PT* 2023-24
DS 1 du 18 septembre 2023
durée 3h

- **La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte** *(extrait de rapport de jury)*

- **L'usage de tout matériel électronique est interdit.**

- **Vos résultats doivent être encadrés, à la règle, de préférence avec une couleur différente de celle d'écriture.**

- Les abréviations sont à proscrire tant que on ne les pas clairement définies dans la copie
(on n'écrira pas "mq" mais "montrer que" , on n'écrira pas "ipp" mais "intégration par parties"...)

- Nous conseillons fortement aux candidats qui ne savent pas traiter une question d'indiquer qu'ils en admettent le résultat pour la suite.
(Ecrire par exemple: 3) j'admets le résultat de cette question)

- Ce devoir est composé de 2 problèmes, totalement indépendants

---

PROBLEME 1

Ce problème est constitué de 3 parties

On considère la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $a_n = \displaystyle\int_0^1 t^n e^{-t} dt$

Partie I: étude de la suite (a_n)

1. Calculer a_0
2. Montrer que la suite (a_n) est une suite décroissante.
3. Montrer que $\lim a_n = 0$
4. A l'aide d'un intégration par parties, justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, (n+1).a_n - a_{n+1}$ est une constante que l'on déterminera.
5. En déduire que $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-1}}{n}$

Partie II: une utilisation de la suite (a_n)

Dans cette partie on note $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $a_n = \dfrac{n!}{e}\left(e - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}\right)$
2. En déduire que la suite (S_n) est convergente et donner sa limite.
3. Justifier que lorque n tend vers l'infini, on a $S_n = e + o\left(\dfrac{1}{n!}\right)$
4. Montrer que pour tout entier naturel n on a $0 \leqslant e - S_n \leqslant \dfrac{e-1}{n!}$.
   Sachant que $e \leqslant 3$, indiquer un moyen de déterminer une valeur approchée de e à 10^{-3} près.

Partie III: le début d'un développement asymptotique(FACULTATIF, NE PAS TRAITER

1. A l'aide de la question 4 de la partie I, exprimer a_n en fonction de n et de a_{n+2} pour $n \in \mathbb{N}$
2. En déduire que

$$a_n = \frac{e^{-1}}{n} + o(\frac{1}{n^2})$$

PROBLEME 2

On considère la fonction $\boxed{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\arctan t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}}$

Partie I: Quelques résultats sur la fonction $\arctan$ utiles par la suite

1. Montrer que $\forall t \in]0, +\infty[$, $\arctan t + \arctan \dfrac{1}{t} = \dfrac{\pi}{2}$.
   Quelle égalité analogue a-t-on sur $]-\infty, 0[$?

2. Montrer que $\forall t > 0, \dfrac{t}{1+t^2} < \arctan t < t$.

3. A l'aide de la formule de Taylor-Young, retrouver le DL en 0 à l'ordre 3 de la fonction arctan

Partie II: premières propriétés de la fonction f

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et étudier la parité de f

2. Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}$, et donner $f'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

3. Etudier les variations de f et dessiner l'allure de sa courbe représentative

Partie III: étude d'une fonction définie avec f

Dans cette partie, on note $G : x \in]0, +\infty[\mapsto \displaystyle\int_{1/x}^{x} f(t)dt$.

A l'aide du changement de variable $\theta = \dfrac{1}{t}$, montrer que $\forall x > 0, G(x) = \dfrac{\pi}{2}.\ln x$

Partie IV: propriétés d'une autre fonction définie avec f

Dans cette partie, on note $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

On pose également $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{F(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$ et indiquer ce que représente F pour la fonction f

2. Déterminer le signe de $F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$

3. Montrer que φ est une fonction paire

4. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et préciser $\varphi'(x)$.
   (on donnera une expression en fonction de x et de $f(x) - \varphi(x)$)

5. Justifier qu'au voisinage de 0 on a $F(x) = x + o(x^2)$ puis en déduire que φ est dérivable en 0 et donner $\varphi'(0)$

6. Justifier que $\forall x > 0, f(x) < \varphi(x) < 1$
On pourra appliquer l'égalité des accroissements finis à F sur l'intervalle $[0,x]$

