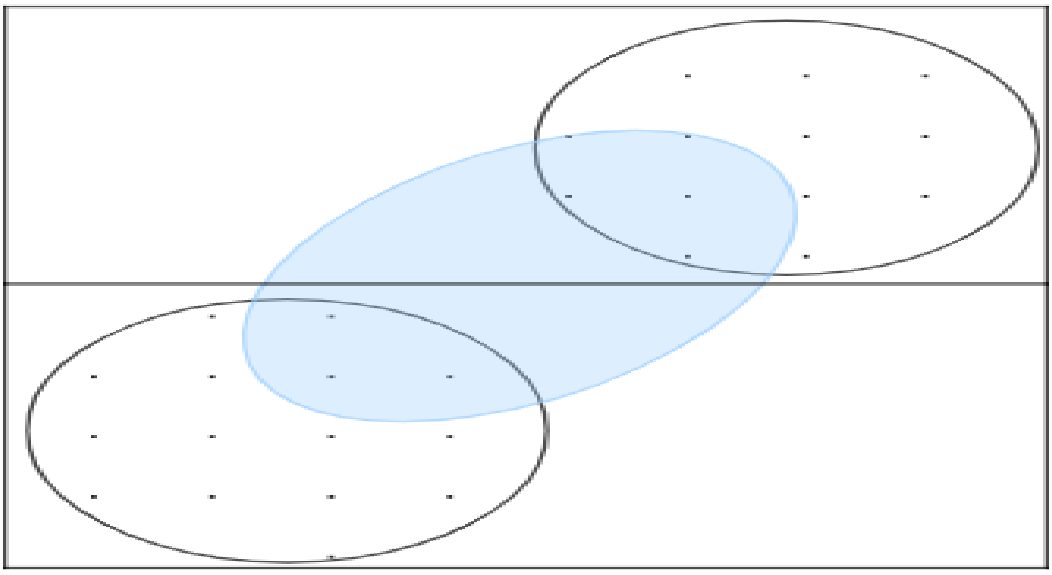
SERIES NUMERIQUES

serienum2324.tex

Table des matières

Dans tout ce chapitre, $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ désignera une suite de nombres réels ou complexes définie à partir du rang n_0. On lui associe une nouvelle suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ définie par $S_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$



1 Généralités

1.1 définitions

Q: QU'EST-CE QU'UNE SÉRIE NUMÉRIQUE?

définition 1: sommes partielles

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes définie à partir du rang n_0

1. La quantité $S_n = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$ s'appelle la somme partielle d'indice n
2. On appelle série numérique de terme général u_n, et on note $\sum u_n$, ou $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$, la suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$.

On retiendra qu'une série n'est rien d'autre qu'une suite définie de manière particulière.

remarque 1 (*Très important*)

- *par exemple, l'étude de la série de terme général $u_n = 1$ correspond à l'étude de la suite (S_n) définie par $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = n+1$*
- *de même, l'étude de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$ correspond à l'étude de la suite (S_n) définie par $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$*

Dans la pluplart des cas, on ne sait pas calculer l'expression de explicite de S_n. Ce chapitre développe alors des théorèmes qui permettent, en considérant u_n (càd le terme général), d'avoir des conclusions sur S_n (càd la somme partielle, et donc la série)

définition 2: CV, DV, somme d'une série

Soit $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ une série.

i) On dit que la série $\sum u_n$ converge (CV) lorsque la suite des sommes partielles (S_n) converge.

Dans ce cas, on appelle somme de la série $\sum u_n$, et on note $\boxed{\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} u_k}$ ou $\boxed{\sum\limits_{n_0}^{\infty} u_k}$, la limite de la suite des sommes partielles

$$\sum_{n_0}^{\infty} u_k = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

ii) Dans le cas contraire, on dit que la série de terme général u_n diverge (DV)

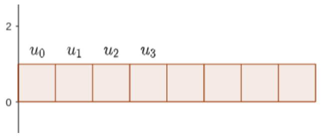
rem: on fera bien la différence entre $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ et $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} u_k$

rem: $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} u_k$ n a de sens que pour une série convergente: on peut bien sûr aussi écrire $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$ ou $\sum\limits_{p=n_0}^{\infty} u_p$

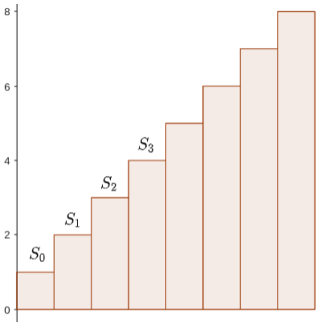
remarque 2

- *une série est DV lorsque la suite des sommes partielles possède une limite infinie ou ne possède pas de limite.*
- *lorsqu'une série nous est donnée, la première question posée est celle de sa convergence. Si elle l'est, on peut chercher la valeur exacte de sa somme (ou se contenter d'une valeur approchée.)*
- *dans les cas les plus simples, les sommes partielles sont calculables: l'étude de la série se fait alors par l'étude de la suite de ses sommes partielles (situation télescopique le plus souvent ou géométrique ou par récurrence).*
- *déterminer la nature d'une série, c'est déterminer si elle est convergente ou divergente*
- *on dit que deux séries sont de même nature lorsqu'elles sont toutes les deux CV, ou toutes les deux DV.*
- *une série est divergente soit parce que la suite des sommes partielles (S_n) admet une limite infinie, soit parce que la suite (S_n) ne possède pas de limite.*

$$\sum_{n\geqslant 0} 1$$

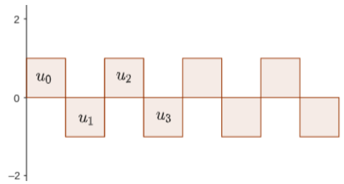


n	u_n	S_n
0	1	1
1	1	2
2	1	3
3	1	4
4	1	5
5	1	6
6	1	7
7	1	8

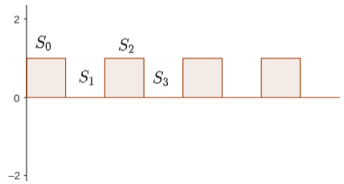


tg positif $\Leftrightarrow$ (S_n) croissante
clairement $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$

$$\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n$$

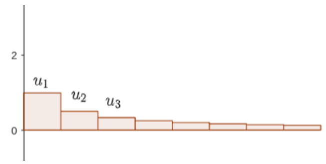


n	u_n	S_n
0	1	1
1	-1	0
2	1	1
3	-1	0
4	1	1
5	-1	0
6	1	1
7	-1	0

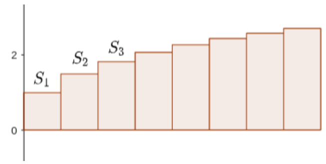


suite (S_n) NON monotone
(S_n) NE possède PAS de limite

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$$

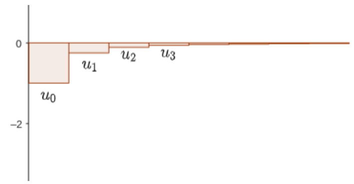


n	u_n	S_n
1	1.00	1.00
2	0.50	1.50
3	0.33	1.83
4	0.25	2.08
5	0.20	2.28
6	0.17	2.45
7	0.14	2.59
8	0.12	2.72

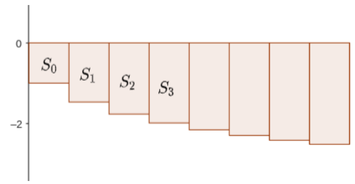


tg positif $\Leftrightarrow$ (S_n) croissante
on montrera que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{-1}{n^{1.1}}$$

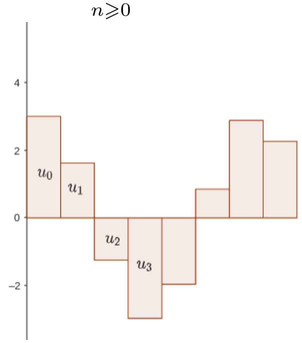


n	u_n	S_n
1	-1.00	-1.00
2	-0.47	-1.47
3	-0.30	-1.77
4	-0.22	-1.99
5	-0.17	-2.16
6	-0.14	-2.30
7	-0.12	-2.42
8	-0.10	-2.52

