1 Droites, projection sur une droite

exercice 1

Ecrire une équation paramétrique de la droite passant par les point $A(1{,}2{,}3)$ *et* $B(4{,}5{,}2)$

exercice 2

On considère la droite D *qui passe par le point* $A(3{,}2{,}1)$ *et dirigée par le vecteur* $\vec{d} = (1{,}2, -1)$

1. *Donner une représentation paramétrique de* D
2. *Définir* D *comme l'intersection de deux plans*

exercice 3

Soit D *la droite définie par l'intersection des plans* $\begin{cases} x + y - 2z & = 1 \\ x + 3z & = 2 \end{cases}$

Donner un point et un vecteur directeur de D

exercice 4

On considère les points $A(1{,}2{,}1), B(2{,}3, -1)$ *et* $C(0{,}2{,}4)$
Ecrire une représentation paramétrique de la droite D *passant par le point* C *et parallèle à la droite* (AB)

exercice 5

On considère le plan (P) *d'équation* $x + 3y - 2z = 8$ *et le point* $A(1{,}0{,}2)$.
Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) *passant par* A *et perpendiculaire au plan* (P)

exercice 6

On considère la droite (D) *passant par le point* $A(1{,}1{,}0)$ *et de vecteur directeur* $\overrightarrow{d} = (-1{,}2{,}3)$.
Déterminer le projeté orthogonal du point $B(1{,}4{,}8)$ *sur la droite* (D)

exercice 7

On considère les points $A(2, -2{,}0), \quad B(4{,}2{,}6)$ *et* $C(-1, -3{,}0)$.
Déterminer l'orthocentre du triangle ABC

exercice 8

On considère les points $A(2, -2{,}0), \quad B(4{,}2{,}6)$ *et* $C(0{,}0{,}2)$.
Déterminer le point d'intersection des médianes du triangle (ABC)

exercice 9

On considère les points $A(2, -2{,}0), \quad B(4{,}2{,}6)$ *et* $C(-1, -3{,}0)$.
Déterminer le point d'intersection des médiatrices du triangle (ABC)

exercice 10

On considère les points $A(1, -1{,}0), \quad B(0{,}1{,}1)$ *et* $O(0{,}0{,}0)$.
Déterminer le point d'intersection des bissectrices du triangle (OAB)

2 Plans

exercice 51

On considère le plan P passant par le point $A(1,2,4)$ et de couple de vecteurs directeurs $(\overrightarrow{d_1},\overrightarrow{d_2})$ avec $\overrightarrow{d_1}=(1,1,-2)$ et $\overrightarrow{d_2}=(2,0,1)$.

1. *Donner une représentation paramétrique de P*
2. *Donner une équation cartésienne de P*

exercice 52

On considère le plan P qui passe par les points $A(1,1,2), B(2,0,4)$ et $C(1,2,-2)$

1. *Donner une représentation paramétrique de P*
2. *Donner une équation cartésienne de P*

exercice 53

On considère le plan P passant par le point $A(1,0,3)$ et de couple de vecteurs directeurs $(\overrightarrow{d_1},\overrightarrow{d_2})$ avec $\overrightarrow{d_1}=(1,-1,-2)$ et $\overrightarrow{d_2}=(1,1,1)$.
Donner un vecteur normal au plan P

exercice 54

On considère le plan P passant par le point $A(0,2,1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}=(1,3,2)$.
Déterminer une équation cartésienne de P

exercice 55

On considère le plan P passant par le point $A(1,2,1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}=(1,-1,2)$.
Déterminer une représentation paramétrique de P

exercice 56

On considère le point $A(1,2,-3)$ et la droite (D) : $\begin{cases} x-y+z & =1 \\ x+2z & =0 \end{cases}$
Déterminer le plan qui contient la droite (D) et le point A.

exercice 57

On considère

- *le plan P d'équation $x+y-2z=5$*
- *le point $A(1,4,3)$*

Déterminer l'intersection de P et de la droite perpendiculaire à P passant par A

exercice 58

3 Sphères

exercice 101

Soient les points $A(1{,}2{,}3)$ *et* $B(3{,}4{,}-1)$.
Déterminer l'équation cartésienne de la sphère de diamètre $[AB]$

exercice 102

On considère la sphère S *de centre* $\Omega(2{,}0{,}1)$ *et de rayon* 5
Déterminer la nature et l'intersection de S *avec le plan* xOy

exercice 103

On considère

- *la sphère* S *de centre* $\Omega(1{,}1{,}2)$ *et de rayon* $R = 4$
- *le plan* P *d'équation* $x + y - z = 4$