7. Montrer que φ est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$, et justifier que φ possède une limite finie en $+\infty$

8. Montrer que pour tout $x > 0$, il existe un réel $c_x \in]x,2x[$ tel que $F(2x) - F(x) = x.f(c_x)$

9. En déduire que $\lim\limits_{+\infty} \varphi = 0$

Partie V: Etude d'une suite

Dans cette partie, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \varphi(u_n)$

1. En utilisant les propriétés montrées dans la partie IV, montrer que l'équation $\varphi(x) = x$ possède une et une seule solution dans l'intervalle $]0,1]$.
On note α cette solution

2. Montrer que $\forall x > 0, |\varphi'(x| \leqslant \dfrac{1}{x}(1 - f(x))$, puis que $\dfrac{1}{x}(1 - f(x)) = \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt$

3. Justifier que $\forall t \in \mathbb{R}^+, 0 \leqslant \dfrac{t}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{2}$ puis en déduire que $\forall x > 0, |\varphi'(x)| \leqslant \dfrac{1}{4}$

4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{4}|u_n - \alpha|$

5. Montrer avec soin que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{4^n}.|u_0 - \alpha|$

6. En déduire que (u_n) converge et donner sa limite

CORRECTION DU PROBLEME I

Partie I

1. $a_0 = \int_0^1 e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^1 = 1 - e^{-1}$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   On a
   $$a_n - a_{n+1} = \int_0^1 t^n e^{-t}dt - \int_0^1 t^{n+1}e^{-t}dt = \int_0^1 (t^n - t^{n+1})e^{-t}dt = \int_0^1 t^n(1-t)e^{-t}dt$$
   La fonction $t \mapsto t^n(1-t)e^{-t}$est clairement positive sur le segment [0,1], on en déduit par positivité de l'intégrale que
   $$a_n - a_{n+1} = \int_0^1 t^n(1-t)e^{-t}dt \geqslant 0$$
   On a prouvé que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geqslant a_{n+1}$, càd que $\boxed{\text{la suite } (a_n) \text{ est décroissante}}$
3. Soit $n \geqslant 0$ fixé.
   Pour tout réel $t \in [0,1]$, on a $0 \leqslant t^n e^{-t} \leqslant t^n$ car $0 \leqslant e^{-t} \leqslant 1$ et $t^n \geqslant 0$
   Et donc par croissance de l'intégrale, en intégrant sur le segment [0,1] cela nous donne
   $$\int_0^1 0dt \leqslant \int_0^1 t^n e^{-t}dt \leqslant \int_0^1 t^n dt, \text{ soit } \boxed{0 \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{n+1}}$$
   Reste alors à utiliser le théorème de convergence par encadrement (ex "des gendarmes") pour en déduire que $\boxed{\lim a_n = 0}$
4. Soit $n \geqslant 0$ fixé.
   On effectue une intégration par parties en posant $u(t) = t^{n+1}$ et $v(t) = e^{-t}$, ce qui donne
   $$(n+1)a_n = \int_0^1 (n+1).t^n.e^{-t}dt = \left[t^{n+1}e^{-t}\right]_0^1 + \int_0^1 t^{n+1}e^{-t} = e^{-1} + a_{n+1}$$
   On a montré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)a_n - a_{n+1} = e^{-1}}$ càd $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{n+1}(e^{-1} + a_{n+1})}$
5.
   - Si l'on n'est pas à l'aise avec les équivalents et o,
     on revient à la définition et on forme le quotient
     $$\frac{a_n}{e^{-1}/n} = e.n.a_n = \frac{n}{n+1}(1 + e.a_{n+1})$$
     puis l'on fait tendre $n \to \infty$, et comme $\lim \frac{n}{n+1} = 1$ et $\lim a_{n+1} = 0$,
     on trouve que $\lim \frac{a_n}{e^{-1}/n} = 1$ càd $a_n \sim \frac{e^{-1}}{n}$
   - Si on est à l'aise, on écrit les choses suivantes:
     i) on a $n + 1 \underset{+\infty}{\sim} n$
     ii) comme $\lim a_{n+1} = 0$ on a $a_{n+1} = o(e^{-1})$ et donc $e^{-1} + a_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} e^{-1}$
     iii) on en déduit que $a_n = \frac{1}{n+1}(e^{-1} + a_{n+1}) \underset{+\infty}{\sim} n.e^{-1}$