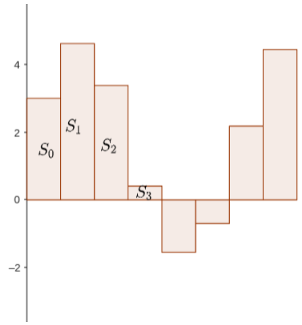


tg négatif $\Leftrightarrow$ (S_n) décroissante
on montrera que (S_n) converge

$$\sum_{n\geqslant 0} 3.\cos n$$

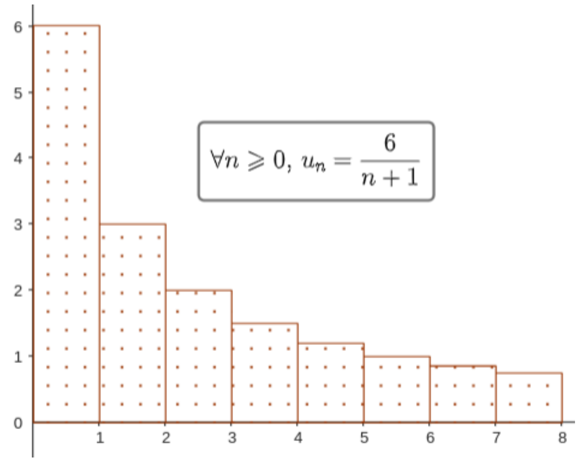


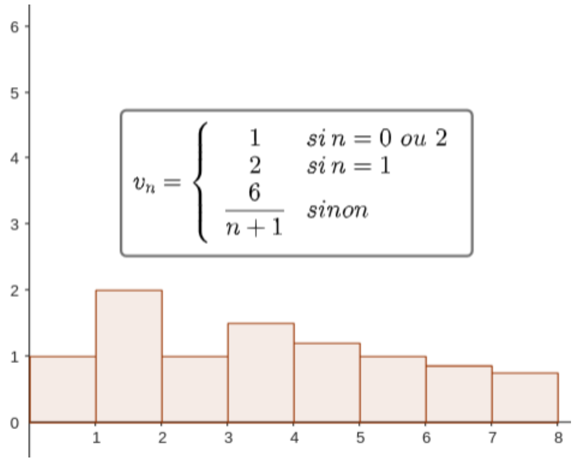
n	u_n	S_n
1	3.00	3.00
2	1.62	4.62
3	-1.24	3.38
4	-2.97	0.41
5	-1.96	-1.55
6	0.85	-0.70
7	2.88	2.18
8	2.26	4.44



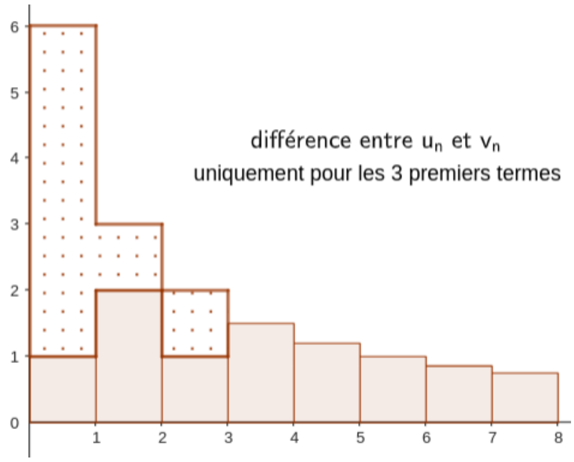
difficile!

1.2 des résultats à avoir en tête





n	u_n	v_n	U_n	V_n	$U_n - V_n$
0	6	1	6	1	5
1	3	2	9	3	6
2	2	1	11	4	**7**
3	**1.5**	**1.5**	12.5	5.5	**7**
4	**1.2**	**1.2**	13.7	6.7	**7**
5	**1**	**1**	14.7	7.7	**7**
6	**0.86**	**0.86**	15.56	8.56	**7**
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	**7**



remarque 3 (***importante***)

> **_la nature d'une série ne change pas si l'on change un nombre fini de termes._**
>
> *(C'est d'ailleurs pour cela que l'on note une série $\sum u_n$ sans se référer au premier indice n_0...)*
> *La nature d'une série dépend donc uniquement du "comportement" du terme général au voisinage de $+\infty$.*
> *En revanche, la somme d'une série convergente a priori change(... et c'est pour cela que la notation de la valeur de la série utilise d'indice n_0) .*
>
> *Lorsque l'on modifie un nombre fini de termes d'une série, les suites des sommes partielles sont égales à une constante additive près (à partir d'un certain rang) .*
>
> ***démonstration:***
> *Soient $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ et $\sum\limits_{n \geqslant n_0} v_n$ deux séries de sommes partielles respectives S_n et T_n.*
> *On suppose qu'il existe $N \geqslant n_0$ tel que $\forall n \geqslant N, u_n = v_n$.*
> *On a alors pour $n \geqslant N$:*
>
> $$S_n - T_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k - \sum_{k=n_0}^{n} v_k = \sum_{k=n_0}^{n} (u_k - v_k) = \sum_{k=n_0}^{N-1} (u_k - v_k) + \sum_{k=N}^{n} (u_k - v_k) = \underbrace{\sum_{k=n_0}^{N-1} (u_k - v_k)}_{\text{terme constant}}$$
>
> *Ainsi, à partir d'un certain rang, les suites (S_n) et (T_n) sont égales à une constante près, donc sont simultanément convergentes ou simultanément divergentes.*
> *Ccl: les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*

remarque 4 (***à avoir en tête également***)

> **_La nature d'une série n'est pas modifiée si on multiplie son terme général par un scalaire non nul._**
> *(cf. le paragraphe "Quelques considérations importantes")*

exemple 1:

Pour chacune des séries déterminer la somme partielle d'indice n et préciser si la série converge

$$a)\ \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n \qquad b)\ \sum_{n\geqslant 3}(-1)^n \qquad c)\ \sum_{n\geqslant 0} n \qquad d)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)} \qquad e)\ \sum_{n\geqslant 1}\ln\frac{n}{n+1}$$

1.3 grossière divergence

Q: DANS CERTAINS CAS, PEUT-ON RAPIDEMENT DIRE QU'UNE SÉRIE DIVERGE?

définition 3: grossière divergence

Soit $\sum u_n$ une série.
On dit que la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente (GDV) lorsque son terme général ne tend pas vers 0, càd lorsque la suite (u_n) ne tend pas vers 0

théorème 1: condition nécessaire de convergence

Pour qu'une série converge, il faut que son terme général tende vers 0 .
Attention ! La réciproque est fausse : le terme général d'une série peut tendre vers zéro sans que pour autant la série ne converge(cf. exemple plus bas).

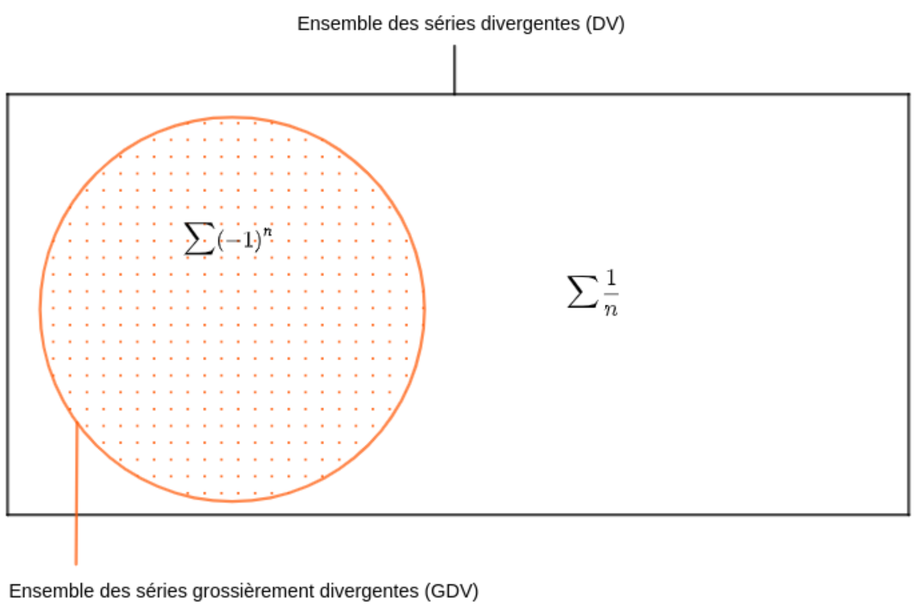
remarque 5

Comme il y a équivalence entre $\lim u_n = 0$ *et* $\lim |u_n| = 0$, *il y a équivalence entre* $\sum |u_n|$ *GDV et* $\sum u_n$ *GDV*

exemple 2:

Parmi les séries ci-dessous, indiquer celles qui sont grossièrement divergentes

$$a)\ \sum_{n\geqslant 1} n^2 \qquad b)\ \sum_{n\geqslant 1} n.\sin\frac{1}{n} \qquad c)\ \sum_{n\geqslant 0}\frac{n^{2050}}{2^n} \qquad d)\ \sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n.n^2}{n+4}$$



exemple 3: la série harmonique est DV mais pas GDV

La série harmonique est la série $\sum \frac{1}{n}$.