Déterminer la nature de l'intersection de S *et de* P

4 Perpendiculaire commune, distance entre deux droites

exercice 151

On considère

- *la droite* (D_1) *qui passe par le point* $A_1(1{,}2{,}0)$ *et de vecteur directeur* $\overrightarrow{u_1} = (1{,}1{,}1)$
- *la droite* (D_2) *qui passe par le point* $A_2(0{,}1{,}0)$ *et de vecteur directeur* $\overrightarrow{u_1} = (0{,}1{,}2)$

Déterminer la perpendiculaire commune aux droites (D_1) *et* (D_2)

exercice 152

On considère

- *la droite* (D_1) *qui passe par le point* $A_1(1{,}0{,}0)$ *et de vecteur directeur* $\overrightarrow{u_1} = (1{,}0{,}1)$
- *la droite* (D_2) *définie par* $\begin{cases} x - 2y - 1 & = 0 \\ y + z + 1 & = 0 \end{cases}$

Déterminer la perpendiculaire commune aux droites (D_1) *et* (D_2)

exercice 153

On considère

- *la droite* (D_1) *qui passe par le point* $A_1(1{,}2{,}1)$ *et de vecteur directeur* $\overrightarrow{u_1} = (-1{,}1{,}1)$
- *la droite* (D_2) *qui passe par le point* $A_2(0{,}1{,}0)$ *et de vecteur directeur* $\overrightarrow{u_1} = (0{,}1{,}1)$

Déterminer la distance entre les droites (D_1) *et* (D_2)

exercice 154

Soient les deux droites $(D_1) : \begin{cases} x - y & = 1 \\ y + z & = 0 \end{cases}$ *et* $(D_2) : \begin{cases} x + z & = 0 \\ y - 2x & = 1 \end{cases}$.

Déterminer la perpendiculaire commune à ces deux droites ainsi que la distance entre ces deux droites.

exercice 155

exercice 156

exercice 157

exercice 158

Solutions

résolution 1 Il s'agit d'écrire une équation paramétrique de la droite passant par le point $A(1,2,3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB} = (3,3,-1)$.

On écrit donc directement

$$\boxed{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & A + t\overrightarrow{AB} = (1+3t,2+3t,3-t) \end{array}}$$

ce qui se présente encore sous la forme

$$\boxed{\begin{cases} x & = 1+3t \\ y & = 2+3t \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R} \\ z & = 3-t \end{cases}}$$

résolution 2

1. On écrit directement

$$\boxed{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & A+t\vec{d}=(3+t,2+2t,1-t) \end{array}}$$

ce qui se présente encore sous la forme

$$\boxed{\begin{cases} x &= 3+t \\ y &= 2+2t \text{ avec } t\in\mathbb{R} \\ z &= 1-t \end{cases}}$$

2. A partir de la représentation paramétrique ci-dessus, une méthode consiste à éliminer le paramètre t.

$$\begin{cases} x &= 3+t \\ y &= 2+2t \\ z &= 1-t \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+z &= 4 & (L_1 \longleftarrow L_1+L_3) \\ y+2z &= 4 & (L_2 \longleftarrow L_2+2L_3) \\ z &= 1-t \end{cases}$$

D est donc , par exemple, défini comme l'intersection des plans d'équations $x+z=4$ et $y+2z=4$. Ce que l'on écrit

$$\boxed{D:\begin{cases} x+z &= 4 \\ y+2z &= 4 \end{cases}}$$

résolution 3 • Pour trouver un point de D, il suffit de déterminer un triplet (x,y,z) qui vérifie le système, par exemple le point $A(2,-1,0)$

- $\overrightarrow{n_1} = (1,1,-2)$ est un vecteur normal au plan d'équation $x + y - 2z = 1$

- $\overrightarrow{n_2} = (1,0,3)$ est un vecteur normal au plan d'équation $x + 3z = 0$