   Bref, on a montré que $\boxed{a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-1}}{n}}$

Partie II

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$ la proposition $a_n = \frac{n!}{e}\left(e - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$
   - **initialisation:** $\mathcal{P}_0$ est vraie.
     En effet on a vu que $a_0 = 1 - e^{-1}$, et l'on a $\frac{0!}{e}\left(e - \sum\limits_{k=0}^{0} \frac{1}{k!}\right) = \frac{1}{e}(e-1) = 1 - e^{-1}$
   - **hérédité:** On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque.
     On sait d'après Q.I.4) que $a_{n+1} = (n+1).a_n - e^{-1}$
     On peut donc écrire, en utilisant l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= (n+1).a_n - e^{-1} \\
&= (n+1).\frac{n!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) - e^{-1} \\
&= \frac{(n+1)!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) - e^{-1}.\frac{(n+1)!}{(n+1)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) \\
&= \frac{(n+1)!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}\right)
\end{aligned}$$

     ce qui prouve qu'alors $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   - **conclusion:** par le principe de récurrence, on a montré que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n entier.
2. On vient de prouver que $\forall n \geqslant 0, e - S_n = e.\frac{a_n}{n!}$.
   On sait d'après Q.I.3) que $\lim a_n = 0$, ce qui permet d'affirmer que $\lim S_n = e$.
   rem: On vient de re-démontrer que la série de terme général $\frac{1}{k!}$ *converge et que* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$
3. D'après Q.II.1), on a $e - S_n = e.\frac{a_n}{n!}$ càd $S_n = e - e.a_n.\frac{1}{n!}$.
   Comme $\lim e.a_n = 0$, on peut donc écrire $-e.a_n.\frac{1}{n!} = o\left(\frac{1}{n!}\right)$.
   On a bien montré que $S_n = e + o\left(\frac{1}{n!}\right)$
   rem: ceci prouve que la suite (S_n) *converge très rapidement vers* e.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   On sait que $e - S_n = e.\frac{a_n}{n!}$
   (a) On sait que $a_n \geqslant 0$ et donc $0 \leqslant e - S_n$
   (b) Comme la suite (a_n) est décroissante, on a $a_n \leqslant a_0 = 1 - e^{-1}$
   On a bien prouvé que $0 \leqslant e - S_n \leqslant e.\frac{1-e^{-1}}{n!} = \frac{e-1}{n!} \leqslant \frac{2}{n!}$

   L'encadrement précédent indique que S_n est une valeur approchée de e par défaut à $\frac{2}{n!}$ près.
   Pour obtenir une valeur approchée de e à 10^{-3} près, il suffit donc de choisir un n tel que $\frac{2}{n!} \leqslant 10^{-3}$ càd $n! \geqslant 2000$.
   Comme $6! = 720$ et que $7! = 5040$, on en déduit que S_7 est une v.a de e à 10^{-3} près.

Partie IV

1. On a vu en Q.I.d)que $\forall n \geqslant 0, (n+1)a_n = e^{-1} + a_{n+1}$
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Sachant que $(n+1)a_n = e^{-1} + a_{n+1}$ et que $(n+2)a_{n+1} = e^{-1} + a_{n+2}$, on a

$$\begin{aligned}(n+1)(n+2)a_n &= (n+2)e^{-1} + (n+2)a_{n+1} \\ &= (n+2)e^{-1} + e^{-1} + a_{n+2}\end{aligned}$$

   Ainsi $\boxed{\forall n \geqslant 0, a_n = \dfrac{e^{-1}}{n+1} + \dfrac{e^{-1}}{(n+1)(n+2)} + \dfrac{a_{n+2}}{(n+1)(n+2)}}$