On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. prouver que pour tout $n \geqslant 1, S_{2n} - S_n \geqslant 1/2$
2. en raisonnant par l'absurde, montrer que $\sum \frac{1}{n}$ diverge

1. *Soit $n \geqslant 1$.*
   On a
   $$S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$
   On a
   $$\forall k \in [\![n+1{,}2n]\!], \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2n}$$
   et donc
   $$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n.\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$
2. ***Supposons que la série $\sum \frac{1}{n}$ converge.***
   Notons S la limite finie de la suite (S_n), càd $S = \lim_{n\to\infty} S_n$.
   Comme (S_{2n}) est une suite extraite de la suite (S_n), on sait que $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$ également.
   Ainsi $\lim_{n\to\infty} S_{2n} - S_n = S - S = 0$.
   Or comme pour tout n on a $S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$, on doit avoir $\lim_{n\to\infty} S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$.
   contradiction
   Conclusion: la série de terme général $\frac{1}{n}$ est divergente
   remarque: on montre qu'il existe une constante γ tel que $S_n = \ln n + \gamma + o(1)$

1.4 procédé télescopique

théorème 2: lien entre suite et série - à savoir redémontrer

la suite (v_n) converge **si et seulement si** la série de terme général $u_n = v_{n+1} - v_n$ converge

c'est à dire:

$$(v_n) \text{ converge } \iff \sum v_{n+1} - v_n \text{ converge}$$

Dans le cas de convergence : $\sum_{k=n_0}^{+\infty} (v_{k+1} - v_k) = (\lim_{n\to+\infty} v_n) - v_{n_0}$

rem: il suffit de se rappeler que pour $n \geqslant n_0$ on a $\sum_{k=n_0}^{n} v_{k+1} - v_k = v_{n+1} - v_{n_0}$

rem: bien sûr, $\sum v_{n+1} - v_n$ et $\sum v_n - v_{n-1}$ désigne la même série

exemple 4:

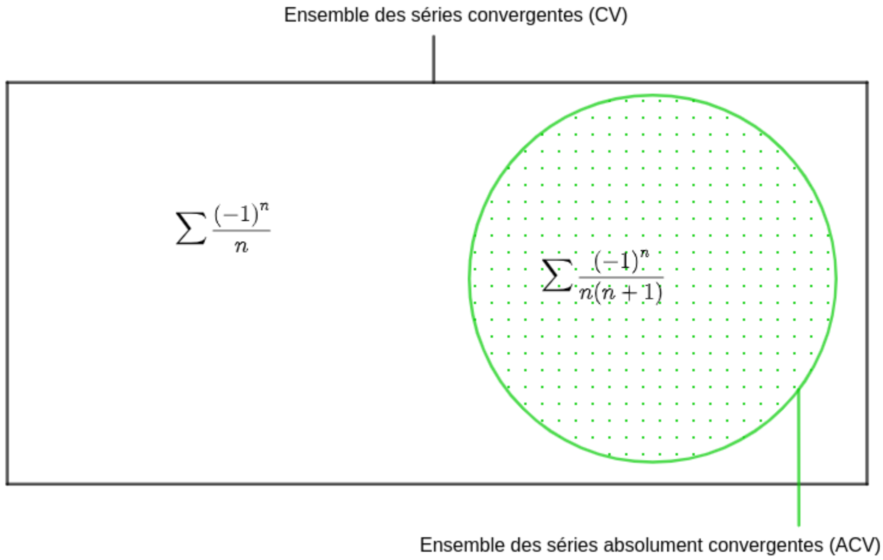
Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ avec $n \geqslant 1$

1.5 Convergence absolue

Q: Y a-t-il une notion puissante pour prouver, dans certains cas, la convergence?

définition 4: convergence absolue

On dit que la série $\sum un$ est absolument convergente (AVC) lorsque la série de terme général $|u_n|$ converge, càd lorsque $\sum |u_n|$ converge



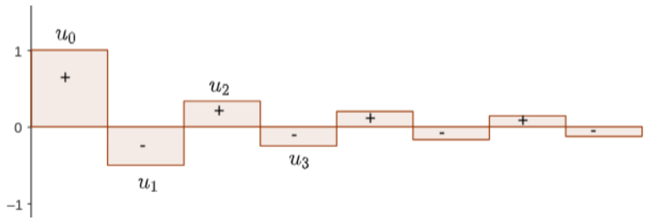
remarque HP: *une série qui converge sans converger absolument est dite semi-convergente (SCV)*

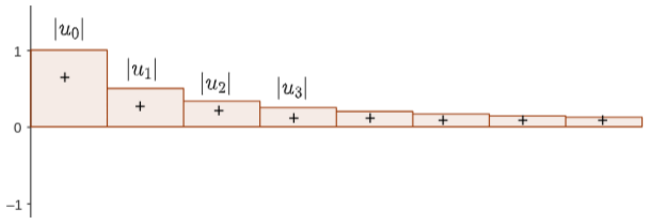
théorème 3: "l'absolue convergence entraîne la convergence"

Si $\sum u_n$ est une série ACV alors $\sum u_n$ est une série CV.
et l'on a la majoration

$$\boxed{|\sum_{n_0}^{\infty} u_n| \leqslant \sum_{n_0}^{\infty} |u_n|}$$

rem: on dit encore "Toute série absolument convergente est convergente" , mais la réciproque est fausse)
rem: on retiendra qu'en cas d'ACV, "la valeur absolue de la somme de la série est majorée par la somme de la série des valeurs absolues"
(on retrouve une sorte "d'inégalité triangulaire" pour les séries convergentes





On comprend que si la somme des |aires| est finie alors, par phénomène de compensation, a fortiori, la somme des aires est finie.

rem: on a montré que la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ conerge, ce qui permet d'affirmer que $\sum \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ est ACV

1.6 Les 3 exemples de référence

théorème 4: séries géométriques

Soit $a \in \mathbb{C}$.

$\boxed{\text{La série } \sum a^n \text{ converge [converge absolument] } \textbf{ssi } |a| < 1}$, et dans ce cas $\boxed{\sum_0^\infty a^n = \frac{1}{1-a}}$

D'une manière plus générale, une série géométrique est une série dont le terme général est du type $C.a^n$, où a et C sont deux constantes indépendantes de n

$\alpha \in \mathbb{C}$	$\lvert\alpha < 1\rvert$	$1 \leqslant \lvert\alpha\rvert$
$\sum \alpha^n$	ACV (et CV)	GDV (et DV)

théorème 5: exponentielle complexe

Pour tout complexe z, la série de terme général $\frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente et $\boxed{\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}}$

exemple 5:

On considère la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(i\pi)^n}{n!}$.

