci nous permet d'affirmer l'existence et l'unicité d'une application linéaire $w \in \mathcal{L}(F,G)$ tel que $w(f_i) = \begin{cases} v(e_i) & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

ii. On suppose que $\ker(u) \subset \ker(v)$
Pour prouver que $v = w \circ u$ on va montrer que ces deux applications coïncident sur la base $(e_1, \ldots, e_n)$.
Pour cela, on va distinguer deux cas

- Soit $i \in [\![1,p]\!]$
  On a

$$\begin{aligned} (w \circ u)(e_i) &= w(u(e_i)) \\ &= w(f_i) && \text{car } f_i = u(e_i) \\ \\ &= v(e_i) && \text{d'après 3(c)i)} \end{aligned}$$

- Soit $i \in [\![p+1,n]\!]$
  On sait alors que $e_i \in \ker(u)$
  - On a $u(e_i) = 0$ et comme w est une application linéaire,
    on a $(w \circ u)(e_i) = w(u(e_)) = w(0) = 0$
  - Comme $e_i \in \ker u$ et $\ker u \subset \ker v$ on a $e_i \in \ker v$ donc $v(e_i) = 0$
  - Ainsi $(w \circ u)(e_i) = v(e_i)$

On a montré que pour tout e_i de la base de E, on a $(w \circ u)(e_i) = v(e_i)$.
càd on a bien montré que $w \circ u$ et v coïncident sur une base!

CORRECTION EXERCICE 2

1. (a) On a $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(-t) &= -x(t) \\ y(-t) &= y(t) \end{cases}$
   Ainsi $M(-t) = s_{(Oy)}(M(t))$.

   Conclusion: Γ est symétrique par rapport à l'axe (Oy) et on peut restreindre l'étude à $\mathbb{R}^+$

   (b) - On a $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) &= 3(1-t^2) = 3(1-t)(1+t) \\ y'(t) &= 6t \end{cases}$
   Le signe des dérivées est donc simple à trouver.
   Les limites ne posent pas de problème non plus.

t	0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	
$x(t)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$
$y(t)$	1	$\nearrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$	0		$+$		

Il n'y a pas de points singuliers ;-)

Il y a une branche lorsque $t \to +\infty$

(c) On étudie la branche infinie quand $t \to +\infty$.

On a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{3t^2}{3t - t^3} = 0$

Conclusion: Il n'y a pas de droite asymptote lorsque $t \to +\infty$ mais uniquement une branche parabolique de direction (Ox)

(d) i. Soit $t_1 < t_2$.

On a

$$M(t_1) = M(t_2) \iff \begin{cases} x(t_1) & = x(t_2) \\ y(t_1) & = y(t_2) \end{cases} \iff \begin{cases} 3t_1 - t_1^3 & = 3t_2 - t_2^3 \\ t_1^2 & = t_2^2 \end{cases} \iff \begin{cases} 3t_1 - t_1^3 & = 3t_2 - t_2^3 \\ t_1 = \pm t_2 \end{cases}$$

Comme $t_1 < t_2$, on a donc

$$M(t_1) = M(t_2) \iff \begin{cases} 3t_1 - t_1^3 & = 3t_2 - t_2^3 \\ t_1 = -t_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 3(-t_2) - (-t_2)^3 & = 3t_2 - t_2^3 \\ t_1 = -t_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 3t_2 - t_2^3 = \\ t_1 = -t_2 \end{cases}$$

La première équation donne

$$3t_2 - t_2^3 = 0 \iff t_2(3 - t_2^2) = 0 \iff t_2(\sqrt{3} - t_2)(\sqrt{3} + t_2) = 0 \iff t_2 \in \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$$

On a donc les équivalences

$$M(t_1) = M(t_2) \iff \begin{cases} t_2 \in \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\} \\ t_1 = -t_2 \end{cases} \iff \begin{cases} t_2 = -\sqrt{3} \\ t_1 = \sqrt{3} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} t_2 = 0 \\ t_1 = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} t_2 = +\sqrt{3} \\ t_1 = -\sqrt{3} \end{cases}$$

La condition imposée $t_1 < t_2$ ne fait garder qu'une seule possibilité!