- Le produit vectoriel $\overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D

résolution 4

- La droite (AB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB} = (1,1,-2)$
- La droite D est la droite qui passe par le point C et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$; sa représentation paramétrique est donc

$$\boxed{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & C + t.\overrightarrow{AB} = (0+t,2+t,4-2t) \end{array}}$$

ce que l'on présente encore sous la forme

$$\boxed{\begin{cases} x &= t \\ y &= 2+t \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \\ z &= 4-2t \end{cases}}$$

résolution 5

- Le vecteur $\vec{n} = (1{,}3,-2)$ est un vecteur normal au plan (P) donc est une vecteur directeur de la droite (D)
- La représentation paramétrique de (D) est ainsi

$$\boxed{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & A + t.\overrightarrow{d} = (1+t{,}0+3t{,}2-2t) \end{array}}$$

résolution 6 • Notons K le projeté orthogonal du point $B(1,4,8)$ sur la droite (D)

- On va utiliser la formule du projeté orthogonal.

$$\overrightarrow{AK} = \frac{<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{d}>}{||\overrightarrow{d}|^2}.\overrightarrow{d}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
K &= A + \frac{<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{d}>}{||\overrightarrow{d}||^2}.\overrightarrow{d} \\
&= \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{<\begin{pmatrix}0\\3\\8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}>}{14}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{15}{7}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}-8/7\\37/7\\45/7\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Le point } K \text{ a pour coordonnées } (-8/7,37/7,45/7)}$

[scale=0.7]geo3D$_0$06.*eps*

résolution 7 • On note $A(2,-2{,}0)$, $B(4{,}2{,}6)$ et $C(-1,-3{,}0)$

- Le plan ABC a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-3\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-18\\10\end{pmatrix}$

  Notons $\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\-9\\5\end{pmatrix}$: c'est un vecteur normal à ce plan.

  [scale=1.1]GEO3D$_9$75.*eps*

- **La hauteur issue de** A est la droite (D_A) qui passe par A et qui est perpendiculaire à (BC), c'est à dire qui a pour vecteur directeur $\vec{d_A}=\vec{n}\wedge\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}3\\-9\\5\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-5\\-5\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}79\\-7\\-60\end{pmatrix}$.

  Une représentation paramétrique de (D_A) est donc

$$\boxed{\begin{array}{lll}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ \lambda & \longmapsto & \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A+\lambda.\vec{d_A}=\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}+\lambda.\begin{pmatrix}79\\-7\\-60\end{pmatrix}\end{array}}$$

- **La hauteur issue de** B est la droite (D_B) qui passe par B et qui est perpendiculaire à (AC), c'est à dire qui a pour vecteur directeur $\vec{d_B} = \vec{n} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -15 \\ -30 \end{pmatrix} = 5.\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$

  Une représentation paramétrique de (D_B) est donc

$$\boxed{\begin{array}{lll} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \mu & \longmapsto & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B + \mu.\vec{d_B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu.\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \end{array}}$$

- **Notons Ω l'orthocentre du triangle** ABC, c'est à dire l'intersection des droites (D_A) et (D_B). Les coordonnées de Ω sont caractérisées par le système

$$\begin{cases} x & = 2 + 79\lambda \\ y & = -2 - 7\lambda \\ z & = -60\lambda \\ x & = 4 + \mu \\ y & = 2 - 3\mu \\ z & = 6 - 6\mu \end{cases}$$

  La résolution de ce système donne $\boxed{\Omega(\frac{125}{23} \frac{-53}{23}, \frac{-60}{23}}$!
  (pour info: avec $\lambda = 1/23$ et $\mu = 33/23$)

résolution 8 • On considère les points $A(2,-2{,}0)$, $B(4{,}2{,}6)$ et $C(0{,}0{,}2)$.