Grâce au théorème précédent, on peut affirmer DIRECTEMENT que

i) cette série est ACV

ii) la somme de cette série est $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\pi)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\pi)^n}{n!} - \frac{(i\pi)^0}{0!} = \exp(i\pi) - 1 = e^{i\pi} - 1 = -2$

théorème 6: Séries de Riemann (énoncé classique)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{la série de terme général } \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge \underline{si et seulement si} } \alpha > 1.}$

rem: comme le terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ est positif, les cas de CV et d'ACV sont les mêmes:

La série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ est ACV ssi $\alpha > 1$

	$\alpha < 0$	$\alpha = 0$	$0 < \alpha \leqslant 1$	$1 < \alpha$
$\lim \frac{1}{n^\alpha}$	$+\infty$	1	0	0
$\sum \frac{1}{n^\alpha}$	GDV (et DV)	GDV (et DV)	DV (pas GDV)	ACV (et CV)

remarque 6 (*à propos des séries de Riemann*)

- *Les séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ sont deux séries de Riemann divergentes.*
- *La série $\sum \frac{1}{n^{n \ln n}}$ N'est PAS une série de Riemann.*
- *Comme multiplier le terme général d'une série ne modifie pas sa nature, on a en particulier*
  - *i)* $\sum \frac{3}{n^2}$ et $\sum \frac{-2}{n\sqrt{n}}$ *sont des séries CV*
  - *ii)* $\sum \frac{4}{n}$ et $\sum \frac{-3}{n^{\pi-3}}$ *sont des séries DV*
  - *iii)* $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ *N'est PAS une série de Riemann! (car $(-1)^n$ n'est pas une constante)*

- *Les mathématiciens savent calculer explicitement la somme des séries de Riemann du type* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ *lorsque* α *est un entier naturel pair supérieur ou égal à deux. Pour information, on a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}$$

- *En revanche si* α *est un entier impair, on ne sait pas grand chose... Que vaut* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ *? C'est, à ce jour, un mystère. Apéry, mathématicien français effectivement décédé, montra en 1979 que c'était un nombre irrationnel. Et en 2001, Tanguy Rivoal reçu le prix Langevin(d'un montant de 10 000F) pour avoir montré qu'il existe une infinité d'entiers* α *impairs pour lesquels la série de Riemann est irrationnelle.*

1.7 approximation de la somme d'un série convergente

Q: Comment déterminer une valeur approchée de la somme d'une série convergente?

définition 5: reste

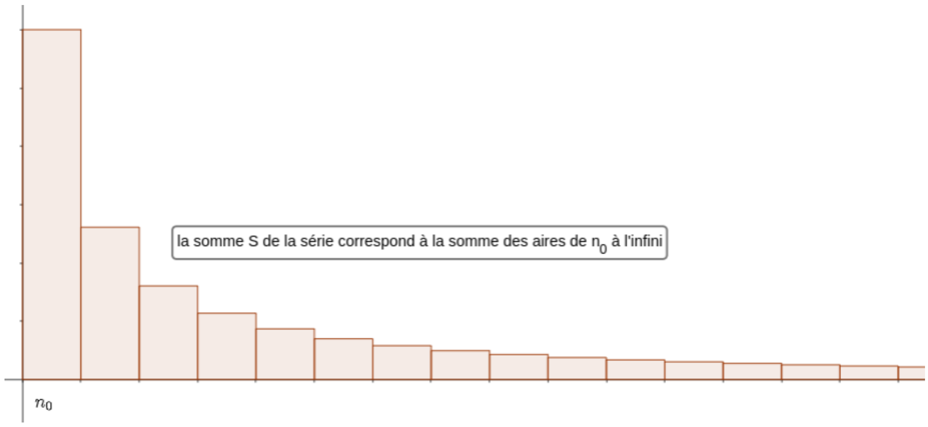
Lorsque $\sum u_n$ est une série convergente, de somme S, on appelle reste d'ordre d'ordre n la différence

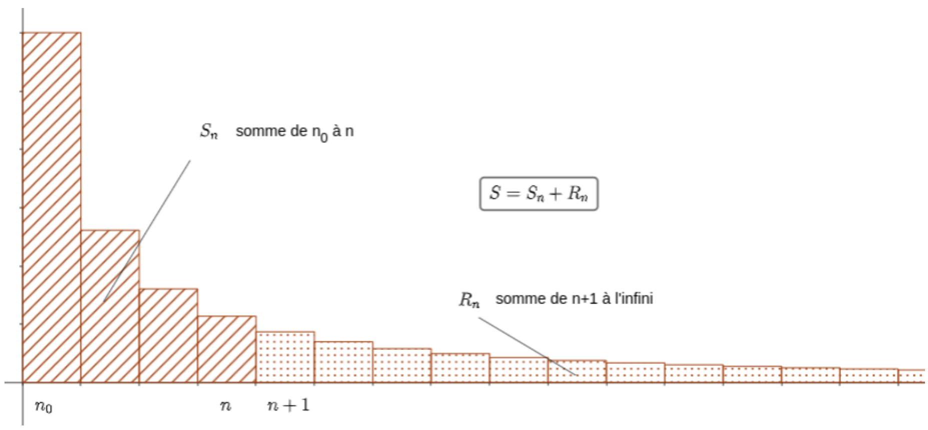
$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots$$

rem: il est immédiat que

i) $\lim R_n = 0$

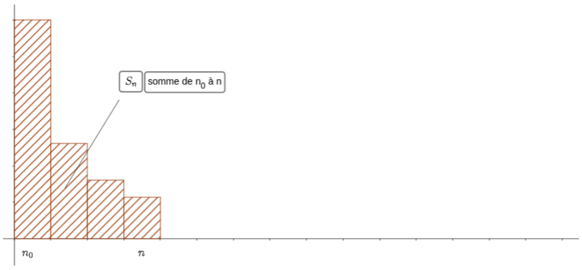
ii) *la suite* (R_n) *est décroissante lorsque la série est à terme général positif.*
(en effet $R_{n+1} - R_n = S_n - S_{n+1} = -u_{n+1}$*)*

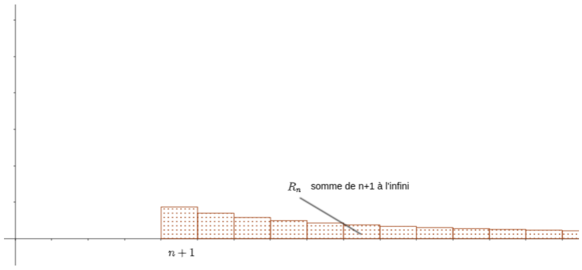




remarque 7 (*important*)

> *On considère une série convergente. On notera S_n sa somme partielle d'indice n et S la somme de la série.*
>
> *On a donc $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{C}$ (limite finie)*
>
> *La notion de reste est bien utile pour déterminer une valeur approchée de la somme d'une série avec une précision donné*
> *En effet, on a $S = S_n + R_n$ avec $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, ce qui permet de prendre S_n (n étant un entier fixé, on sait calculer S_n car cette somme comporte un nombre fini de termes) comme valeur approchée de S à une précision de R_n.*
> ***On encadre R_n (ou on majore $[R_n|$) pour estimer l'erreur commise sur l'approximation***





1.8 Somme de séries numériques

théorème 7: linéarité de la somme pour les séries convergentes

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries

i.) si $\sum u_n$ CV et $\sum v_n$ CV alors $\sum u_n + v_n$ CV, et l'on a $\boxed{\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n + v_n = \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n + \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} v_n}$

ii.) si $\sum u_n$ DV et $\sum v_n$ CV alors $\sum u_n + v_n$ DV

iii.) si $\sum u_n$ DV et $\sum v_n$ DV alors pas de conclusion directe quant à la convergence de $\sum u_n + v_n$

iv.) si $\sum u_n$ CV alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, la série $\sum \lambda u_n$ CV et l'on a $\boxed{\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \lambda u_n = \lambda \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n}$

v.) si $\sum u_n$ DV alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ non nul, la série $\sum \lambda u_n$ DV

rem: les formules encadrées indiquent que l'application qui à une série convergente associe sa somme est une APPLICATION LINÉAIRE

démonstration:

Notons $S_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} v_k$ les sommes partielles d'indice n des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$

- la série de tg $u_n + v_n$ a pour somme partielle d'indice n, $W_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} (u_k + v_k) = \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k + \sum\limits_{k=n_0}^{n} v_k = S_n + T_n$

- la série de tg $\lambda.u_n$ a pour somme partielle d'indice n, $Z_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} \lambda.u_k = \lambda \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k = \lambda.S_n$

Il suffit ensuite d'envisager les différents cas et de s'appuyer sur les tableaux de rappel situés en fin de poly..

exemple 6:

- on peut affirmer que la série $\sum \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{3}{n}$ est divergente

  car c'est la somme d'une série convergente $\left(\sum \dfrac{2}{n^2}\right)$ et d'une série divergente $\left(\sum \dfrac{3}{n}\right)$

- on sait que les deux séries $\sum \dfrac{-1}{n}$ et $\sum \dfrac{1}{n}$ sont divergentes, mais la série $\sum \dfrac{-1}{n} + \dfrac{1}{n}$ est convergente!

remarque 8

On prendra bien garde au troisième point du théorème lorsue l'on décomposera une série comme somme de deux séries. En effet , on peut très bien se retrouver avec la situation suivante : $\sum u_n + v_n$ *converge mais* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont deux séries divergentes .*

théorème 8:

Soit $\sum u_n$ une série complexe. Il y a équivalence entre :

i. la série complexe $\sum u_n$ converge

ii. les deux séries réelles $\sum Re(u_n)$ et $\sum Im(u_n)$ convergent

Cela résulte du fait qu'une suite complexe converge SSI la suite de ses parties réelles ET la suite de ses parties imaginaires convergent.