2. On regarde chaque terme
   - $\dfrac{e^{-1}}{n+1} = \dfrac{e^{-1}}{n} . \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}} = \dfrac{e^{-1}}{n}(1 - \dfrac{1}{n} + o(\dfrac{1}{n})) = e^{-1}. \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})\right)$
   - $\dfrac{e^{-1}}{(n+1)(n+2)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-1}}{n^2}$ et donc $\dfrac{e^{-1}}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{e^{-1}}{n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})$
   - Comme $\lim a_{n+2} = 0$ on a $\dfrac{a_{n+2}}{(n+1)(n+2)} = o(\dfrac{1}{n^2})$

   Au final, on trouve $\boxed{a_n = \dfrac{e^{-1}}{n} + o(\dfrac{1}{n^2})}$

CORRECTION DU PROBLEME II

Partie I

1. La question est très classique
   - On considère la fonction $\boxed{\begin{array}{llll} g :]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \arctan t + \arctan \dfrac{1}{t} \end{array}}$
     Cette fonction est de classe C^∞ sur son ensemble de définition comme somme et composée de fonctions C^∞
     On a

$$\forall t \in]0,+\infty[, g'(t) = \frac{1}{1+t^2} + \frac{\dfrac{-1}{t^2}}{1+\left(\dfrac{1}{t}\right)^2} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2} = 0$$

     On en déduit que la fonction g est constante sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
     Comme $g(1) = 2.\arctan 1 = 2.\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$, on a bien montré que

$$\boxed{\forall t > 0,\ \arctan t + \arctan \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}}$$

   - Nous allons utiliser le fait que arctan et la fonction inverse sont des fonctions impaires.
     Soit $t < 0$.
     On a

$$g(t) = \arctan t + \arctan \frac{1}{t} = -\arctan(-t) - \arctan \frac{1}{-t} = -\left(\arctan(-t) + \arctan \frac{1}{-t}\right)$$

Comme $-t > 0$, on a d'après ci-dessus

$$\arctan(-t) + \arctan\frac{1}{-t} = \frac{\pi}{2}$$

et donc

$$g(t) = -\frac{\pi}{2}$$

On a montré que

$$\boxed{\forall t < 0,\ \arctan t + \arctan\frac{1}{t} = -\frac{\pi}{2}}$$

2. Cette question a été traitée en classe
3.
   - La fonction arctan étant C^∞ sur $\mathbb{R}$, on sait d'après **le théorème de Taylor-Young** que arctan va posséder en tout point de $\mathbb{R}$ un DL à tout ordre, donc en particulier un $DL_3(0)$
   - Notons pour alléger $g = \arctan$.
     On a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$g'(t) = \frac{1}{1+t^2} \qquad g''(t) = \frac{-2t}{(1+t^2)^2} \qquad g^{(3)}(t) = \frac{-2(1+t^2)^2 + 2t.2.2t.(1+t^2)}{(1+t^2)^4}$$

et donc

$$g'(0) = 1 \qquad g''(0) = 0 \qquad g^{(3)}(0) = -2$$

On a ainsi

$$g(t) = g(0) + g'(0).t + \frac{g''(0)}{2!}.t^2 + \frac{g^{(3)}(0)}{3!}t^3 + o(t^3) = 0 + t + 0.t^2 + \frac{-2}{6}t^3 + o(t^3)$$

On retrouve le DL qui est dans le formulaire et que l'on doit connaitre

$$\boxed{\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + o(t^3)}$$

rem: il n'est pas nécessaire de simplifier les dérivées successives lorsque l'on utilise Taylor-Young en un point donné

Partie II

1. (a) **Etude de la continuité.**
   On doit procéder en 2 étapes car il y a un recollement en 0
   - Sur $\mathbb{R}^*$.
     La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas
   - En 0.
     On utilise le DL déterminé précédemment (en ne gardant que l'ordre un même)

$$f(t) = \frac{\arctan t}{t} = \frac{t + o(t)}{t} = 1 + o(1) \to 1 = f(0)$$

   On a prouvé que $\lim_{t\to 0} f(t) = f(0)$ ce qui est la définition de $\boxed{f \text{ est continue en } 0}$

   Conclusion $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$

   (b) **Etude de la parité.**
   On ré-utilise le fait que arctan est une fonction impaire
   Soit $t \in \mathbb{R}$.

