DS 1 du 26 septembre 2022

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte *(extrait de rapport de jury)*
- **L'usage de tout matériel électronique est interdit.**
- Vos résultats doivent être encadrés, à la règle, de préférence avec une couleur différente de celle d'écriture.
- Les abréviations sont à proscrire tant que vous ne les avez pas clairement définies dans la copie *(on n'écrira pas "mq" mais "montrer que" ... idem pour CV ou ACV)*
- Nous conseillons fortement aux candidats qui ne savent pas traiter une question d'indiquer qu'ils en admettent le résultat pour la suite. *(Ecrire par exemple: 3) j'admets le résultat de cette question)*
- Ce devoir est constitué de quatre exercices totalement indépendants: vous pouvez les traiter dans l'ordre de votre choix.

- **PAS DE SORTIE AVANT 16H50!**

EXERCICE 1

On rappelle que pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$ *entiers, on note* $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!.(n-k)!}$

On souhaite étudier la nature de la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}$.

Pour cela, on pose pour tout $n \geqslant 0, a_n = \dfrac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$ et $b_n = a_n.\sqrt{n}$

1. Simplifier pour tout n entier $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ et montrer que la suite (a_n) est un suite décroissante.
2. (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, on a $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{2n+1}{2.\sqrt{n}.\sqrt{n+1}}$

   (b) En déduire que $\ln(b_{n+1}) - \ln(b_n) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{8n^2}$
3. En déduire que la suite $(\ln b_n)$ est convergente puis justifier qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{\sqrt{n}}$
4. La série $\sum(-1)^n a_n$ est-elle absolument convergente? Justifier.
5. Déterminer la nature de la série $\sum(-1)^n a_n$.

EXERCICE 2

Dans cet exercice, nous allons étudier différentes propriétés de la fonction ch.
Les parties sont indépendantes entre elles.

Partie I: Questions de cours

1. Rappeler la définition de $\operatorname{ch} x$ avec les exponentielles
2. Rappeler l'ensemble de définition, la parité, la dérivée et le graphe de la fonction ch
3. Rappeler le DL en 0 à l'ordre 4 de ch
4. Déterminer un équivalent simple de ch en $+\infty$

Partie II: Développement en série entière de ch

1. A quoi est égal $\operatorname{ch}^{(n)}$ la dérivée $n-$ième de ch?
   Donner $\operatorname{ch}^{(n)}(0)$.
   (on pourra distinguer suivant la parité de n)
2. En utilisant judicieusement l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$\left|\operatorname{ch}(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right| \leqslant \operatorname{sh}(|x|).\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
3. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la série de terme général $\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ converge et que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch} x$
4. Retrouver ce résultat directement à l'aide de l'expression de $\operatorname{ch}(x)$ à l'aide des exponentielles et de la série liée à l'exponentielle.

Partie III: Etude d'une fonction définie par une intégrale

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on note $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \operatorname{ch}(t^2).dt$

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ tout entier
2. Etudier la parité de la fonction f
3. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$ on a $f(x) \geqslant x$
4. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner $f'(x)$.
   Donner le tableau de variation de f sur $[0, +\infty[$
5. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $u_n \in [0, +\infty[$ tel que $f(u_n) = \dfrac{1}{n}$
   (b) Etudier la monotonie de la suite (u_n)
   (c) Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite

Partie IV: Etude de la limite de deux suites indépendantes

1. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}.\sum\limits_{k=0}^{n-1} \operatorname{ch}\left(\dfrac{2k}{n}\right)$
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}.\sum\limits_{k=0}^{n} \operatorname{ch}\left(\dfrac{2k}{n^2}\right)$

$\boxed{\textbf{EXERCICE 3}}$

I) On considère la fonction $f : x \mapsto e^{-x}.\sin x$ et on note pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)dx$

1) Calculer u_n pour $n \in \mathbb{N}$.
(On trouvera $u_n = \dfrac{1}{2}\left((-1)^n.e^{-n\pi} - (-1)^{n+1}.e^{-(n+1)\pi}\right)$)

2) On s'intéresse dans cette question à la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$.
On note S_n sa somme partielle d'indice n
   a) Déterminer une expression très simple de S_n
   b) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge et donner la somme de cette série

II) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-\sqrt{t}}.\sin(t).dt$

1) Justifier que la série de terme général v_n est une série alternée.
2) Justifier que $\forall n \geqslant 0, |v_n| \leqslant \pi.e^{-\sqrt{n\pi}} = w_n$
3) Déterminer la nature de la série de terme général w_n et celle de terme général v_n
4) On note S la somme de la série de terme général v_n et R_n son reste d'ordre n.
On note également $h : t \mapsto e^{-\sqrt{t.\pi}}$

   a) Justifier que h possède des primitives sur l'intervalle $[1, +\infty[$
   b) Montrer que $\forall n \geqslant 2, 0 \leqslant h(n) \leqslant \displaystyle\int_{n-1}^{n} h(t)dt$
   c) A l'aide du changement de variable $\theta = \sqrt{t.\pi}$, déterminer une primitive de h
   d) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$ on a $|R_n| \leqslant 2.(1 + \sqrt{n\pi}).e^{-\sqrt{n\pi}}$

$\boxed{\textbf{EXERCICE 4}}$

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs telle que $\lim\limits_{\infty}(u_n)^{1/n} = L \in \mathbb{R}$ existe.
Dans cet exercice, nous allons montrer la règle de Cauchy qui indique que

i. si $L > 1$ alors la série diverge grossièrement
ii. si $L < 1$ alors la série converge

et traiter un exemple d'application.

1. Si $L > 0$ peut-on en déduire que $u_n \sim L^n$?
2. Ecrire avec les ε la définition de $\lim\limits_{\infty}(u_n)^{1/n} = L$ avec $L \in \mathbb{R}$
3. Dans cette question, on suppose que $L > 1$
   (a) Justifier qu'il existe $k > 1$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geqslant n_0$ on a $u_n \geqslant k^n$
   (b) En déduire $\lim u_n$ ainsi que la nature de la série de terme général u_n
4. Dans cette question on suppose que $L < 1$
   (a) Justifier qu'il existe $k < 1$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geqslant n_0$ on a $u_n \leqslant k^n$
   (b) En déduire la nature de la série de terme général u_n
5. Application: Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-n^2}$

CORRIGE EXERCICE 1

Thèmes: simplifications de factorielles, développements limités, théorème lien suite-série, règle des équivalents, critère spécial

1. Pour tout $n \geqslant 0$ on a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{4^{n+1}}.\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}}{\frac{1}{4^n}.\frac{(2n)!}{n!n!}} = \frac{1}{4}.\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

Comme (a_n) est une suite positive et que pour tout n on a $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1$,
on sait que $\boxed{(a_n) \text{ est une suite décroissante.}}$

2. (a) Soit $n \geqslant 0$. On a

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n}.\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \frac{2n+1}{2n+2}.\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \frac{2n+1}{2.\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$$

(b) donc:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2n+1}{2.\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \frac{2n+1}{2n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1+\frac{1}{2n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$

et

$$\ln b_{n+1} - \ln b_n = \ln\frac{b_{n+1}}{b_n} = \ln(1+\frac{1}{2n}) - \frac{1}{2}\ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o(\frac{1}{n^2}) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right)$$

On trouve bien

$$\ln b_{n+1} - \ln b_n = \frac{1}{8n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \sim \frac{1}{8n^2}$$

3.
- Comme $\frac{1}{8n^2}$ est positif, on peut affirmer par **la règle des équivalents** que les séries $\sum \ln b_{n+1} - \ln b_n$ et $\sum \frac{1}{8n^2}$ sont de même nature.
  Or la série $\sum \frac{1}{8n^2}$ est une série de Riemann convergente!
  On a donc $\sum \ln b_{n+1} - \ln b_n$ série convergente .
- **Le théorème lien série-suite** nous dit que

  La série $\sum \ln b_{n+1} - \ln b_n$ est convergente ssi la suite $(\ln b_n)$ converge

  On peut donc affirmer que $\boxed{\text{la suite } (\ln b_n) \text{ est convergente}}$
- Notons $l = \lim \ln b_n$.
  On a $b_n = \exp(\ln(b_n))$ pour tout $n \geqslant 1$
  Comme la fonction exp est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, **le théorème de composition de limites** permet de dire que

$$b_n = \exp(\ln(b_n)) \to \exp(l)$$

  On vient de prouver que la suite (b_n) converge vers un réel $\exp(l) > 0$.
  Notons $\lambda = \exp(l)$. On a $a_n = \frac{b_n}{\sqrt{n}} \sim \frac{\lambda}{\sqrt{n}}$