$\boxed{\text{Conclusion: } t_1 = -\sqrt{3} \text{ et } t_2 = \sqrt{3}}$

ii. On a $\begin{cases} x(\sqrt{3}) & = 3\sqrt{3} - (\sqrt{3})^2 = 0 \\ y(\sqrt{3}) & = 3\sqrt{3}) = 9 \end{cases}$

$\boxed{\text{Conclusion: Le point double a pour coordonnées } M(t_1) = M(t_2) = (0,9)}$

iii. • La tangente à Γ en $M(t_1)$ est dirigée par

$$\overrightarrow{f'(t_1)} = 3.\begin{pmatrix} 1-t_1^2 \\ 2t_1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1-3 \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix} = -6\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

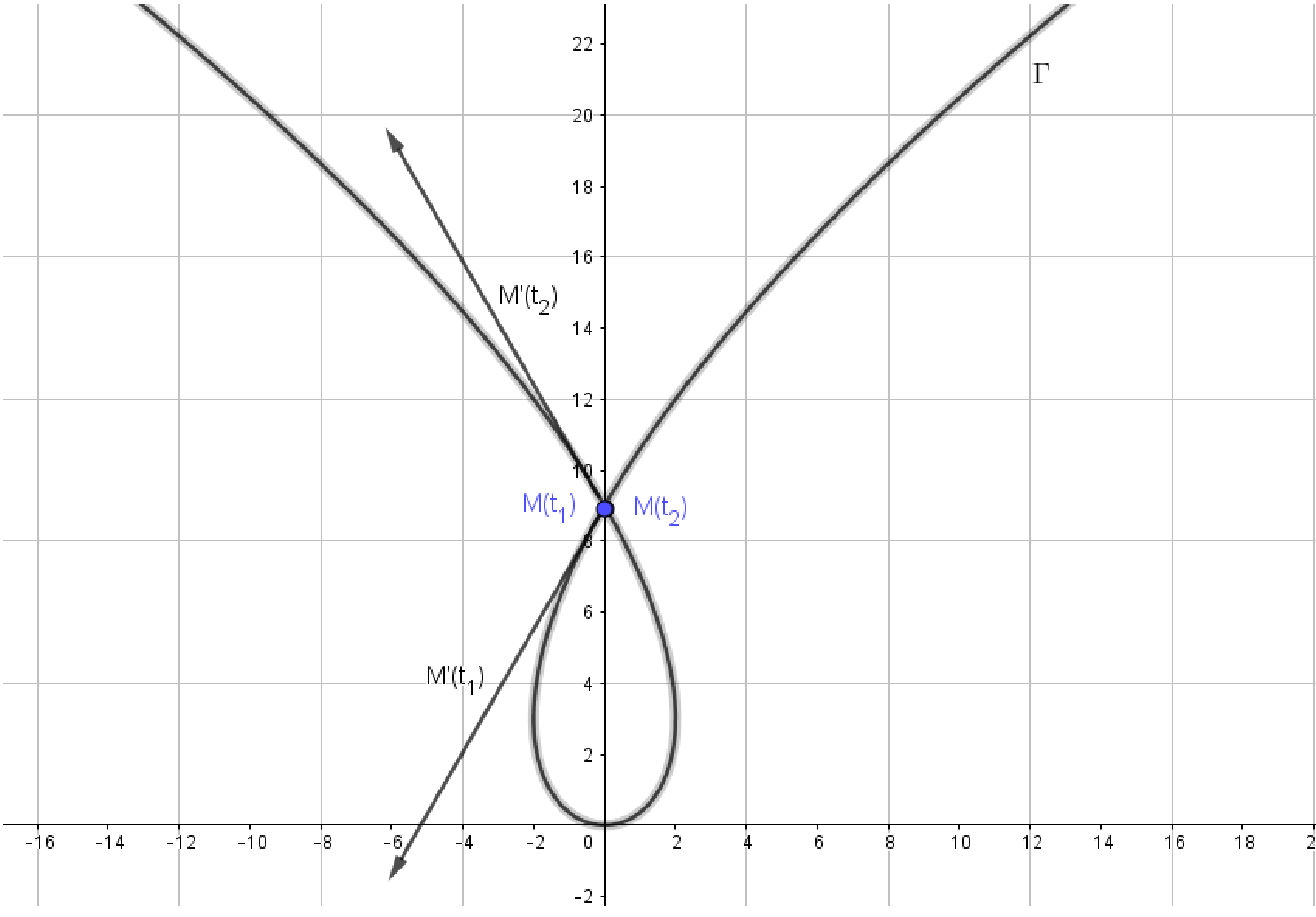
• La tangente à Γ en $M(t_2)$ est dirigée par

$$\overrightarrow{f'(t_2)} = 3.\begin{pmatrix} 1-t_2^2 \\ 2t_2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1-3 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} = -6\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