- si $t = 0$, on a aussi $-t = 0$ et donc $f(t) = f(-t) = 1$
- si $t \neq 0$, on a aussi $-t \neq 0$, et ainsi

$$f(-t) = \frac{\arctan -t}{-t} = \frac{-\arctan t}{-t} = \frac{\arctan t}{t} = f(t)$$

On a bien montré que $\forall t \in \mathbb{R}, f(-t) = f(t)$, et donc $\boxed{f \text{ est paire}}$

2. **Etude du caractère** C^1
Là encore on doit procéder en 2 étapes
   - Sur $\mathbb{R}^*$.
   La fonction f est C^1(C^∞ même) sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions continues C^1(C^∞), le dénominateur ne s'annulant pas.
   Et l'on a $\forall t \in \mathbb{R}^*, f'(t) = \dfrac{1}{t^2}\left(\dfrac{t}{1+t^2} - \arctan t\right)$
   - En 0.
     - On commence par prouver la dérivabilité.
     Soit $t \neq 0$

$$\frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \frac{\dfrac{\arctan t}{t} - 1}{t} = \frac{\arctan t - t}{t^2} = \frac{t - t^3/3 + o(t^3) - t}{t^2} = -\frac{t}{3} + o(t) \to 0$$

     Comme cette limite est FINIE, on a montré que $\boxed{f \text{ est dérivable en 0 et que } f'(0) = 0}$
     - Montrons maintenant que f' est continue en 0.
     Pour cela on commence par écrire que pour $t \neq 0$

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{t^2}\left(\frac{t}{1+t^2} - \arctan t\right) \\ &= \frac{1}{t^2}\left(t.(1 - t^2 + o(t^2)) - (t - \frac{t^3}{3} + o(t^3)\right) \\ &= \frac{1}{t^2}\left(-\frac{2t^3}{3} + o(t^3)\right) \\ &= -\frac{2t}{3} + o(t) \end{aligned}$$

     ce qui prouve que $\lim\limits_{t\to 0} f'(t) = \lim\limits_{t\to 0} -\dfrac{2t}{3} + o(t) = 0 = f'(0)$
     et ainsi que f' est continue en 0

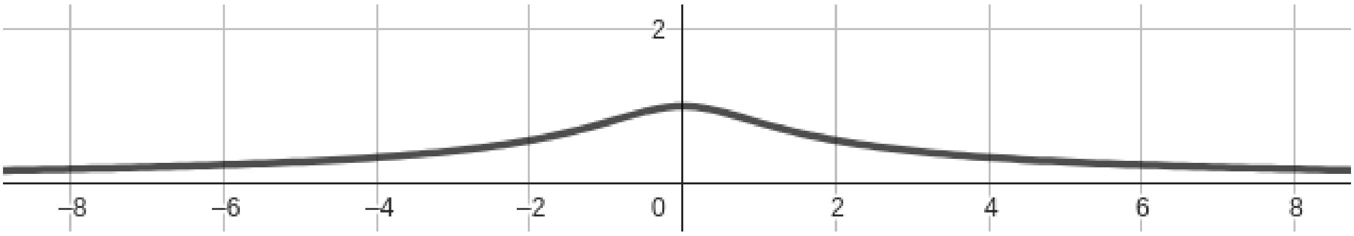
   Conclusion: $\boxed{f \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$

3. On profite de la parité de f pour faire l'étude sur $[0, +\infty[$ uniquement
   - D'après Q2 de la partie 1, on peut dire que

$$\forall t > 0, f'(t) = \frac{1}{t^2}\left(\frac{t}{1+t^2} - \arctan t\right) < 0$$

   - Comme la fonction arctan est bornée et que $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{t} = 0$, on peut affirmer que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$
   On obtient donc le tableau suivant

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	0	$-$
$f(t)$	1	0



- rem: on a prouvé que f est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$