4. On a $|(-1)^n a_n| = a_n \sim \dfrac{\lambda}{\sqrt{n}}$.

   La même règle des équivalents permet d'affirmer que $\sum |(-1)^n a_n|$ diverge

   $\boxed{\text{Conclusion } \sum(-1)^n.a_n \text{ n'est pas absolument convergente.}}$

   rem: ici nous sommes dans le cas d'incertitude de la règle de D'Alembert cf. Q1)

5. Nous allons utiliser **le critère spécial de convergence des séries alternées.**

   Comme $a_n \sim \dfrac{\lambda}{\sqrt{n}}$ on peut dire que $\lim a_n = 0$.

   La suite (a_n) est une suite décroissante (Q1) et qui tend vers 0 donc on peut affirmer que $\boxed{\sum(-1)^n a_n \text{ est une série convergente}}$

CORRIGE EXERCICE 2

Thèmes: inégalité de Taylor-Lagrange, série de l'exponentielle, fonction définie à l'aide d'une intégrale, suite définie de manière implicite, somme de Riemann Partie I

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
2. ch est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, paire, de dérivée la fonction sh
3. $\mathrm{ch}(x) =_0 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + o(x^4)$
4. On a $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x}{2} + \dfrac{e^{-x}}{2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{2}$ car le second terme est négligeable devant le premier

Partie II

1.
   - On sait que $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$
   - On en déduit que $\boxed{\mathrm{ch}^{(n)} = \begin{cases} \mathrm{ch} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \mathrm{sh} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}}$
   - Comme $\mathrm{ch}\, 0 = 1$ et $\mathrm{sh}\, 0 = 0$, on en déduit que $\boxed{\mathrm{ch}^{(n)}(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}}$
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
   - Nous allons utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction ch, à l'ordre $2n$, avec les réels 0 et x.
     Cela donne
     $$\left| \mathrm{ch}(x) - \sum_{p=0}^{2n} \frac{\mathrm{ch}^{(p)}(0)}{p!}.(x-0)^p \right| \leqslant M.\frac{|x-0|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
     où M désigne le max de la fonction $|\,\mathrm{ch}^{(2n+1)}\,|$ sur l'intervalle $[0,x]$ (ou $[x,0]$ si $x < 0$)
   - Dans la somme $\sum\limits_{p=0}^{2n} \dfrac{\mathrm{ch}^{(p)}(0)}{p!}.(x-0)^p$ on sait que $\mathrm{ch}^{(p)}(0)$ est nul quand p est impair, **il ne reste donc que les termes d'indices pairs*, c'est pour cela que l'on peut poser $p = 2k$.**
     On a alors
     $$\sum_{p=0}^{2n} \frac{\mathrm{ch}^{(p)}(0)}{p!}.(x-0)^p = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{ch}^{(2k)}(0)}{(2k)!}.(x-0)^{2k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!}.x^{2k}$$
     ** sans cette précision, on ne peut poser a priori $p = 2k$ avec k entier!*

- M désigne le max de la fonction $|\operatorname{sh}|$ sur l'intervalle $[0,x]$ (ou $[x,0]$ si $x<0$)
  Montrons que $M \leqslant \operatorname{sh}(|x|)$ en distinguant proprement deux cas.
  - si $x \geqslant 0$.
    Sur l'intervalle $[0,x]$, la fonction sh est positive est croissante d'où $\forall t \in [0,x], 0 \leqslant \operatorname{sh} t \leqslant \operatorname{sh} x$.
    Ainsi $M = \max\limits_{t\in[0,x]} |\operatorname{sh} t| = \max\limits_{t\in[0,x]} (\operatorname{sh} t) \leqslant \operatorname{sh} x = \operatorname{sh} |x|$.
    (comme $x \geqslant 0$, on a $x = |x|$)
  - si $x < 0$.
    Sur l'intervalle $[x,0]$, la fonction sh est négative est croissante d'où $\forall t \in [x,0], 0 \geqslant \operatorname{sh} t \geqslant \operatorname{sh} x$.
    Ainsi, $\forall t \in [x,0], |\operatorname{sh} t| \leqslant |\operatorname{sh} x|$.
    Comme $x < 0$, on a $\operatorname{sh} x < 0$ donc $|\operatorname{sh} x| = -\operatorname{sh} x$
    Comme sh est impair, on a $-\operatorname{sh} x = \operatorname{sh}(-x)$
    Comme $x < 0$, on a $|x| = -x$
    On vient de prouver que $\forall t \in [x,0], |\operatorname{sh} t| \leqslant \operatorname{sh} |x|$
    Ainsi $M = \max\limits_{t\in[x,0]} |\operatorname{sh} t| \leqslant \operatorname{sh} |x|$.
- Avec tous ces éléments, l'inégalité de Taylor énoncé précédemment nous fournit l'inégalité voulue

3. Soit $x \in \mathbb{R}$.

   On sait d'après le **théorème des croissances comparées** que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$.