[scale=1.1]GEO3D$_0$08.$eps Notons$H$le milieu du segment$[BC]
$On a$H=$\left(\dfrac{x_B+x_C}{2},\dfrac{y_B+y_C}{2},\dfrac{z_B+z_C}{2}\right)=(2{,}1{,}4)$

- Notons (D_A) la médiane issue de A.
  c' est la droite qui passe par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AH}=(0{,}3{,}4)$
  sa représentation paramétrique est donc

$$\boxed{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \lambda & \longmapsto & \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A+\lambda.\overrightarrow{AH}=\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}+\lambda.\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}\end{array}}$$

- Notons K le milieu du segment $[AC]$
  On a $K = \left(\dfrac{x_A + x_C}{2}, \dfrac{y_A + y_C}{2}, \dfrac{z_A + z_C}{2}\right) = (1, -1, 1)$
- Notons (D_B) la médiane issue de B.
  c' est la droite qui passe par le point B et de vecteur directeur $\overrightarrow{BK} = (-3, -3, -5)$
  sa représentation paramétrique est donc

$$\boxed{\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \mu & \longmapsto & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B + \mu.\overrightarrow{BK} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu. \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} \end{array}}$$

- Notons Ω le point de concourance des médianes.
  Les coordonnées de Ω sont caractérisées par le système

$$\begin{cases} x & = 2 \\ y & = -2 + 3\lambda \\ z & = 4\lambda \\ x & = 4 - 3\mu \\ y & = 2 - 3\mu \\ z & = 6 - 5\mu \end{cases}$$

La résolution de ce système donne $\boxed{\Omega(2,0,\frac{8}{3})}$!
(pour info: avec $\lambda = \mu = 2/3$)

résolution 9 • On note $A(2,-2{,}0)$, $B(4{,}2{,}6)$ et $C(-1,-3{,}0)$.

• Le plan ABC a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-2\\2\\+2\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=4.\begin{pmatrix}-1\\-4\\3\end{pmatrix}$

Notons $\vec{n}=\begin{pmatrix}-1\\-4\\3\end{pmatrix}$: c'est un vecteur normal à ce plan.

[scale=1.1]geo3D$_0$09.$epsNotons$H$lemilieudusegment$[BC]
OnaH=$\left(\dfrac{x_B+x_C}{2},\dfrac{y_B+y_C}{2},\dfrac{z_B+z_C}{2}\right)=(2{,}1{,}4)$

• **Notons** (D_H) **la médiatrice du segment** $[BC]$
c' est la droite qui passe par le point H et qui est perpendiculaire à la droite (BC), c'est donc une droite de vecteur directeur $\vec{n}\wedge\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-1\\-4\\3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-4\\-2\\-4\end{pmatrix}=2.\underbrace{\begin{pmatrix}11\\-8\\-7\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{d_H}}$.

Une représentation paramétrique de (D_H) est donc

$$\boxed{\begin{array}{lll}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ \lambda & \longmapsto & \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=H+\lambda.\vec{d}_H=\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}+\lambda.\begin{pmatrix}11\\-8\\-7\end{pmatrix}\end{array}}$$

• Notons K le milieu du segment $[AC]$
On a $K=\left(\dfrac{x_A+x_C}{2},\dfrac{y_A+y_C}{2},\dfrac{z_A+z_C}{2}\right)=(1,-1{,}1)$

• **Notons** (D_K) **la médiatrice du segment** $[AC]$
c' est la droite qui passe par le point K et qui est perpendiculaire à la droite (AC), c'est donc une droite de vecteur directeur $\vec{n}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-1\\-4\\3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}=-2.\underbrace{\begin{pmatrix}7\\2\\5\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{d_K}}$.

Une représentation paramétrique de (D_K) est donc

$$\boxed{\begin{array}{lll}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ \mu & \longmapsto & \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=K+\mu.\vec{d}_K=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\mu.\begin{pmatrix}7\\2\\5\end{pmatrix}\end{array}}$$

• Notons Ω le point de concourance des médiatrices.

Les coordonnées de Ω sont caractérisées par le système

$$\begin{cases} x & = 2 + 11.\lambda \\ y & = 1 - 8\lambda \\ z & = 4 - 7\lambda \\ x & = 1 + 7\mu \\ y & = -1 + 2\mu \\ z & = 1 + 5\mu \end{cases}$$

La résolution de ce système donne $\boxed{\Omega(\frac{48}{13}, \frac{-3}{13}, \frac{38}{13})}$!
(pour info: avec $\lambda = 2/13$ et $\mu = 5/13$)
Le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est le point Ω, point de concours des mÃ©diatrices

résolution 10 • On note $A(1,-1{,}0)$, $B(0{,}1{,}1)$ et $O(0{,}0{,}0)$.