2 Séries à termes positifs

Rappels sur les suites croissantes : **théorème des suites monotones**

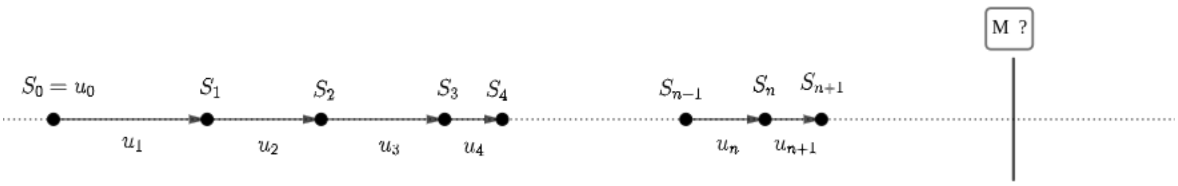
- une suite croissante possède toujours une limite
- une suite croissante possède une limite finie ssi elle est majorée.
- une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$

On garde les mêmes notations que précedemment $(u_n, S_n\, S \dots)$*:*

théorème 9:

Soit $\sum u_n$ une série de terme général u_n POSITIF

1. La série $\sum u_n$ converge **ssi** la suite de ses sommes partielles (S_n) est majorée
2. la série $\sum u_n$ diverge **ssi** $\lim S_n = +\infty$ (càd les sommes partielles tendent vers $+\infty$)



remarque 9

Lorsqu'il n'y a pas d'hypothèses sur le terme général et qu'on sait qu'une série est divergente, on peut juste dire que la suite de ses sommes partielles ne possède pas de limite, ou bien qu'elle possède une limite infinie. Mais on ne peut en dire plus: on ne sait pas dans lequel des deux cas on se trouve.
Cependant, lorsque le terme général est positif pour n *assez grand, on peut dire que si une série est divergente alors c'est forcément que ses sommes partielles tendent vers* $+\infty$

exemple 7:

- La série $\sum \frac{1}{n}$ est une série dont le terme général est positif (c'est $\frac{1}{n} > 0$)
- On sait que cette série est une série divergente.
  On peut donc $\boxed{\text{affirmer}}$ que la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$
- On vient de montrer que $\boxed{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) = +\infty}$

définition 6: terme général de signe stable

On dit que le terme général u_n est de signe stable lorsque la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite réelle de nombres tous positifs, ou tous négatifs.

remarque 10

- *le terme général est donc de signe stable si et seulement si* $\forall n \geqslant n_0, u_n.u_{n+1} > 0$
- *on dit que le terme général u_n est de signe stable au voisinage de $+\infty$ lorsque*

$$\exists N \geqslant n_0, \forall n \geqslant N, u_n.u_{n+1} > 0$$

2.1 comparaison entre deux séries

Q: UNE INÉGALITÉ SUR LES TERMES GÉNÉRAUX PERMET-ELLE DE COMPARER LA NATURE DE SÉRIES?

théorème 10: théorème de comparaison par majoration

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries telles que pour n suffisamment grand, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

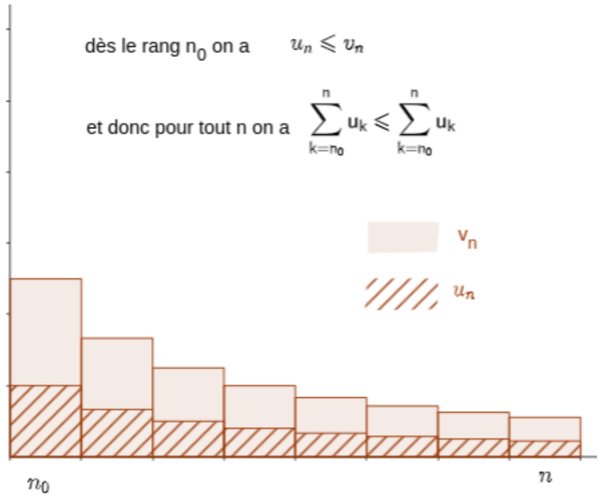
i) **Si** $\sum v_n$ converge **alors** $\sum u_n$ converge.

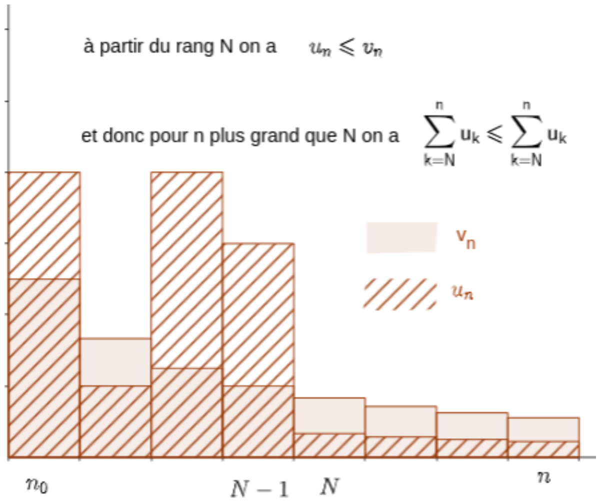
ii) **Si** $\sum u_n$ diverge **alors** $\sum v_n$ diverge

ce qui s'écrit encore:

i) $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge

ii) $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge





remarque 11

les locutions pour n suffisamment grand, à partir d'un certain rang et pour n au voisinage de l'infini sont synonymes : elles correspondent à la séquence logique $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N$. Ainsi, l'hypothèse que doivent vérifier les deux séries du théorème précédent est $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$

théorème 11: Règle des équivalents

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries telles que $u_n \underset{\infty}{\sim} v_n$ et v_n positif pour n assez grand.

Alors , les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

On rappelle que de même nature signifie que les séries sont simultanément convergentes ou simultanément divergentes.

2.2 comparaison avec une série géométrique

théorème 12: règle de D'Alembert

Soit $\sum u_n$ une série telle que $\lim\limits_{\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ existe.

Alors :

i. si $l > 1$ alors $\sum u_n$ GDV

ii. si $l < 1$ alors $\sum u_n$ ACV (en particulier $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$)

iii. si $l = 1$ alors pas de conclusion quant à la nature de la série

rem: Attention ! Il n'y a pas de réciproque à la règle de D'Alembert...

démonstration:

l'idée consiste à dire que

- *si l'on avait* $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = 0.8$ *alors* $(|u_n|)$ *serait une suite géométrique de raison* 0.8.
- *si* $\lim \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = l < 0.8$ *alors* $(|u_n|)$ *est majorée par une suite géométrique de raison 0.8*

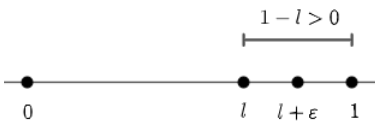
$\boxed{\text{cas } l < 1}$

1. **On écrit la définition de la limite avec les ε**

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \left|\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} - l\right| \leqslant \varepsilon \qquad \text{càd} \qquad \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, l - \varepsilon \leqslant \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leqslant l + \varepsilon$$

2. **On choisit judicieusement ε pour avoir une raison $l + \varepsilon < 1$**

Comme $l < 1$, *il est possible de choisir* $\varepsilon > 0$ *tel que* $l + \varepsilon < 1$.