   Le théorème de convergence par encadrement permet d'affirmer d'après la question Q2 que $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{(2k)!}.x^{2k} = \operatorname{ch} x$

   Ce qui, avec le formulaire des séries, correspond exactement à dire que la série de terme général $\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ converge et que $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} = \operatorname{ch} x$

4. On sait que $\forall z \in \mathbb{R}, e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$

   On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) &= \frac{1}{2}.\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n + (-x)^n}{n!} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n + (-1)^n x^n}{n!} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 + (-1)^n) x^n}{n!}
\end{aligned}$$

   lorsque n est impair on a $1 + (-1)^n = 0$, et donc **dans la somme précédente ne restent que les termes d'indices pairs, c'est pour cela que l'on peut poser** $n = 2k$, cela donne

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1 + (-1)^{2k}) x^{2k}}{(2k)!} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+1) x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

rem: en procédant ainsi, nous prouvons à la fois la convergence de la série et nous montrons que sa somme vaut $\operatorname{ch} x$ *!*

$\boxed{\text{Partie III}}$

1. Notons $g : t \mapsto \operatorname{ch}(t^2)$.
   La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$, elle possède donc des primitives sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, l'intégrale de g sur le segment $[x,2x]$ (ou $[2x,x]$ quand $x < 0$) existe bien
2. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   En effectuant le changement de variable $\theta = -t$ dans l'intégrale $f(x)$ on obtient
   $$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \operatorname{ch}(t^2)dt = -\int_{x}^{2x} \operatorname{ch}((-\theta)^2)d\theta = -\int_{x}^{2x} \operatorname{ch}(\theta^2)d\theta = -f(x)$$
   La fonction $\boxed{f \text{ est impaire}}$
3. Soit $x \geqslant 0$.
   Pour tout $t \in [x,2x]$ on a $\operatorname{ch}(t^2) \geqslant 1$
   donc par croissance de l'intégrale, on obtient
   $$f(x) = \int_{x}^{2x} \operatorname{ch}(t^2)dt \geqslant \int_{x}^{2x} 1.dt = x$$
   On a bien montré que $\boxed{\forall x \geqslant 0, f(x) \geqslant x}$
4.
   - Comme g est continue sur $\mathbb{R}$ on sait que g admet des primitives sur $\mathbb{R}$.
     Notons G l'une d'entre elles.
     On a ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = G(2x) - G(x)$
     La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de fonctions dérivables et l'on a
     $$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2g(2x) - g(x) = 2.\operatorname{ch}(4x^2) - \operatorname{ch}(x^2)$$
   - Soit $x \geqslant 0$.
     On a
     $$4x^2 \geqslant x^2$$
     et comme la fonction ch est croissante sur $[0, +\infty[$ on a
     $$\operatorname{ch}(4x^2) \geqslant \operatorname{ch}(x^2)$$
     On en déduit que
     $$f'(x) = \underbrace{\operatorname{ch}(4x^2)}_{\geqslant 1} + \underbrace{\operatorname{ch}(4x^2) - \operatorname{ch}(x^2)}_{\geqslant 0} \geqslant 1 > 0$$
     La fonction f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$
5. (a) On utilise **le théorème de la bijection.**
   La fonction f est continue et strictement monotone sur l'intervalle $[0, +\infty[$, elle réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $f([0, +\infty[) = [0, +\infty[$
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Comme $\dfrac{1}{n} \in [0, +\infty[$, on peut affirmer qu'il existe un unique $u_n \in [0, +\infty[$ tel que $f(u_n) = \dfrac{1}{n}$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Comme
   $$f(u_{n+1}) = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = f(u_n)$$
   et que f est strictement croissante, on peut affirmer que
   $$u_{n+1} < u_n$$
   On a montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} < u_n$.