• Notons θ l'angle(non orienté) entre les deux tangentes.
On a

$$\cos\theta = \frac{<\overrightarrow{f'(t_1)},\overrightarrow{f'(t_2)}>}{||\overrightarrow{f'(t_1)}||.||\overrightarrow{f'(t_2)}||} = \frac{1^2-\sqrt{3}^2}{1^2+(\sqrt{3})^2} = \frac{-1}{2}$$

$$\boxed{\text{Conclusion: les deux tangentes se coupent sous un angle de } \frac{2\pi}{3}}$$



(e)

(f) On a

$$||f'(t)|| = \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2} = \sqrt{9(1-t^2)^2+36t^2} = 3.\sqrt{1+2t^2+t^4} = 3\sqrt{(1+t^2)^2} = 3.(1+t^2)$$

donc la longueur cherchée est

$$\int_{-\sqrt{3}}^{+\sqrt{3}} ||f'(t)||dt = \int_{-\sqrt{3}}^{+\sqrt{3}} 3.(1+t^2)dt = \left[3t+t^3\right]_{-\sqrt{3}}^{+\sqrt{3}} = 12\sqrt{3}$$

2. (a) Soit $u \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$

On a

- $\dfrac{1-\tan^2 u}{1+\tan^2 u} = \dfrac{1-\dfrac{\sin^2 u}{\cos^2 u}}{1+\dfrac{\sin^2}{\cos^2 u}} = \dfrac{\dfrac{\cos^2 u - \sin^2 u}{\cos^2 u}}{\dfrac{\cos^2 u + \sin^2 u}{\cos^2 u}} = \dfrac{\cos^2 u - \sin^2 u}{\cos^2 + \sin^2 u} = \dfrac{\cos(2u)}{1} = \cos(2u)$
- $\dfrac{2\tan u}{1+\tan^2 u} = \dfrac{2.\dfrac{\sin u}{\cos u}}{1+\dfrac{\sin^2 u}{\cos^2 u}} = \dfrac{2.\dfrac{\sin u}{\cos u}}{\dfrac{\cos^2 u + \sin^2 u}{\cos^2 u}} = \dfrac{2.\sin u.\cos u}{\cos^2 u + \sin^2 u} = \dfrac{\sin(2u)}{1} = \sin(2u)$

(b) On a

- $\dfrac{ds}{dt} = ||f'(t)|| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \cdots = 3.(1+t^2)$ (Q.1)f))
- $\overrightarrow{T} = \dfrac{f'(t)}{||f'(t)||} = \left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2}\right)$
- $\overrightarrow{N} = \left(\dfrac{-2t}{1+t^2}, \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)$

(c) Il s'agit de montrer que l'application $g : \varphi \mapsto \tan\frac{\varphi}{2}$ réalise une bijection de $]-\pi, +\pi[$ sur $\mathbb{R}$.
Je propose deux solutions:

i. par composition de bijections de référence.
   - La fonction $h : \varphi \mapsto \frac{\varphi}{2}$ réalise une bijection de $]-\pi, +\pi[$ sur $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$
   - La fonction tan réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.
   - Pourquoi parler de ces deux fonctions? Parce que $g = \tan \circ h$!
   - Or, on sait que la composée de deux bijections est encore une bijection donc on peut affirmer que g est une bijection de $]\pi, +\pi[$ sur $\mathbb{R}$

ii. en utilisant le théorème de la bijection
   - La fonction g est dérivable sur $]-\pi, +\pi[$ comme composée de fonctions dérivables et l'on a $\forall \varphi \in]-\pi, +\pi[, g'(\varphi) = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{\varphi}{2}\right) > 0$
   - On a $\lim\limits_{\varphi \to \pi^-} g(\varphi) = -\infty$ et $\lim\limits_{\varphi \to \pi^+} g(\varphi) = +\infty$
   - Comme g est continue et strictement monotone, on peut affirmer d'après le théorème de la bijection, que g réalise une bijection de $]-\pi, +\pi[$ sur $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