Par exemple, on prend $\varepsilon = \dfrac{1-l}{2}$, *on a alors* $\begin{cases} \varepsilon = \frac{1-l}{2} > 0 \\ l + \varepsilon = \frac{1+l}{2} < 1 \end{cases}$

3. **On en déduit la suite géométrique majorante**

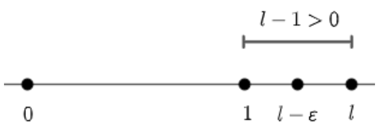
On montre en classe que $\forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant (l+\varepsilon)^{n-N}.u_N$

4. **On conclut que $\sum |u_n|$ CV grâce au théorème 10**

$\boxed{\text{cas } l > 1}$

1. **On écrit la définition de la limite avec les ε**

2. **On choisit judicieusement ε pour avoir $l - \varepsilon \geqslant 1$**



Par exemple, on prend $\varepsilon = l - 1$

3. **On en déduit que $\forall n \geqslant N, |u_n| \geqslant |u_N|$ et donc que $\sum |u_n|$ est GDV**

$\boxed{\text{cas } l = 1}$

Donner 2 exemples

exemple 8: les exemples typiques

Déterminons la nature des séries suivantes $\sum \dfrac{n!}{n^n}$ et $\sum \dfrac{z^n}{n!}$

2.3 comparaison avec une intégrale

Q: QUAND UNE INTÉGRALE PEUT-ELLE S'AVÉRER UTILE POUR ÉTUDIER LA NATURE D'UNE SÉRIE?

théorème 13: comparaison série-intégrale (aspect qualitatif)

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et f une fonction continue et décroissante sur $[n_0, +\infty[$.

La série de terme général $f(n)$ et l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature.

ceci signifie que

La série de terme général $f(n)$ converge **ssi** $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_{n_0}^{x} f(t)dt$ existe et est finie

exemple 9:

Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$ est divergente.

Solution:

- Notons $\boxed{\begin{array}{rcl} f :]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{\ln t}{t} \end{array}}$

  La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas. On a $\forall t > 0, f'(t) = \dfrac{1-\ln t}{t^2}$
- Sur l'intervalle $[3, +\infty[$, la fonction f est continue et décroissante.
  On peut donc affirmer grâce au théorème précédent que:

$$\text{La série } \sum f(n) \text{ converge} \iff \lim_{x\to+\infty}\int_3^x f(t)dt \text{ existe et est finie}$$

Or $\displaystyle\int_3^x f(t)dt = \int_3^x \frac{1}{t}.\ln(t)dt = \left[\frac{\ln^2 t}{2}\right]_3^x \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$

On en déduit que $\sum \dfrac{\ln n}{n}$ est une série divergente

Q: COMMENT ENCADRER DES SOMMES PARTIELLES ?

théorème 14: comparaison série intégrale - méthode des rectangles

Soit f une fonction définie et continue sur $[n_0, +\infty[$. ($n_0 \in \mathbb{N}$ fixé).

On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} f(k)$

1. Si f est décroissante sur $[n_0, +\infty[$ alors

$$\text{pour tout } n \geqslant n_0 \text{ on a } \int_{n_0}^{n+1} f(t)dt \leqslant S_n \leqslant f(n_0) + \int_{n_0}^{n} f(t)dt$$

2. Si f est croissante sur $[n_0, +\infty[$ alors

$$\text{pour tout } n \geqslant n_0 \text{ on a } \int_{n_0}^{n+1} f(t)dt \geqslant S_n \geqslant f(n_0) + \int_{n_0}^{n} f(t)dt$$

3. Si f est décroissante sur $[n_0, +\infty[$ et que la série converge de tg $f(n)$ alors

$$\text{pour tout } n \geqslant n_0 \text{ on a } \int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leqslant R_n \leqslant \int_{n}^{+\infty} f(t)dt$$

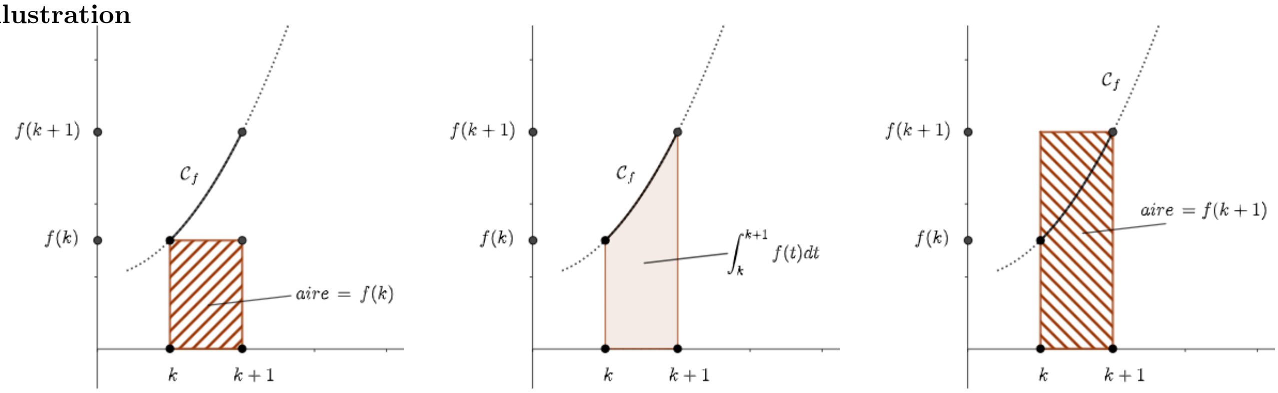
- **Raisonnement dans le cas d'une fx croissante:**
  Si f est croissante sur $[k,k+1]$, on a

$$\forall t \in [k,k+1], f(k) \leqslant f(t) \leqslant f(k+1)$$

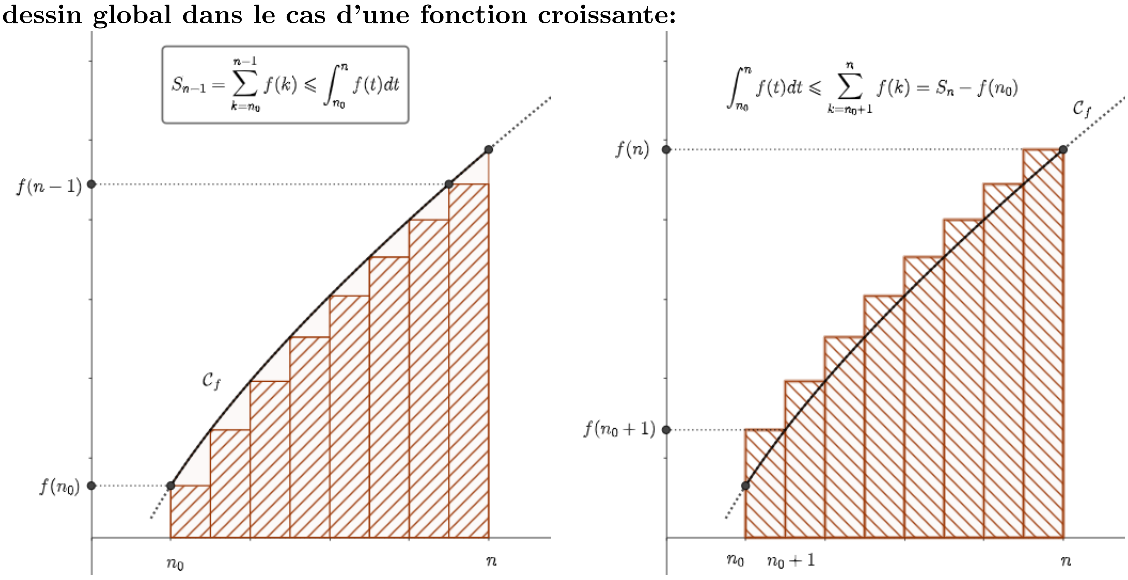
  et par croissance de l'intégrale

$$\underbrace{\int_k^{k+1} f(k)dt}_{=f(k)} \leqslant \int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant \underbrace{\int_k^{k+1} f(k+1)dt}_{=f(k+1)}$$