   $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est strictement décroissante}}$

(c) • La suite (u_n) est minorée par 0 et décroissante, donc elle converge.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
D'après Q3), on a $f(u_n) \geqslant u_n$
On en déduit que $\forall n \geqslant 1, \frac{1}{n} \geqslant u_n \geqslant 0$.
Comme $\lim \frac{1}{n} = 0$, **le théorème de convergence par encadrement** permet d'affirmer que $\boxed{\lim u_n = 0}$

$\boxed{\text{Partie IV}}$

1. On reconnait une somme de Riemann liée à la fonction $f : x \mapsto \mathrm{ch}(2x)$
La fonction f est continue sur le segment [0,1], on peut donc écrire par théorème

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{ch}\left(\frac{2k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-0}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(0+k.\frac{1-0}{n}) = \int_0^1 f(t)dt$$

avec

$$\int_0^1 f(t)dt = \left[\frac{\mathrm{sh}(2t)}{2}\right]_0^1 = \frac{\mathrm{sh}(2)}{2}$$

2. Cette fois ce n'est pas une somme de Riemann, nous allons procéder par encadrement.
Notons $u_n = \frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}\left(\frac{2k}{n^2}\right)$

   • Comme la fonction ch est croissante sur $\mathbb{R}^+$ on a pour tout $n \geqslant 1$

$$\forall k \in [\![0,n]\!], 1 = \mathrm{ch}\left(\frac{0}{n^2}\right) \leqslant \mathrm{ch}\left(\frac{2k}{n^2}\right) \leqslant \mathrm{ch}\left(\frac{2n}{n^2}\right) = \mathrm{ch}\left(\frac{2}{n}\right)$$

   • On a donc par sommation

$$\frac{1}{n}.\sum_0^n 1 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}.\sum_0^n \mathrm{ch}\left(\frac{2}{n}\right)$$

   càd

$$\frac{n+1}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{n+1}{n}.\,\mathrm{ch}\left(\frac{2}{n}\right)$$

   • Comme $\lim \frac{n+1}{n} = \lim \frac{n+1}{n}.\,\mathrm{ch}\left(\frac{2}{n}\right) = 1$, on peut affirmer d'après le théorème des gendarmes que $\lim u_n = 1$

CORRECTION DE L'EXERCICE 3

Thèmes: intégration par parties, changement de variable, procédé télescopique, théorème de croissance de l'intégrale, reste d'une série convergente, théorèmes de comparaison pour les séries numériques

I) 1) Il suffit de réaliser une double intégration par parties et de savoir que pour tout entier n on a $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et $\sin(n\pi) = 0$

2) a) Notons $a_n = \frac{1}{2}.(-1)^n.e^{-n\pi}$.
On a vu que pour tout entier n on a $u_n = a_n - a_{n+1}$
(à ce stade, on reconnait un procédé télescopique)
On a ainsi

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} a_k - a_{k+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n+1} a_k = a_0 - a_{n+1}$$

Conclusion: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{2}.e^{-(n+1)\pi}}$
rem: on aurait aussi pu reconnaitre deux termes géométriques de raison $-e{-}\pi$

b) On a $\lim S_n = \dfrac{1}{2}$ (limite finie)

Conclusion: $\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ est convergente et l'on a } \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{1}{2}}$

II) 1)
- Nous allons justifier que $u_n \geqslant 0$ pour n pair et $u_n \leqslant 0$ pour n impair
- Soit $n = 2p$ un entier pair.
  Sur l'intervalle $[n\pi,(n+1)\pi] = [2p\pi,2p\pi + \pi]$, le sinus est positif.
  La fonction $t \mapsto e^{-\sqrt{t}}.\sin(t)$ est positive sur le segment $[n\pi,(n+1)\pi]$,
  donc par positivité de l'intégrale on a $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-\sqrt{t}}.\sin(t)dt \geqslant 0$
- Soit $n = 2p+1$ un entier impair.
  Sur l'intervalle $[n\pi,(n+1)\pi] = [(2p+1)\pi,(2p+2)\pi]$, le sinus est négatif.
  La fonction $t \mapsto e^{-\sqrt{t}}.\sin(t)$ est négative sur le segment $[n\pi,(n+1)\pi]$,
  donc on a $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-\sqrt{t}}.\sin(t)dt \leqslant 0$