Partie III

- Soit $x>0$.
  On effectue le changement de variable C^1 indiqué.
  On a $t=\dfrac{1}{\theta}$ et ainsi $dt=\dfrac{-d\theta}{\theta^2}$.
  D'où

$$G(x)=\int_{1/x}^{x}\frac{\arctan t}{t}dt=\int_{x}^{1/x}-\theta.\arctan(\frac{1}{\theta}).\frac{d\theta}{\theta^2}$$
$$=\int_{1/x}^{x}\frac{1}{\theta}.\arctan\frac{1}{\theta}.d\theta$$

Comme $x>0$, on a $\forall\theta\in[1/x,x],\theta>0$, et l'on a donc d'après Partie 1,Q1

$$G(x)=\int_{1/x}^{x}\frac{1}{\theta}.\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\theta\right).d\theta$$
$$=\int_{1/x}^{x}\frac{\pi/2}{\theta}d\theta-\int_{1/x}^{x}\frac{\arctan\theta}{\theta}d\theta$$
$$=\left[\frac{\pi}{2}\ln\theta\right]_{1/x}^{x}-G(x)$$

Ainsi

$$2G(x)=\frac{\pi}{2}\left(\ln x-\ln(\frac{1}{x})\right)=\pi.\ln x \qquad \text{et donc } \boxed{G(x)=\frac{\pi}{2}.\ln x}$$

Partie IV

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit d'après **le théorème fondamental de l'analyse que** F est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et que c'est l'unique primitive de la fonction f qui s'annule en 0
2. On va utiliser **le théorème de positivité de l'intégrale**, en distinguant 2 cas
   - si $x\geqslant 0$.
     D'après Partie II.Q3, la fonction f est positive sur $[0,+\infty[$ donc sur $[0,x]$,
     On en déduit que $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt\geqslant 0$
   - Soit $x<0$
     D'après Partie II.Q3, la fonction f est positive sur $]-\infty,0]$ donc sur $[x,0]$,

On en déduit que $\displaystyle\int_x^0 f(t)dt \geqslant 0$
et donc que $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt = -\int_x^0 f(t)dt \leqslant 0$

3. On commence par étudier la parité de F grâce au changement de variable $\theta = -t$
   - Soit $x \in \mathbb{R}$.
     En effectuant le changement de variable C^1, $t = -\theta$ (et donc $dt = -d\theta$) on obtient
     $$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt = -\int_0^x f(-\theta)d\theta = -\int_0^x f(\theta)d\theta = -F(x) \qquad \text{car } f \text{ est paire}$$
     Conclusion: $\boxed{F \text{ est impaire}}$
   - On en déduit donc que $\boxed{\varphi \text{ est paire}}$ (même démo qu'en partie II,Q1)
4. D'après la Q1 de cette partie, on sait que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc a fortiori dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   Ainsi, sur $\mathbb{R}^*$, φ est dérivable car c'est le quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas.
   Et l'on a
   $$\forall x \in \mathbb{R}^*, \varphi'(x) = \frac{x.F'(x) - 1.F(x)}{x^2} = \frac{x.f(x) - F(x)}{x^2} = \frac{x.f(x) - x.\varphi(x)}{x^2} = \frac{1}{x}.(f(x) - \varphi(x))$$
5. On sait que $f(t) = 1 - \dfrac{t^2}{3} + o(t^2)$
   On a donc par primitivation de ce DL en 0 *(voir Résolu 8)*
   $$F(x) = F(0) + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x + o(x^2)$$
   On en déduit que pour $x \neq 0$
   $$\varphi(x) = \frac{F(x)}{x} = 1 + o(x)$$
   et donc
   $$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \frac{1 + o(x) - 1}{x} = \frac{o(x)}{x} = o(1) \to 0$$
   Comme $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = 0$ (limite finie), on en déduit que φ est dérivable en 0, et que $\varphi'(0) = 0$
6. On suit évidemment l'indication de l'énoncé
   - Soit $x > 0$.
     La fonction F est continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$, d'après **l'égalité des accroissements finis** on peut donc affirmer
     $$\exists\, c \in]0,x[\text{ tel que } \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = F'(c) = f(c)$$
     Comme $F(0) = 0$, cela donne $\varphi(x) = f(c)$.
     Comme $0 < c < x$ et que f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ d'après Partie II-Q3, on peut écrire que $f(0) > f(c) > f(x)$, ce qui donne exactement $1 > \varphi(x) > f(x)$
7. - On a vu que sur $\mathbb{R}^*$, on a $\varphi'(x) = \dfrac{1}{x}(f(x) - \varphi(x))$.
     D'après la question ci-dessus, on en déduit que sur $]0, +\infty[$ on a $\varphi'(x) < 0$.
     Comme $\varphi'(0) = 0$, on a le tableau ci-dessous