(d) D'après Q2a), on a directement $\overrightarrow{T} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$.
φ est donc le paramètre angulaire, que l'on note usuellement α,
càd, l'angle orienté entre le vecteur $\vec{i}$ et $\overrightarrow{T}$

(e) On pourrait calculer γ à l'aide de la méthode dite de 'tan α'.
Cependant, ici, on écrira plutÃ´t comme $t = \tan\frac{\alpha}{2}$,

$$\frac{dt}{d\alpha} = \frac{1}{2}.(1+\tan^2\frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{2}.(1+t^2)$$

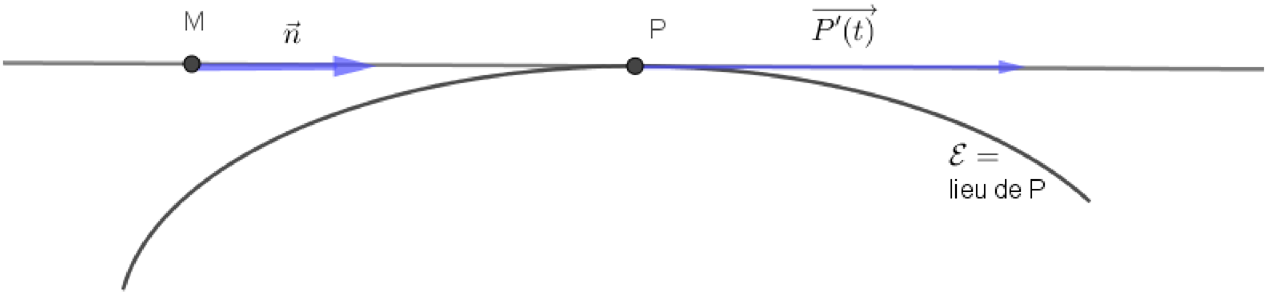
et donc

$$\gamma = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\dfrac{d\alpha}{dt}}{\dfrac{ds}{dt}} = \frac{\dfrac{2}{1+t^2}}{3(1+t^2)} = \frac{2}{3(1+t^2)^2}$$

(f) $C = M + R.\overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} 3t - t^3 \\ 3t^2 \end{pmatrix} + \dfrac{3}{2}(1+t^2)^2.\begin{pmatrix} \dfrac{-2t}{1+t^2} \\ \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4t^3 \\ \dfrac{3}{2} + 3t^2 - \dfrac{3}{2}.t^4 \end{pmatrix}$

(g) La développée à Γ est aussi obtenue comme l'enveloppe des normales à Γ.
La normale à Γ au point $M(t)$ est la droite, que nous noterons D_t, qui passe par le point $M(t)$ et de vecteur directeur $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2t \\ 1-t^2 \end{pmatrix}$.
a représentation paramétrique est donc $\lambda \mapsto M(t) + \lambda.\overrightarrow{n}(t)$.
Notons $\mathcal{E}$ l'enveloppe de cette famille.
On cherche une fonction λ de classe C^1 telle que $t \mapsto M(t) + \lambda(t).\overrightarrow{n}(t)$ paramètre une courbe dont la tangente au point courant est dirigée pas $\overrightarrow{n}(t)$
On a donc les équivalences suivantes:

$$\begin{aligned}
\text{le point } P(t) \in \mathcal{E} &\Longleftrightarrow \begin{cases} P(t) \text{ est un point de } D_t \\ D_t \text{ est la tangente à } \mathcal{E} \text{ en } P(t) \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda(t) \in \mathbb{R}, \text{tel que } P(t) = M(t) + \lambda(t).\vec{n}(t) \\ P'(t) \text{ et } \vec{n}(t) \text{ sont colinéaires} \end{cases}
\end{aligned}$$



or $P' = M' + \lambda'.\vec{n} + \lambda.\vec{n}\,'$ et ainsi:

$$\begin{aligned}
P'(t) \text{ et } \vec{n}(t) \text{ sont colinéaires} &\Longleftrightarrow \det(M' + \lambda'.\vec{n} + \lambda.\vec{n}\,', \vec{n}) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \det(M',\vec{n}) + \lambda'.\det(\vec{n},\vec{n}) + \lambda.\det(\vec{n}\,',\vec{n}) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \lambda = -\frac{\det(M',\vec{n})}{\det(\vec{n}\,',\vec{n})} \\
&\Longleftrightarrow \lambda = -\frac{\begin{vmatrix} 3(1-t^2) & -2t \\ 6t & 1-t^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & -2t \\ -2t & 1-t^2 \end{vmatrix}} \\
&= \lambda = \frac{3}{2}(1+t^2)
\end{aligned}$$

La développée est donc l'ensemble $\mathcal{E}$ de représentation paramétrique

$$t \mapsto M(t) + \frac{3}{2}(1+t^2).\begin{pmatrix} -2t \\ 1-t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4t^3 \\ \dfrac{3}{2} + 3t^2 - \dfrac{3}{2}t^4 \end{pmatrix}$$

On retombe bien sur le même résultat qu'avec la méthode de la question (f) !

CORRECTION EXERCICE 4

1. Notons $\mathcal{C}$ la conique en question.
   Soit $M(x,y)$.
   On a par définition
   $$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\Longleftrightarrow \frac{d(M,F)}{d(M,\Delta} = e \\ &\Longleftrightarrow d(M,F)^2 = e^2.d^2(M,\Delta) \qquad \textit{car les 2 membres sont positifs} \\ &\Longleftrightarrow (x-\sqrt{3})^2 + y^2 = \frac{3}{4}.\left(x - \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 \\ &\Longleftrightarrow \ldots \\ &\Longleftrightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{aligned}$$
   Il s'agit de l'ellipse d'équation $\boxed{\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1}$
2. (a) On note $F : (x,y) \mapsto x^2 + 4y^2 - 4$
   Soit $M_0 = (x_0,y_0) \in E$
   On a $grad_{M_0} F = \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 8y_0 \end{pmatrix}$
   On en déduire que $grad_{M_0} F = \vec{0}$ ssi $x_0 = y_0 = 0$
   Or le point $(0,0) \notin E$.

   Conclusion: tout point de E est régulier

   (b) Soit $M_0 = (x_0,y_0) \in E$.
   La droite tangente à E au point M_0 est la droite qui passe par le point $M_0(x_0,y_0)$ et de vecteur normal $grad_{M_0} F = 2\begin{pmatrix} x_0 \\ 4y_0 \end{pmatrix}$.
   Son équation cartésienne est donc
   $$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ 4y_0 \end{pmatrix} = 0$$
   ce qui donne en développant
   $$x_0 x + 4y_0 y - x_0^2 - 4y_0^2 = 0$$
   Comme $M_0 \in E$ on a $x_0^2 + 4y_0^2 = 4$, en remplaçant on trouve ce qui est demandé
   $\boxed{\text{Conclusion : la tangente au point } M_0 = (x_0,y_0) \in E \text{ a pour équation } \dfrac{x_0 x}{4} + y_0 y - 1 = 0}$
3. (a) Soit D une droite tangente à E.
   On sait donc qu'elle a une équation de la forme $\dfrac{x_0 x}{4} + y_0 y - 1 = 0$ avec $x_0^2 + 4y_0^1 = 4$
   Ainsi l'équation de D est proportionnelle à l'équation ci-dessus.
   Ainsi il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \lambda. \begin{pmatrix} x_0/4 \\ y_0 \\ -1 \end{pmatrix}$
   D'où $4u^2 + v^2 - w^2 = \lambda^2 \left(4.\left(\dfrac{x_0}{4}\right)^2 + y_0^2 - 1\right) = \dfrac{\lambda^2}{4}\left(x_0^2 + 4y_0^2 - 4\right) = 0$
   On a bien montré la première implication