2)
- **L'inégalité triangulaire intégrale** nous donne

$$|v_n| = \left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-\sqrt{t}}.\sin(t).dt\right| \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|e^{-\sqrt{t}}.\sin(t)\right| dt = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-\sqrt{t}}.\left|\sin(t)\right| dt$$

- On a

$$\forall t \in [n\pi,(n+1)\pi], |\sin(t)| \leqslant 1$$

  et comme la fonction $t \mapsto e^{-\sqrt{t}}$ est décroissante, on a

$$\forall t \in [n\pi,(n+1)\pi], e^{-\sqrt{t}} \leqslant e^{-\sqrt{n\pi}}$$

  Ainsi

$$\forall t \in [n\pi,(n+1)\pi], e^{-\sqrt{t}}.|\sin t| \leqslant e^{-\sqrt{n\pi}}$$

  Par croissance de l'intégrale, on a donc

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-\sqrt{t}}.\left|\sin(t)\right| dt \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-\sqrt{n\pi}}dt = \pi.e^{-\sqrt{n\pi}}$$

  Conclusion: on a bien montré que $\forall n \geqslant 0, |v_n| \leqslant \pi.e^{-\sqrt{n\pi}} = w_n$

3)
  i. On a $w_n = o(\dfrac{1}{n^2})$ avec $\sum \dfrac{1}{n^2}$ ACV donc par théorème de comparaison avec le o on $\sum w_n$ ACV
  ii. On a pour tout $n, 0 \leqslant |v_n| \leqslant w_n$ avec $\sum w_n$ CV
  Le théorème de comparaison par majoration permet d'affirmer que $\sum |v_n| CV$.
  On a montré que $\sum v_n$ est ACV

4) On note $S = \sum_{k=0}^{n} v_k$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$
  i. Par composition la fonction h est continue sur $[1,+\infty[$ (sur $[0,+\infty[$ même), donc par théorème h admet des primitives sur cet intervalle
  ii. Soit $n \geqslant 2$

- La fonction h est clairement positive (strictement même), donc $0 \leqslant h(n)$
- La fonction h est décroissante sur l'intervalle $[n-1,n]$ donc

$$\forall t \in [n-1,n], h(n) \leqslant h(t)$$

  Par croissance de l'intégrale, on a

$$\int_{n-1}^{n} h(n)dt \leqslant \int_{n-1}^{n} h(t)dt$$

càd
$$h(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} h(t)dt$$

iii. Notons H une primitive de h.
On fait le changement de variable $\theta = \sqrt{t.\pi}$ ce qui donne $\theta^2 = t.\pi$ et donc $2\theta.d\theta = \pi.dt$
On a
$$H(x) = \int^{x} e^{-\sqrt{t\pi}}dt = \frac{2}{\pi}\int^{\sqrt{x\pi}} \theta.e^{-\theta}.d\theta$$
On fait alors une ipp en posant $u(\theta) = \theta$ et $v'(\theta) = e^{-\theta}$ (et donc $v(\theta) = -e^{-\theta}$) Cela donne
$$\begin{aligned}\int^{\sqrt{x\pi}} \theta.e^{-\theta}.d\theta &= \left[-\theta.e^{-\theta}\right]^{\sqrt{x\pi}} + \int^{\sqrt{x\pi}} e^{-\theta}d\theta\\ &= \left[-\theta.e^{-\theta}\right]^{\sqrt{x\pi}} - \left[e^{-\theta}\right]^{\sqrt{x\pi}}\\ &= -e^{\sqrt{x\pi}}(\sqrt{x\pi}+1) + Cste\end{aligned}$$
On trouve comme primitive de h la fonction $\boxed{H : x \mapsto \frac{-1}{2}.e^{\sqrt{x\pi}}(\sqrt{x\pi}+1) + Cste}$

iv. Soit $n \geqslant 1$ fixé.
- Par inégalité triangulaire on a
$$|R_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |v_k|$$
- D'après QII)2), on a
$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |v_k| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \pi.e^{-\sqrt{k\pi}} = \pi\sum_{k=n+1}^{\infty} h(k)$$
- Pour être soigneux, on écrit pour tout $N > n$
$$\sum_{k=n+1}^{\infty} h(k) = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=n+1}^{N} h(k)$$
D'après QII4b) on a
$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=n+1}^{N} h(k) \leq \lim_{N\to\infty}\sum_{k=n+1}^{N}\int_{k-1}^{k} h(t)dt = \lim_{N\to\infty}\int_{n}^{N} h(t)dt \qquad \text{(relation de Chasles)}$$
or
$$\lim_{N\to\infty}\int_{n}^{N} h(t)dt = \lim_{N\to\infty} H(N) - H(n) = -H(n)$$
car d'après le théorème des croissances comparées, on a $\lim\limits_{N\to\infty} H(N) = 0$
- Au final, on a bien montré que
$$|R_n| \leqslant H(n) = \frac{1}{2}.e^{\sqrt{n\pi}}(\sqrt{n\pi}+1)$$