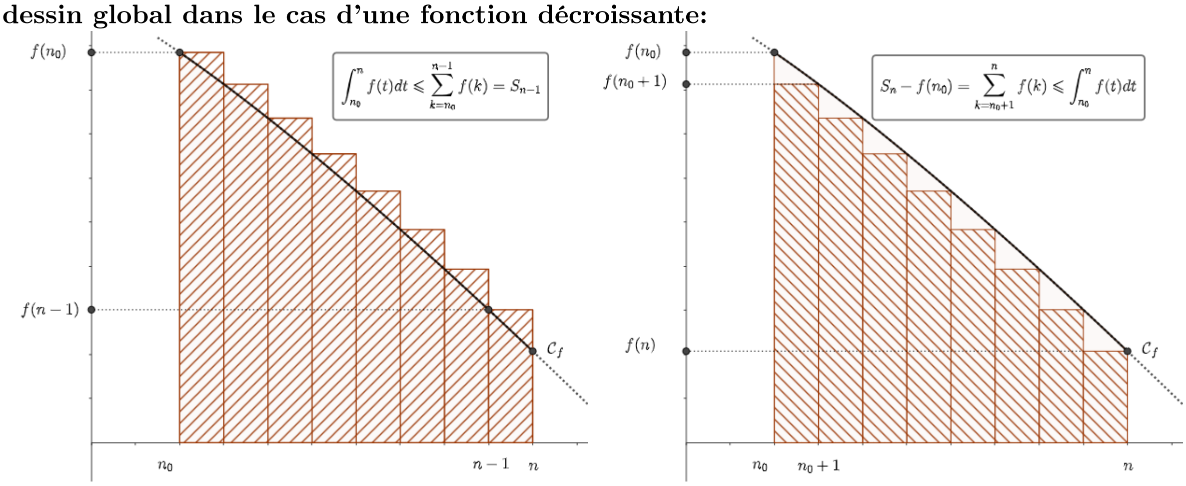
- **illustration**



- **dessin global dans le cas d'une fonction croissante:**



- **dessin global dans le cas d'une fonction décroissante:**



3 Convergence absolue - suite sommable

définition 7: convergence absolue, complément à la définition 4

On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente (AVC), ou encore que la suite (u_n) est sommable lorsque la série de terme général $|u_n|$ converge, càd lorsque $\sum |u_n|$ converge.

Dans ce cas, on peut noter $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} |u_n| < +\infty$ et $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$ est appelée somme de la suite

rem: la notion de convergence absolue est liée à une série, la notion de sommabilité est liée à une suite

exemple 10:

On sait que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série (absolument) convergente et que sa somme vaut $\frac{\pi^2}{6}$.

On pourrait dire de manière équivalente que *la suite* $(\frac{1}{n^2})_{n\geqslant 1}$ *est sommable et que sa somme vaut* $\frac{\pi^2}{6}$

théorème 15: théorèmes de comparaison

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques

1. **comparaison avec les inégalités:**

   Si $\begin{cases} |u_n| \leqslant |v_n| \text{à partir d'un certain rang} \\ \sum v_n \text{est ACV} \end{cases}$ alors $\sum u_n$ est ACV

2. **comparaison avec les O:**

   Si $\begin{cases} u_n = O(v_n) \\ \sum v_n \text{est ACV} \end{cases}$ alors $\sum u_n$ est ACV

3. **comparaison avec les o:**

   Si $\begin{cases} u_n = o(v_n) \\ \sum v_n \text{est ACV} \end{cases}$ alors $\sum u_n$ est ACV

4. **comparaison avec les équivalents:**

   Si $u_n \sim v_n$ alors $\begin{cases} \text{l'absolue convergence de } \sum u_n \text{ équivaut à l'absolue convergence de } \sum v_n \\ \text{les séries } \sum |u_n| \text{ et } \sum |v_n| \text{ sont de même nature} \\ \sum u_n \text{ ACV} \Longleftrightarrow \sum v_n \text{ ACV} \\ \sum |u_n| \text{ DV} \Longleftrightarrow \sum |v_n| \text{ DV} \end{cases}$

rem: à chaque fois, on aurait pu écrire "(u_n) est sommable" à la place de "$\sum u_n$ ACV"

remarque 12 (***en lien avec les probabilités***)

1. *Il est facile de montrer que*

   $\boxed{\textit{La somme de deux séries ACV est encore une série ACV}}$

   De cette propriété, on en déduira que si X et Y sont deux variables aléatoires qui possèdent une espérance alors $X + Y$ est une v.a. qui possède une espérance.

2. *Dans la définition de l'espérance on impose l'absolue convergence et pas seulement la convergence. Car on a le résultat hors-programme suivant (développé plus loin):*

   $\boxed{\textit{toute série ACV est commutativement convergente}}$

   Ceci nous permet d'assurer que l'espèrance d'une v.a. ne dépendra pas de la manière dont on aura numéroté les valeurs prises par X.

   Si on a $X(\Omega) = \{x_k | k \in \mathbb{N}\} = \{y_l | l \in \mathbb{N}\}$ *alors* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k P(X = x_k) = \sum\limits_{l=0}^{\infty} y_l P(X = y_l) \quad (= E(X))$

exemple 11:

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{n}{n+1}.\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n$

- On a $u_n \sim \left(\dfrac{-1}{2}\right)^n = v_n$
- La série de terme général v_n est une série géométrique de raison $q = \dfrac{-1}{2}$ avec $|q| < 1$; la série $\sum v_n$ est donc ACV
- La règle des équivalents permet d'affirmer que la série $\sum u_n$ est ACV aussi

4 Produit de Cauchy de deux séries numériques

Q: Est-il possible de définir le produit de deux séries?

théorème 16: Produit de Cauchy

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries absolument convergentes.

On note $w_n = \sum\limits_{p+q=n} u_p v_q = \sum\limits_{p=0}^{n} u_p v_{n-p} = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots u_{n-1} v_1 + u_n v_0$ pour tout $n \geqslant 0$

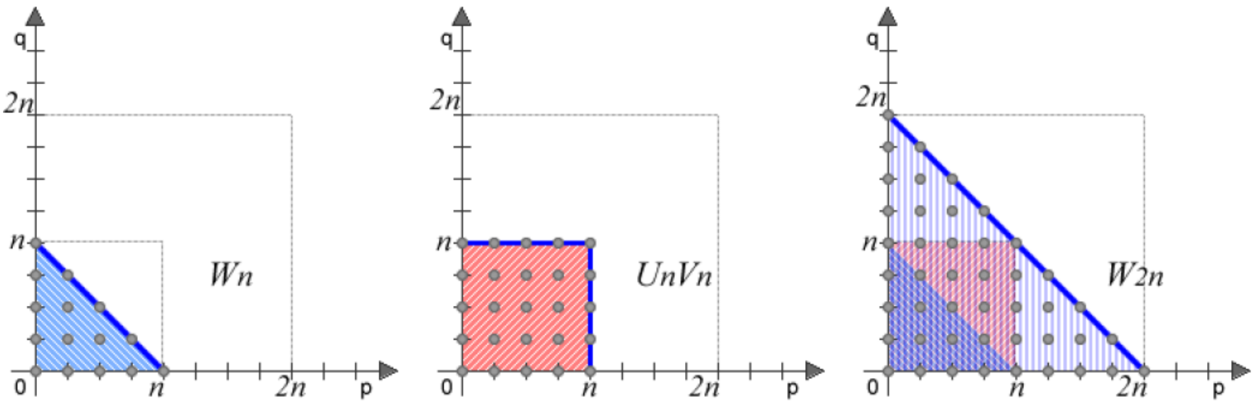
Alors la série de terme général w_n est absolument convergente et $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n = (\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n)(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n)}$

rem: on notera que l'on n'a pas $(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n)(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n.v_n$

rem: la formule du produit de Cauchy de deux séries numériques évoque la formule du produit de deux polynômes

idée de la démonstration

- Notons $U_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$, $V_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$, et $W_n = \sum\limits_{k=0}^{n} w_k$
- Lorsque les termes généraux sont positifs on a $W_n \leqslant U_n.V_n \leqslant W_{2n}$



exemple 12: produit de Cauchy et fonction exponentielle

1. Montrer que pour tout complexe z, la série de terme général $\dfrac{z^n}{n!}$ est convergente.

   On rappelle que par définition on note $\boxed{\exp(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!} \text{ pour tout } z \text{ complexe}}$