t	0		$+\infty$
$\varphi'(x)$	0	$-$	
$\varphi(x)$	1	$\searrow$	$?$

et on en déduit que φ est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$

- Comme φ est une fonction décroissante, on sait d'après **le théorème de la limite monotone** que f possède une limite en $+\infty$ (limite finie ou $-\infty$).
  D'après l'étude de f faite dans la partie II, on sait que f est minorée par 0.
  On en déduit d'après Q6 que $\forall x > 0, \varphi(x) > f(x) > 0$.
  Ainsi la fonction φ est minorée sur $]0,+\infty[$, le théorème de la limite monotone permet alors de préciser que φ possède une limite finie en $+\infty$.
  Notons pour la suite $L = \lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x)$

8. - Soit $x > 0$.
     On applique **l'égalité des accroissements finis** à F sur l'intervalle $[x,2x]$.
     F est continue sur cet intervalle et dérivable sur $]x,2x[$, on peut donc dire

$$\exists\, c_x \in]x,2x[\text{ tel que } F(2x) - F(x) = (2x - x).F'(c_x) = x.f(c_x)$$

   - Soit $x > 0$.
     On sait que $F(x) = x.\varphi(x)$ et $F(2x) = 2x.\varphi(2x)$.
     On a donc d'après la question précédente

$$2x.\varphi(2x) - x.\varphi(x) = x.f(c_x)$$

     Comme $x > 0$, on peut diviser par x et cela donne

$$2\varphi(2x) - \varphi(x) = f(c_x)$$

   - Nous allons maintenant faire tendre $x \to +\infty$
     D'une part, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} 2.\varphi(2x) - \varphi(x) = 2.L - L = L$
     D'autre part, comme $c_x > x$, on a $\lim\limits_{x\to\infty} c_x = +\infty$, et donc $\lim\limits_{x\to\infty} f(c_x) = \lim\limits_{+\infty} f = 0$

t	0		$+\infty$
$\varphi'(t)$	0	$-$	
$\varphi(t)$	1	$\searrow$	0

Conclusion: $\boxed{\text{on a bien prouvé que } \lim\limits_{+\infty} \varphi = 0}$

Partie V

1. Nous allons bien sûr utiliser le **théorème de la bijection**
   - On pose $g : t \mapsto t - \varphi(t)$
     La fonction g est continue sur $]0,1]$ comme différence de fonctions continues.
     On a $\forall t \in]0,1], g'(t) = 1 - \varphi'(t) > 0$ car $\varphi'(t) \leqslant 0$ d'après Partie IV-Q7 .
     On peut donc affirmer d'après le théorème de la bijection que g réalise une bijection de $]0,1]$ sur $g(]0,1]) =]g(0),g(1)] =]-1,1-\varphi(1)]$

t	0	1
$g'(t)$	$+$	
$g(t)$	$-1 \nearrow$	$1-\varphi(1)>0$

On a vu dans la partie II-Q7 que φ est strictement décroissante donc $\varphi(1) < \varphi(0) = 1$.
Ce qui prouve que $1-\varphi(1) > 0$.
Comme $0 \in g(]0{,}1])$ et que g est bijective, on peut affirmer qu'il existe un unique $\alpha \in]0{,}1]$ tel que $g(\alpha) = 0$, càd $\alpha = \varphi(\alpha)$