$\boxed{\text{CORRECTION DE L'EXERCICE 4}}$

Thèmes: définition de la limite avec les ε, théorème de comparaison pour les séries

1. Si vous avez répondu oui, c'est que vous n'avez pas été attentif en classe...
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |u_n^{1/n} - L| \leqslant \varepsilon$

   Dans la suite, on pose $v_n = u_n^{1/n}$

3. Soit $L > 1$

   (a) Par hypothèse, on sait que

   $$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ L - \varepsilon \leqslant v_n \leqslant L + \varepsilon$$

   L'idée est de choisir un $\varepsilon > 0$ tel que $L - \varepsilon > 1$. (et l'on pose alors $k = L - \varepsilon$)

   Comme $L - 1 > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $L - 1 > \varepsilon > 0$, (par exemple $\varepsilon = \dfrac{L-1}{2}$)

   Pour cet ε ainsi fixé, on note $k = L - \varepsilon > 1$.

   On peut alors affirmer que

   $$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ k = L - \varepsilon \leqslant v_n \leqslant L + \varepsilon$$

   c'est à dire en particulier que

   $$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ k \leqslant v_n = u_n^{1/n}$$

   La fonction $t \mapsto t^n$ étant croissante sur $\mathbb{R}^+$ (et on a $0 < k \leqslant v_n$),
   on peut en déduire que

   $$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ k^n \leqslant u_n$$

   $\boxed{\textbf{Conclusion:}\text{ on a montré que } \exists\, k > 1, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ k^n \leqslant u_n}$

   (b) Comme $k > 1$ on sait que $\lim k_n = +\infty$.
   Le théorème de compatibilité de passage à la limite permet d'affirmer que $\boxed{\lim u_n = +\infty}$.

   Ainsi $\boxed{\text{la série de terme général } u_n \text{ est grossièrement divergente.}}$

4. (a) Par hypothèse, on sait que

   $$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ L - \varepsilon \leqslant v_n \leqslant L + \varepsilon$$

   L'idée est de choisir un $\varepsilon > 0$ tel que $L + \varepsilon > 1$. (et l'on pose alors $k = L + \varepsilon$)

   Comme $1 - L > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $1 - L > \varepsilon > 0$, (par exemple $\varepsilon = \dfrac{1-L}{2}$)

   Pour cet ε ainsi fixé, on note $k = L + \varepsilon > 1$.

   On peut alors affirmer que

   $$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ L - \varepsilon \leqslant v_n \leqslant L + \varepsilon = k$$

   c'est à dire en particulier que

   $$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ v_n = u_n^{1/n} \leqslant k$$

La fonction $t \mapsto t^n$ étant croissante sur $\mathbb{R}^+$ (et on a $0 < v_n <\leqslant k$),
on peut en déduire que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant k^n$$

$\boxed{\textbf{Conclusion:} \text{ on a montré que } \exists\, k < 1, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant k^n}$

(b) On a montré que pour n assez grand, on a $0 \leqslant u_n \leqslant k^n$.
Comme $|k| < 1$, on sait que $\sum k^n$ est une série convergente.
Le théorème de comparaison des séries positives permet de conclure que
$\boxed{\text{la série de terme général } u_n \text{ converge}}$

5. (u_n) est un suite à termes strictement positifs et l'on a pour tout $n \geqslant 1$

$$\begin{aligned} u_n^{1/n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} &= e^{-n\ln(1+\frac{1}{n})} \\ &= e^{-n.(\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}))} \\ &= e^{-1+o(1)} \end{aligned}$$

La fonction exp étant continue sur $\mathbb{R}$, on a par composition de limites $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-1+o(1)} = e^{-1} < 1$

Grâce à la régle de Cauchy, on peut affirmer que $\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ est convergente}}$