[scale=1.1]geo3D$_0$10.*eps*

• **La bissectrice issue de** A est la droite qui passe par le point A et a pour vecteur directeur

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{||\overrightarrow{AB}||}+\frac{\overrightarrow{AO}}{||\overrightarrow{AO}||}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{6}}.\underbrace{\begin{pmatrix}-1-\sqrt{3}\\2+\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}}_{=\overrightarrow{d_A}}$$

Une représentation paramétrique de cette bissectrice est donc

$$\boxed{\begin{array}{lll}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ \lambda & \longmapsto & \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A+\lambda.\vec{d_A}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\lambda.\begin{pmatrix}-1-\sqrt{3}\\2+\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}\end{array}}$$

- **La bissectrice issue de** O est la droite qui passe par le point O et a pour vecteur directeur

$$\frac{\overrightarrow{OA}}{||\overrightarrow{OA}||}+\frac{\overrightarrow{OB}}{||\overrightarrow{OB}||}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}.\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{=\overrightarrow{d_O}}$$

Une représentation paramétrique de cette bissectrice est donc

$$\boxed{\begin{array}{lll}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ \mu & \longmapsto & \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=O+\mu.\vec{d}_O=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+\mu.\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\end{array}}$$

- Notons Ω le point de concourance des bissectrices.
Les coordonnées de Ω sont caractérisées par le système

$$\begin{cases}x &= 1-(1+\sqrt{3}).\lambda\\ y &= -1+(2+\sqrt{3})\lambda\\ z &= \lambda\\ x &= \mu\\ y &= 0\\ z &= \mu\end{cases}$$

La résolution de ce système donne $\boxed{\Omega(2-\sqrt{3},0,2-\sqrt{3})}$!
(pour info: avec $\lambda=\mu=2-\sqrt{3}$)
Le centre du cercle inscrit dans le triangle OAB est le point de concours des bissectrices

résolution 51

1. On écrit directement

$$\boxed{\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (\lambda,\mu) & \longmapsto & A+\lambda.\overrightarrow{d_1}+\mu.\overrightarrow{d_2}=(1+\lambda+2\mu,2+\lambda,4-2\lambda+\mu) \end{array}}$$

ce que l'on présente encore sous la forme

$$\boxed{\begin{cases} x & =1+\lambda+2\mu \\ y & =2+\lambda \\ z & =4-2\lambda+\mu \end{cases} \text{ avec } (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2}$$

2. Soit M le point de coordonnées (x,y,z)
On a les équivalences

$$M\in P \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM}\in \text{vect}((\overrightarrow{d_1},\overrightarrow{d_2}) \Longleftrightarrow \det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{d_1},\overrightarrow{d_2})=0$$

L'équation cartésienne du plan est donc

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y-2 & 1 & 0 \\ z-4 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0 \text{ soit } (x-1)-5(y-2)-2(z-4)=0$$

Au final, on trouve

$$\boxed{x-5y-2z+17=0}$$

résolution 52 1. Le plan P est le plan qui passe par le point $A(1,1,2)$ et de couple de vecteurs $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = ((1,-1,2),(0,1,-4))$.
Sa représentation paramétrique est donc

$$\boxed{\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (\lambda,\mu) & \longmapsto & A + \lambda.\overrightarrow{AB} + \mu.\overrightarrow{AC} = (1+\lambda, 1-\lambda+\mu, 2+2\lambda-4\mu) \end{array}}$$

ce que l'on présente encore sous la forme

$$\boxed{\begin{cases} x &= 1+\lambda \\ y &= 1-\lambda+\mu \qquad \text{avec } (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \\ z &= 2+2\lambda-4\mu \end{cases}}$$

résolution 53 Le produit vectoriel

$$\overrightarrow{d_1} \wedge \overrightarrow{d_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

est un vecteur normal au plan P

$\boxed{\textbf{résolution 54}}$ Soit $M(x,y,z)$ un point.
On a les équivalences suivantes:

$$M \in P \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0 \iff \begin{pmatrix} x-0 \\ y-2 \\ z-1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \iff x + 3y + 2z - 8 = 0$$