(b) On suppose que $4u^2+v^2-w^2=0$

i. Montrons par l'absurde que $w \neq 0$.
On suppose que $w=0$
On a donc $4u^2+v^2=0$ Or une somme de termes positifs est nulle ssi chaque terme est nul,
d'où $u=v=0$
Contradiction car par hypothèse $(u,v) \neq (0,0)$

ii. D a donc aussi pour équation $\frac{u}{w}x+\frac{v}{w}y+1=0$ soit $\frac{-u}{w}x+\frac{-v}{w}y-1=0$

Posons $\begin{cases} x_0 &= \frac{-4u}{w} \\ y_0 &= \frac{-v}{w} \end{cases} \qquad (*)$

- Avec ce choix, on a

$$x_0^2+4y_0^2-4=16.\frac{u^2}{w^2}+4\frac{v^2}{w^2}-4=\frac{4}{w^2}\left(4u^2+v^2-w^2\right)=0$$

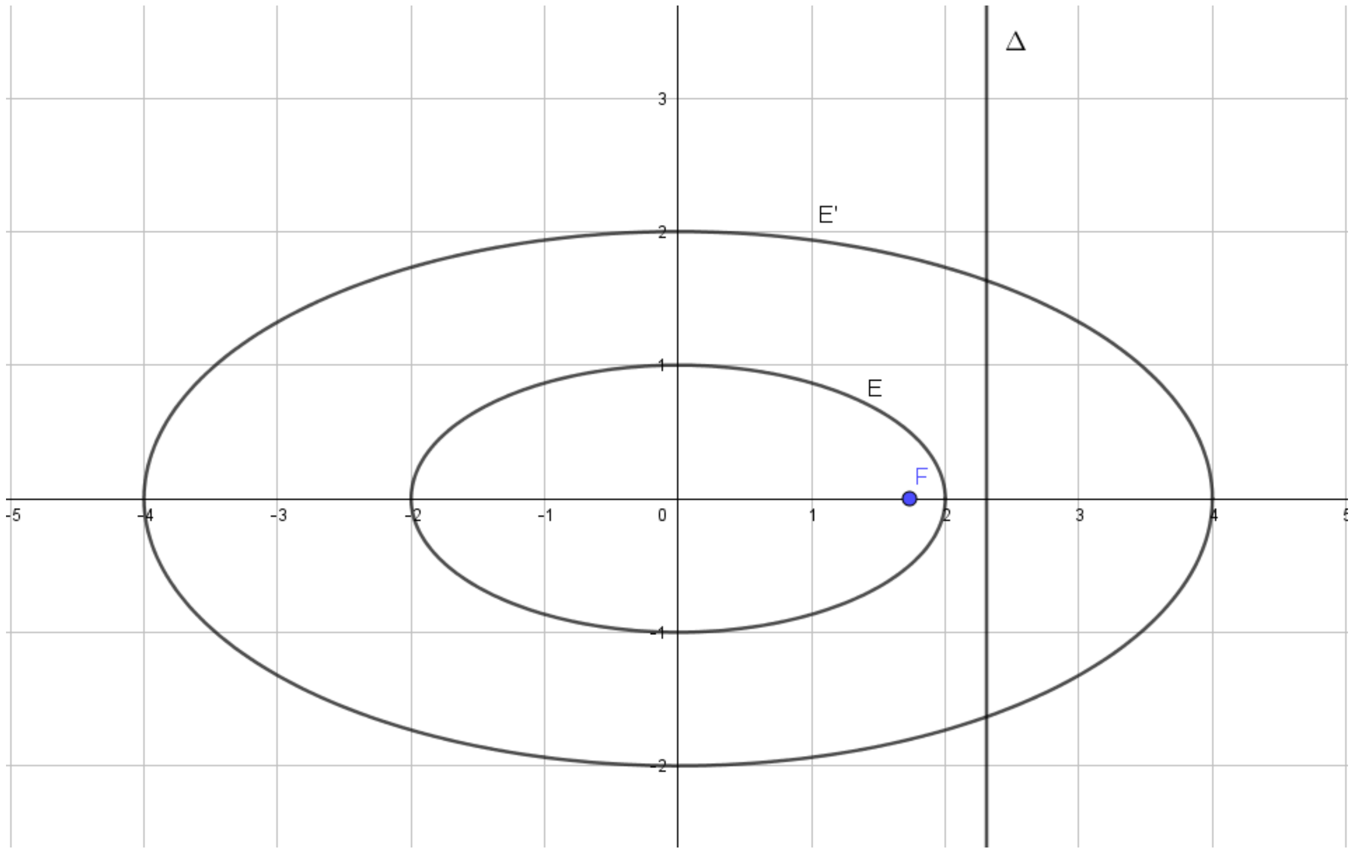
ce qui prouve que (x_0,y_0) est un point de E