2. Retrouver avec cette expression de $\exp(z)$ que $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$ pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^2$

5 Séries alternées

définition 8: série alternée

On appelle <u>série alternée</u> toute série $\sum u_n$ telle que pour tout n, $u_n.u_{n+1} < 0$

rem: le terme général d'une série alternée se présente sous la forme $(-1)^n.v_n$ *ou* $(-1)^{n+1}.v_n$ *avec* (v_n) *suite positive*

exemple 13: parmi les séries suivantes, lesquelles sont des séries alternées?

$$\sum(-1)^n.\frac{\cos n}{n^2} \qquad \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad \sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^{n+1}}{n\ln n} \qquad \sum\frac{(-1)^{n+1}}{2^{3n-4}} \qquad \sum(-1)^n\arcsin(\frac{1}{n})$$

théorème 17: critère spécial de convergence des séries alternées

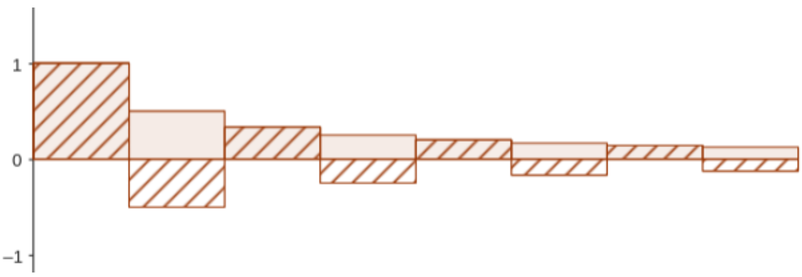
Soit $\sum u_n$ une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroit et tend vers zéro.
Alors :

i.) la série $\sum u_n$ est une série convergente

ii.) pour tout entier n, la somme de la série est comprise entre deux sommes partielles consécutives, S_n et S_{n+1}

iii.) pour tout entier n, le reste d'ordre n, R_n est du même signe que u_{n+1}

iv.) pour tout entier n, $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$



exemple 14: la série harmonique alternée

On s'intéresse à la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

- *Cette série est clairement une série alternée*
- *La suite* $(|u_n|)$ *est clairement décroissante et tend vers zéro.*

  D'après le CSCSA on peut affirmer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n}{n}$ *est convergente.*

  (on note que cette série n'est pas ACV)

- *On a* $S_1 = -1, S_2 = -1 + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$ *et* $S_3 = S_2 - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{5}{6}$

  On a ainsi

$$-\frac{5}{6} \leqslant S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} \leqslant -\frac{1}{2}$$

- *On a* $|R_n| \leqslant |u_{n+1}| = \dfrac{1}{n+1}$.

  Pour obtenir une v.a. de S *à* 10^{-2} *près, il suffit donc de choisir* n *tel que* $\dfrac{1}{n+1} \leqslant 10^{-2}$, *càd* $n \geqslant 99$.

  Ainsi S_{99} *est une v.a. de* S *à* 10^{-2} *près*

- *Comme* $sg(R_{99}) = sg(u_{100}) > 0$, *on en déduit que*

$$\boxed{S_{99} \text{ est une v.a. par défaut à } 10^{-2} \text{ près}}$$

- *On montrera en exercice que* $S = -\ln 2$

6 Démonstrations

démonstration du théorème 2:

Soit $\sum u_n$ *une série convergente.*
Pour tout $n \geqslant n_0$, *on a*

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=n_0}^{n+1} u_k - \sum_{k=n_0}^{n} u_k = u_{n+1}$$

Comme $\sum u_n$ *converge on sait que* $\lim S_n$ *existe et est finie (notons la* S*)*
On a alors

$$\lim S_{n+1} - S_n = \lim S_{n+1} - \lim S_n = S - S = 0$$

Ainsi $\lim u_{n+1} = 0$
Ce qui signifie exactement que la suite (u_n) *tend vers zéro!*

tableau des différents cas pour la limite d'une somme et le produit par un scalaire

$\lim S_n$	$\lim T_n$	$\lim(S_n + T_n)$
$l \in \mathbb{R}$	$l' \in \mathbb{R}$	$l + l' \in \mathbb{R}$
$+\infty$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$l' \in \mathbb{R}$	$-\infty$
$\nexists$	$l' \in \mathbb{R}$	$\nexists$
$\nexists$	$+\infty$	Forme Indet.

$\lim S_n$	$\lim T_n$	$\lim(S_n + T_n)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Forme Indet.
$\nexists$	$\nexists$	Forme Indet.
$\nexists$	$-\infty$	Forme Indet.

$\lim S_n$	λ	$\lim(\lambda.S_n)$
$l \in \mathbb{R}$	$\lambda \in \mathbb{R}$	$\lambda.l \in \mathbb{R}$
$+\infty$	$\lambda > 0$	$+\infty$
$+\infty$	$\lambda < 0$	$-\infty$
$+\infty$	$\lambda = 0$	0
$\nexists$	$\lambda = 0$	0
$\nexists$	$\lambda \neq 0$	$\nexists$

démonstration du théorème 10.

- Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries telles que pour n suffisamment grand, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.
- Quitte à changer un nombre fini de termes (ce qui ne change pas la nature d'une série), on peut supposer que $\forall n \geqslant n_0, 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$

- Notons S_n [resp. T_n] la somme partielle d'indice n de la série $\sum u_n$ [resp. $\sum v_n$]
- Comme les séries sont de terme général positif, on peut affirmer que
  $\boxed{\text{les suites des sommes partielles } (S_n) \text{ et } (T_n) \text{ sont deux suites croissantes}}$

1. **Montrons une inégalité entre S_n et T_n.**
   Soit $n \geqslant n_0$
   Comme
   $$\text{pour tout } k \in [\![n_0, n]\!] \text{ on a } 0 \leqslant u_k \leqslant v_k$$
   on a par sommation
   $$\sum_{k=n_0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} v_k$$
   On vient de montrer que $\boxed{\forall n \geqslant n_0, S_n \leqslant T_n}$

2. **Montrons que $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge**
   Soit $\sum v_n$ une série convergente.
   Par définition ceci signifie que la suite (T_n) est convergente

   Or "toute suite convergente est bornée (et donc en particulier majorée)",
   ce qui assure $\boxed{\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \geqslant n_0, T_n \leqslant M}$

   Par transitivité de la relation $\leqslant$ on en déduit que $\forall n \geqslant n_0, S_n \leqslant M$

   On vient d'établir que la suite (S_n) est majorée.

   Comme la suite (S_n) est croissante et majorée, elle est convergente, càd $\sum u_n$ converge

- Le point ii) du théorème n'est rien d'autre que la contraposée du point i)

démonstration du critère spécial des séries alternées

On considère une série alternée $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$.
On se place dans le cas où les termes d'indices pairs[impairs] sont positifs[négatifs]
On a donc $\forall n \geqslant 0, u_n = (-1).|u_n|$
On suppose que la suite $(|u_n|)$ est décroissante et tend vers 0.

- On note pour tout $n \in \mathbb{N}$
  - $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ la somme partielle d'indice n
  - $T_n = S_{2n}$
  - $W_n = S_{2n+1}$

1. On montre que les suites (T_n) et (W_n) sont deux suites adjacentes
   (en classe)
2. On montre que (S_n) est une suite convergente
   (a) Comme les suites (T_n) et (W_n) sont adjacentes, on sait d'après le théorème sur les suites adjacentes(théorème 18 du poly "suites numériques") que ces deux suites convergent vers une même limite l
   (b) On sait maintenant que les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers une même limite.
   On sait alors que l'on peut affirmer (grâce au théorème 3 du poly "suites numériques") que la suite (S_n) converge vers cette limite l
3. On conclut sur la nature de la série
   La suite des sommes partielles (S_n) est convergente: on sait que c'est la définition de "$\sum u_n$ est une série convergente"
4. On établit les résultats quantitatifs