P est le plan d'équation cartésienne $\boxed{x + 3y + 2z - 8 = 0}$

résolution 55 • Il nous suffit de déterminer un couple de vecteurs directeurs.
Pour cela, il suffit de donner deux vecteurs non colinéaires entre eux, et orthogonaux à $\overrightarrow{n}$
Par exemple $\overrightarrow{d_1} = (1{,}1{,}0)$ et $\overrightarrow{d_2} = (0{,}2{,}1)$

- La représentation paramétrique correspondante est

$$\boxed{\begin{array}{llll} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (\lambda,\mu) & \longmapsto & A + \lambda.\overrightarrow{d_1} + \mu.\overrightarrow{d_2} = (1+\lambda, 2+\lambda+2\mu, 1+\mu) \end{array}}$$

ce que l'on présente encore sous la forme

$$\boxed{\begin{cases} x & = 1 + \lambda \\ y & = 2 + \lambda + 2\mu \quad \text{avec } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \\ z & = 1 + \mu \end{cases}}$$

résolution 56

- On peut par exemple considérer deux points de la droite D.

$$B(0,-1,0) \qquad \text{et} \qquad C(2,0,-1)$$

- Puis écrire l'équation du plan qui passe par les points A, B et C,
  C'est à dire le plan qui passe par $B(0,-1,0)$ et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{BA}=(1,3,-3)$ et $\overrightarrow{BC}=(2,1,-1)$.

  Son équation est donc
  $$\begin{vmatrix} x-0 & 1 & 2 \\ y+1 & 3 & 1 \\ z-0 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$
  On trouve
  $$y+z+1=0$$

résolution 57

- Notons D la droite perpendiculaire à P passant par A
- un vecteur directeur de D est un vecteur normal de P, donc par exemple $\vec{d} = (1{,}1,-2)$
  Une représentation paramétrique de D est donc

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & A + t.\vec{d} = (1+t{,}4+t{,}3-2t) \end{array}$$

- L'intersection de D et P est caractérisée par le système

$$\begin{cases} x & = 1+t \\ y & = 4+t \\ z & = 3-2t \\ x+y-2z & = 5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x & = 1+t \\ y & = 4+t \\ z & = 3-2t \\ 6t-1 & = 5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x & = 1+t \\ y & = 4+t \\ z & = 3-2t \\ t & = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x & = 2 \\ y & = 5 \\ z & = 1 \\ t & = 1 \end{cases}$$

  L'intersection est le point $(2{,}5{,}1)$

résolution 58

résolution 101 • C'est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$.

L'équation est donc donnée par

$$\begin{pmatrix}x-1\\y-2\\z-3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x-3\\y-4\\z+1\end{pmatrix}=0 \text{ soit } (x-1)(x-3)+(y-2)(y-4)+(z-3)(z+1)=0$$

ce qui donne en développant $\boxed{x^2+y^2+z^2-4x-8y-2z+8=0}$

- Une autre méthode consiste à dire que c'est la sphère de centre $\Omega=mil[AB]$ et de rayon $R=\dfrac{||\overrightarrow{AB}||}{2}$
  On a ici:
  - $\Omega=\dfrac{A+B}{2}=(2{,}3{,}1)$
  - $\overrightarrow{AB}=(2{,}2,-4)$ donc $||\overrightarrow{AB}||^2=2^2+2^2+(-4)^2=24$.

    Ainsi $R=\dfrac{||\overrightarrow{AB}}{2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{2}=\sqrt{6}$

  L'équation cartésienne est ainsi $\boxed{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=(\sqrt{6})^2=6}$

résolution 102

- On sait que l'intersection d'une sphère et d'un plan est soit un cercle, soit un point, soit vide.

- L'intersection de S avec le plan xOy est caractérisé par le système

$$\begin{cases} (x-2)^2+y^2+(z-1)^2 & = 25 \\ z & = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2+y^2 & = 24 \\ z & = 0 \end{cases}$$