- Avec ce choix, on a $ux+vy+w=-\frac{w.x_0}{4}x-w.y_0.y+w=\underbrace{w}_{\neq 0}.\left(\frac{x_0.x}{4}+y_0.y-1\right)$

et donc D a pour équation $\frac{x_0.x}{4}+y_0.y-1=0$

- On a ainsi prouvé que D est la droite tangente à E au point (x_0,y_0) défini (*)

4. (a)



(b) i. La droite $(P(t)P(t'))$ est la droite qui passe par le point $P(t)=(4.\cos(t),2\sin(t))$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{P(t)P(t')}=2.\begin{pmatrix} 2(\cos t'-\cos t) \\ \sin t'-\sin t \end{pmatrix}$.

Son équation cartésienne est donc

$$\begin{vmatrix} x - 4\cos t & 2(\cos t' - \cos t) \\ y - 2\sin t & \sin t' - \sin t \end{vmatrix} = 0$$

En développant on trouve

$$(\sin t' - \sin t).x - 2.(\cos t' - \cos t).y - 4.\cos t.\sin t' + 4.\sin t.\cos t' = 0$$

soit

$$(\sin t' - \sin t).x - 2.(\cos t' - \cos t).y - 4\sin(t' - t) = 0$$

ii. D'après Q2, on sait que cette droite est tangente à E ssi

$$4.(\sin t' - \sin t)^2 + (-2)^2.(\cos t' - \cos t)^2 - (-4)^2.\sin^2(t - t') = 0$$

En développant et en simplifiant par 4 cela donne

$$\underbrace{\sin^2 t' + \cos^2 t'}_{=1} + \underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{=1} - 2.\underbrace{(\sin t'.\sin t + \cos t' \cos t)}_{\cos(t'-t)} - 4.\sin^2(t' - t) = 0$$