2. • Soit $x > 0$.
   On utilise les résultats de la partie IV,
   on a vu en Q4 que $\varphi'(x) = \dfrac{1}{x}(f(x) - \varphi(x))$,
   on a vu en Q6 que $f(x) < \varphi(x)$, on peut donc dire que $|\varphi'(x)| = \dfrac{1}{x}(\varphi(x) - f(x))$.
   Comme φ est majoré par 1 d'après Q7, on a bien au final $|\varphi'(x)| \leqslant \dfrac{1}{x}(1 - f(x))$
   • Soit $x > 0$.
   On a
   $\displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt = \int_0^x \frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt = \int_0^x 1 - \frac{1}{1+t^2}dt = [t - \arctan t]_0^x = x - \arctan x = x - x.f(x)$
   ce qui donne bien
   $$\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt = \frac{1}{x}(1-f(x))$$

3. • Soit $t \in \mathbb{R}^+$
   Il est évident que $0 \leqslant \dfrac{t}{1+t^2}$
   • Soit $t \in \mathbb{R}^+$
   On a
   $$\frac{1}{2} - \frac{t}{1+t^2} = \frac{1+t^2-2t}{2.(1+t^2) = \dfrac{(1-t)^2}{1+t^2}} \geqslant 0$$
   ce qui prouve que $\dfrac{t}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{2}$
   (Cette inégalité est très classique: à savoir refaire)

   • Soit $x > 0$.
   En multipliant par $t \geqslant 0$ chaque membre de l'inégalité ci-dessus, on a
   $$\forall t \in [0{,}x], \frac{t^2}{1+t^2} \leqslant \frac{t}{2}$$
   et donc par croissance de l'intégrale
   $$\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt \leqslant \int_0^x \frac{t}{2}dt = \left[\frac{t^2}{4}\right]_0^x = \frac{x^2}{4}$$
   En reportant dans l'inégalité de Q2, cela donne
   $$\forall x > 0, |\varphi'(x)| \leqslant \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt \leqslant \frac{1}{x^2}.\frac{x^2}{4} = \frac{1}{4}$$

4. On reconnaît la situation typique dans laquelle on utilise **l'inégalité des accroissements finis.**
   - La fonction φ est continue et dérivable sur $[0,+\infty[$ avec $|\varphi'| \leqslant \frac{1}{4}$.
     On en déduit donc que
     $$\forall (x,y) \in [0,+\infty[^2, |\varphi(x)-\varphi(y)| \leqslant \frac{1}{4}|x-y|$$
   - Dans la partie IV, on a vu que $\varphi([0,+\infty[) =]0,1] \subset [0,+\infty[$.
     Ainsi $[0,+\infty[$ est un intervalle stable par φ.
     Comme $u_0 \in [0,+\infty[$, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,+\infty[$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$.
     Comme u_n et α sont dans l'intervalle $[0,+\infty[$, on peut en déduire que
     $$|\varphi(u_n)-\varphi(\alpha)| \leqslant \frac{1}{4}|u_n-\alpha|$$
     càd
     $$|u_{n+1}-\alpha| \leqslant \frac{1}{4}|u_n-\alpha|$$
5. Nous allons montrer par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$: "$|u_n-\alpha| \leqslant \frac{1}{4^n}|u_0-\alpha|$"
   - **initialisation.**
     Comme $\frac{1}{4^0}=1$, la propriété $\mathcal{P}_0$ est trivialement vraie
   - **hérédité.**
     On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un n quelconque fixé.
     On a donc
     $$|u_n-\alpha|\frac{1}{4^n}|u_0-\alpha|$$
     Comme
     $$|u_{n+1}-\alpha| \leqslant \frac{1}{4}|u_n-\alpha|$$
     On a donc
     $$|u_{n+1}-\alpha| \leqslant \frac{1}{4}|u_n-\alpha| \leqslant \frac{1}{4}.\frac{1}{4^n}|u_0-\alpha| = \frac{1}{4^{n+1}}|u_0-\alpha|$$
     càd que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie
   - **conclusion:** on a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n-\alpha| \leqslant \frac{1}{4^n}|u_0-\alpha|$
6. Comme $\lim \frac{1}{4^n}=0$, on en déduit que $\boxed{\lim u_n = \alpha}$