  On reconnait le cercle de centre (2,0,0) et de rayon $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ tracé dans le plan xOy

résolution 103

- On sait que l'intersection d'une sphère et d'un plan est soit un cercle, soit un point, soit vide.
- On a $d(\Omega,P) = \dfrac{|1+1-2-4|}{\sqrt{3}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$
- Comme $d(\Omega,P) < R$ on sait que l'intersection sera un cercle C, et que le rayon de ce cercle sera $r = \sqrt{R^2 - d(\Omega,P)^2} = \sqrt{4^2 - (\dfrac{4}{\sqrt{3}})^2} = 4.\sqrt{\dfrac{2}{3}}$
- Notons
  - $\overrightarrow{n} = (1,1,-1)$ un vecteur normal au plan P
  - A le projeté orthogonal de Ω sur P. (on sait que A sera le centre du cercle C)
- Le point A est à l'intersection du plan P et de la droite qui passe par A et est normale au plan P. Il est donc caractériser par le système

$$\begin{cases} x & = 1+t \\ y & = 1+t \\ z & = 2-t \\ x+y-z & = 4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x & = 1+t \\ y & = 1+t \\ z & = 2-t \\ 3t & = 4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x & = 7/3 \\ y & = 7/3 \\ z & = 2/3 \\ t & = 4/3 \end{cases}$$

C est le cercle de centre $A(7/3,7/3,2/3)$ et de rayon $r = 4.\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

[scale=1]resol$_1$03.eps

résolution 151 • Notons (Δ) la perpendiculaire commune à (D_1) et (D_2).

- La perpendiculaire commune (Δ) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2} = (1, -2{,}1)$

- Notons P_1 le plan passant par le point A_1 et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{n}$.
  (on considère ce plan car il contient la droite (Δ) *)*
  Ce plan a pour équation cartésienne

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y-2 & 1 & -2 \\ z-0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{c'est à dire} \quad x - z - 1 = 0$$

- Notons P_2 le plan passant par le point A_2 et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{n}$.
  (on considère ce plan car lui aussi contient la droite (Δ) *)*
  Ce plan a pour équation cartésienne

$$\begin{vmatrix} x-0 & 0 & 1 \\ y-1 & 1 & -2 \\ z-0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{c'est à dire} \quad 5x + 2y - z - 2 = 0$$

- La droite (Δ) est caractérisée par l'intersection des plans P_1 et P_2.
  On a ainsi

$$\boxed{(\Delta)\ :\ \begin{cases} x - z - 1 & = 0 \\ 5x + 2y - z - 2 & = 0 \end{cases}}$$

[scale=1.1]geo3D$_1$52.*eps*

résolution 152 • Commencçns par déterminer un point et un vecteur directeur de (D_2).

i) le point $A_2(1{,}0,-1)$ appartient à (D_2)
ii) le produit vectoriel des deux vecteurs normaux aux plans définissant (D_2) donne un vecteur directeur de (D_2), c'est à dire $\overrightarrow{u_2}=(1,-2{,}0)\wedge(0{,}1{,}1)=(-2,-1{,}1)$

- Notons (Δ) la perpendiculaire commune à (D_1) et (D_2).

- La perpendiculaire commune (Δ) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}=(1,-3,-1)$

- Notons P_1 le plan passant par le point A_1 et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{n}$.
(on considère ce plan car il contient la droite (Δ) *)*
Ce plan a pour équation cartésienne

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y-0 & 0 & -3 \\ z-0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0 \quad \text{c'est à dire} \quad 3x+2y-3z-3=0$$

- Notons P_2 le plan passant par le point A_2 et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{n}$.
(on considère ce plan car lui aussi contient la droite (Δ) *)*
Ce plan a pour équation cartésienne

$$\begin{vmatrix} x-1 & -2 & 1 \\ y-0 & -1 & -3 \\ z+1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0 \quad \text{c'est à dire} \quad 4x-y+7z+3=0$$

- La droite (Δ) est caractérisée par l'intersection des plans P_1 et P_2.
On a ainsi

$$\boxed{(\Delta)\ :\ \begin{cases} 3x+2y-3z-3 &=0 \\ 4x-y+7z+3 &=0 \end{cases}}$$

[scale=0.9]geo3D$_1$52.*eps*

résolution 153 • Notons (Δ) la perpendiculaire commune à (D_1) et (D_2).