En simplifiant par 2 et en utilisant $\sin^2(t' - t) = 1 - \cos^2(t' - t)$

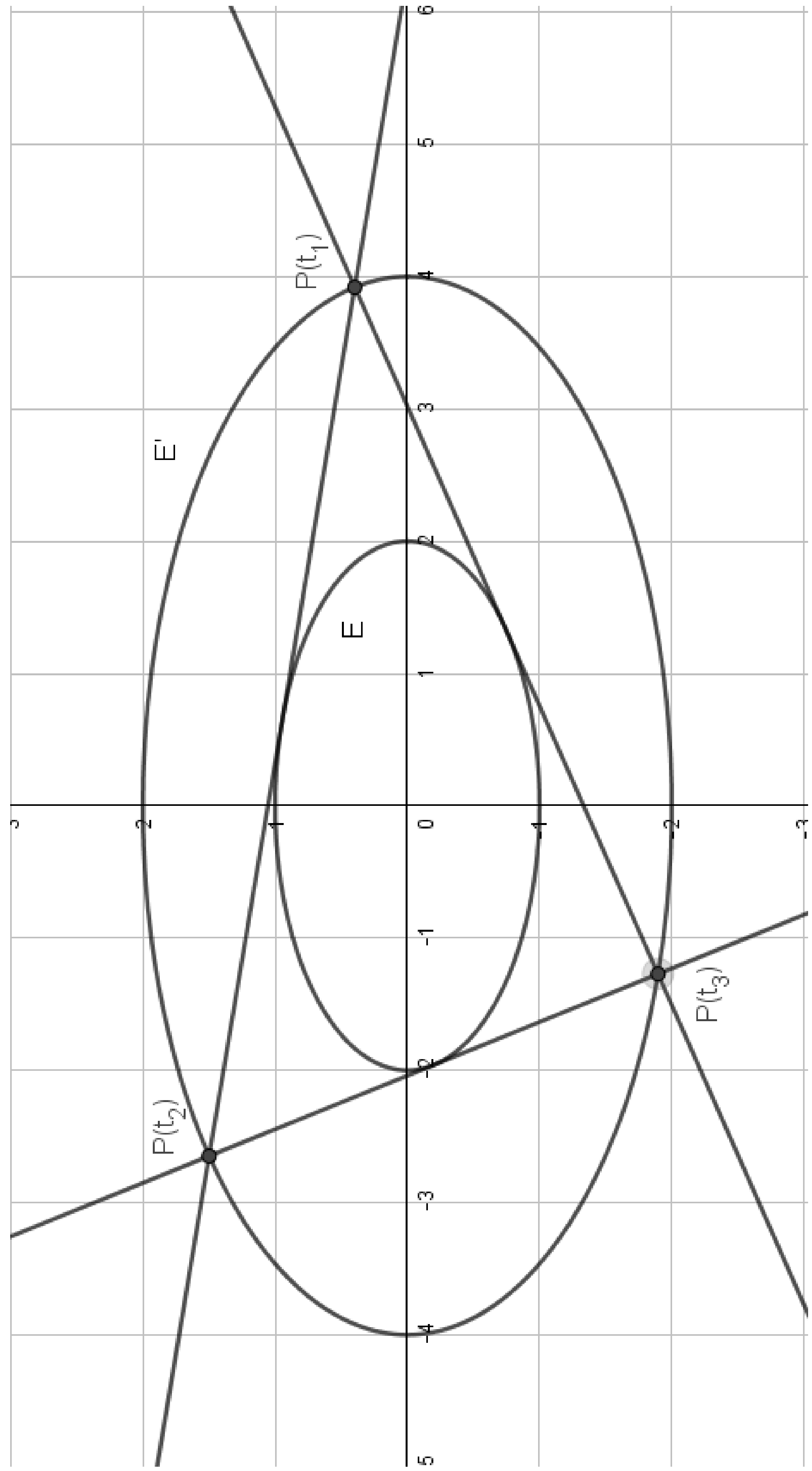
$$2\cos^2(t' - t) - \cos(t' - t) - 1 = 0$$

iii.
- Notons $X = \cos(t' - t)$
  L'équation ci-dessus s'écrit $2.T^2 - T - 1 = 0$
  Les solutions de cette équation sont $X = 1$ et $X = \dfrac{-1}{2}$
- On a $\cos(t' - t) = 1 \Longleftrightarrow t - t' \equiv 0[2\pi]$
  Ce qui est exclu car les points $P(t)$ et $P(t')$ sont distincts par hypothèse
- On a donc les équivalences

$$\begin{aligned} (P(t)P(t')) \text{ est tangente à } E &\Longleftrightarrow \cos(t' - t) = \frac{-1}{2} \\ &\Longleftrightarrow t' - t \equiv \pm\frac{2\pi}{3}\,[2\pi] \end{aligned}$$

(c) Soient $0 \leqslant t_1 < t_2 < t_3 \leqslant 2\pi$ trois réels.

- Comme $(P(t_1)P(t_2))$ est tangente à E on sait que $t_2 - t_1 \equiv \pm\dfrac{2\pi}{3}\,[2\pi]$.
  Comme $0 < t_2 - t_1 < 2\pi$ on a donc $t_2 - t_1 = \dfrac{2\pi}{3}$ ou $\dfrac{4\pi}{3}$
- Pour les mêmes raisons on a donc $t_3 - t_2 = \dfrac{2\pi}{3}$ ou $\dfrac{4\pi}{3}$
- On en déduit que $t_3 - t_1 = \dfrac{4\pi}{3}$ ou $\dfrac{6\pi}{3}$ ou $\dfrac{8\pi}{3}$
  Or $0 < t_3 - t_1 < 2\pi$ donc on a forcément $t_3 - t_1 = \dfrac{4\pi}{3}$
  Comme $\dfrac{4\pi}{3} \equiv \dfrac{-2\pi}{3}\,[2\pi]$, on peut affirmer d'après Q3(b)iii) que la droite $(P(t_1)P(t_3))$ est tangente à E !


E'
E
P(t1)
P(t2)
P(t3)