- La perpendiculaire commune (Δ) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2} = (0,1,-1)$

- Notons P_1 le plan passant par le point A_1 et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{n}$.
  (on considère ce plan car il contient la droite (Δ) *)*
  Ce plan a pour équation cartésienne

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ y-2 & 1 & 1 \\ z-1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{c'est à dire} \quad 2x+y+z-5=0$$

- Déterminons l'intersection de P_1 avec la droite (D_2)
  (cela va nous donner le point intersection des droites (D_2) *et* (Δ) *)*

  i) Une représentation paramétrique de (D_2) est $\begin{cases} x & = 0 \\ y & = 1+\lambda \\ z & = \lambda \end{cases} \quad ,\lambda \in \mathbb{R}$

  ii) L'intersection de (D_2) avec le plan P_1 est ainsi caractérisé par le système

$$\begin{cases} x & = 0 \\ y & = 1+\lambda \\ z & = \lambda \\ 2x+y+z-5 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = 0 \\ y & = 1+\lambda \\ z & = \lambda \\ 1+2\lambda-5 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = 0 \\ y & = 3 \\ z & = 2 \\ \lambda & = 2 \end{cases}$$

  Ainsi, l'intersection de P_1 avec la droite (D_2) est le point $K_2(0,3,2)$

- La distance entre les droites (D_1) et (D_2) est égale à la distance entre le point K_2 et la droite (D_1); cette distance est donnée par la formule

$$\frac{||\overrightarrow{A_1K_2} \wedge \overrightarrow{u_1}||}{||\overrightarrow{u_1}||}$$

  avec

$$\overrightarrow{A_1K_2} \wedge \overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 3-2 \\ 2-1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (!!!)$$

  Ainsi $\boxed{d((D_1),(D_2)) = 0 \qquad (!!!)}$

  remarque: les deux droites sont en fait concourantes au point $(0,3,2)$ *!*

résolution 154 • Notons (Δ) la perpendiculaire commune à (D_1) et (D_2)

- On commence par déterminer, pour chacune des droites (D_1) et (D_2), un point et un vecteur directeur.
  i) (D_1) passe par le point $A_1(1{,}0{,}0)$ et est dirigé par $\overrightarrow{u_1} = (1{,}1,-1)$
  ii) (D_2) passe par le point $A_2(0{,}1{,}0)$ et est dirigé par $\overrightarrow{u_2} = (1{,}2,-1)$

- La perpendiculaire commune (Δ) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2} = (1{,}0{,}1)$

- Notons P_2 le plan passant par le point A_2 et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{n}$.
  (on considère ce plan car lui aussi contient la droite (Δ))
  Ce plan a pour équation cartésienne

$$\begin{vmatrix} x-0 & 1 & 1 \\ y-1 & 2 & 0 \\ z-0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{c'est à dire} \qquad x-y-z+1=0$$

- Déterminons l'intersection de P_2 avec la droite (D_1)
  (cela va nous donner le point intersection des droites (D_1) et (Δ))
  i) Une représentation paramétrique de (D_1) est $\begin{cases} x &= 1+\lambda \\ y &= \lambda \\ z &= -\lambda \end{cases} \quad ,\lambda \in \mathbb{R}$
  ii) L'intersection de (D_1) avec le plan P_2 est ainsi caractérisé par le système

$$\begin{cases} x &= 1+\lambda \\ y &= \lambda \\ z &= -\lambda \\ x-y-z+1 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 1+\lambda \\ y &= \lambda \\ z &= -\lambda \\ 2+\lambda &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= -1 \\ y &= -2 \\ z &= 2 \\ \lambda &= -2 \end{cases}$$

  Ainsi, l'intersection de P_1 avec la droite (D_2) est le point $K_1(-1,-2{,}2)$
  première conclusion: $\boxed{(\Delta) \text{ passe par le point } K_1(-1,-2{,}2) \text{ et est dirigée par le vecteur } \overrightarrow{n} = (1{,}0{,}1)}$

- La distance entre les droites (D_1) et (D_2) est égale à la distance entre le point K_1 et la droite (D_2); cette distance est donnée par la formule

$$\frac{||\overrightarrow{A_2K_1} \wedge \overrightarrow{u_2}||}{||\overrightarrow{u_2}||}$$

  avec

$$\overrightarrow{A_1K_2} \wedge \overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} -1-0 \\ -2-1 \\ 2-0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  Ainsi $\boxed{d((D_1),(D_2)) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (!!!)}$

  voir l'illustration à la page suivante

[scale=1.4]geo3D$_1$52.*eps*

résolution 155

$\boxed{\textbf{résolution 156}}$

$\boxed{\textbf{résolution 157}}$

résolution 158