Recherche d'extremum

exercice 1 (*)

Etudier les extrema locaux et globaux de $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2+xy-3 \end{array}$

exercice 2 (*)

Etudier les extrema locaux et globaux de $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2+6xy-3 \end{array}$

exercice 3 (**)

Etudier les extrema locaux et globaux de $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2+2xy-3 \end{array}$

exercice 4 (**)

Etudier les extrema locaux et globaux de $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\times]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y.(x^2+(\ln y)^2) \end{array}$

exercice 5 (*)

Etudier les extrema locaux et globaux de $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 2x^3+6xy-3y^2+2 \end{array}$

exercice 6 (**)

Etudier les extrema locaux et globaux de $f : \begin{array}{rcl} [0,1]^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x-y+x^3-y^3 \end{array}$

exercice 7

On note $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1\}$
Etudier les extrema locaux et globaux de $f : \begin{array}{rcl} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x-y+x^3-y^3 \end{array}$

exercice 8 (*)

On note D *la boule ouverte de centre* $(0,0)$ *et de rayon 1*
Etudier les extrema locaux et globaux de $f : \begin{array}{rcl} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y^3 \end{array}$

exercice 9 (**)

On note D *la boule fermée de centre* $(0,0)$ *et de rayon 1*
Etudier les extrema locaux et globaux de $f : \begin{array}{rcl} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+4y \end{array}$

exercice 10 (***)

On note D *la boule fermée de centre* $(0,0)$ *et de rayon 1*
Etudier les extrema locaux et globaux de $f : \begin{array}{rcl} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y \end{array}$

exercice 11

|

exercice 12

|

Solutions

$\boxed{\textbf{résolution 1}}$ • **$D = \mathbb{R}^2$ est un ouvert et f est de classe C^∞ sur D, on sait alors par théorème que si f présente un extremum en a alors a est un point critique**

- **Détermination des points critiques**
  On résout le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y &= 0 \\ x + 2y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y &= -2x \\ -3x &= 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{On trouve un seul point critique } (0,0)}$

- Le calcul donne

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$$

- $\boxed{\textbf{Etude du point } (0,0)}$
  - La matrice hessienne de f en $(0,0)$ est $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
  - On a

$$\chi_f(X) = \begin{vmatrix} X-2 & -1 \\ -1 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2)^2 - 1^2 = (X-3)(X-1)$$

    Les valeurs propres de H sont strictement positives (1 et 3)
    donc f **présente en** $(0,0)$ **un minimum local**

  - On remarque que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$f(x,y) = \underbrace{(x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3y^2}{4}}_{\geqslant 0} - 3 \geqslant -3 = f(0,0)$$

    donc $-3 = f(0,0)$ **est un minimum global.**

$\boxed{\textbf{résolution 2}}$ • $D = \mathbb{R}^2$ **est un ouvert et** f **est de classe** C^∞ **sur** D**,**
on sait alors par théorème que si f **présente un extremum en** a **alors** a **est un point critique**

- **Détermination des points critiques**
  On résout le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 6y & = 0 \\ 6x + 2y & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = -3y \\ y & = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{On trouve un seul point critique } (0,0)}$

- Le calcul donne

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$$

- $\boxed{\textbf{Etude du point } (0,0)}$
  - La matrice hessienne de f en $(0,0)$ est $H = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$
  - On a

$$\chi_f(X) = \begin{vmatrix} X-2 & -6 \\ -6 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2)^2 - 6^2 = (X-2-6)(X-2+6)$$

  Les valeurs propres de H sont non nulles et de signes opposés (8 et -4)
  donc f **ne présente pas d'extremum en** $(0,0)$

résolution 3 • **$D=\mathbb{R}^2$ est un ouvert et f est de classe C^∞ sur D,**
on sait alors par théorème que si f présente un extremum en a alors a est un point critique

- **Détermination des points critiques**
  On résout le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & =0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & =0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+2y & =0 \\ 2x+2y & =0 \end{cases} \iff x+y=0$$

$\boxed{\text{On trouve qu'il y a une infinité de points critiques: tous les points du type } (x_0,-x_0)}$

- Le calcul donne

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)=2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=2$$

- $\boxed{\textbf{Etude du point } (x_0,-x_0) \textbf{ avec } x_0\in\mathbb{R} \textbf{ fixé}}$

  – La matrice hessienne de f en $(x_0,-x_0)$ est $H=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

  – Comme la matrice n'est pas inversible, il va falloir conclure en étant imaginatif!

  – On remarque que $f(x_0,-x_0)=-3$
  et que

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y)=x^2+y^2+2xy-3=(x+y)^2-3 \geqslant -3=f(x_0,-x_0)$$

  On en conclut que f possède comme minimum global -3, et que celui-ci est atteint en tout point du type $(x_0,-x_0)$

résolution 4 • **$D=\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ est un ouvert et f est de classe C^∞ sur D, on sait alors par théorème que si f présente un extremum en a alors a est un point critique**

- **Détermination des points critiques**
  On résout le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2xy &= 0 \\ x^2+(\ln y)^2+2\ln y &= 0 \end{cases}$$

  Pour la première équation la seule possibilité est $x=0$ (car $y>0$) , d'où

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x &= 0 \\ (\ln y)^2+2\ln y &= 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x &= 0 \\ (\ln y).(\ln y+2) &= 0 \end{cases}$$

  $\boxed{\text{On trouve deux points critiques } (0,1) \text{ et } (0,e^{-2})}$

- Le calcul donne

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=2x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{2}{y}+2\frac{\ln y}{y}$$

- $\boxed{\textbf{Etude du point } (0,1)}$

  – La matrice hessienne de f en $(0,1)$ est $H=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$

  – Les valeurs propres de H sont strictement positives (2 est valeur propre double) donc f **présente en** $(0,0)$ **un minimum local**

  – On remarque que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ on a

$$f(x,y)=y.(x^2+(\ln y)^2)\geqslant 0=f(0,1)$$

  donc $0=f(0,1)$ **est un minimum global.**

- $\boxed{\textbf{Etude du point } (0,e^{-2})}$

  – La matrice hessienne de f en $(0,e^{-2})$ est $H=\begin{pmatrix}2e^{-2}&0\\0&-2e^{2}\end{pmatrix}$

  – Les valeurs propres de H sont non nulles et de signes opposés donc f **ne présente pas d'extremum en** $(0,e^{-2})$

résolution 5 • **$D = \mathbb{R}^2$ est un ouvert et f est de classe C^∞ sur D, on sait alors par théorème que si f présente un extremum en a alors a est un point critique**

- **Détermination des points critiques**
  On résout le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6x^2 + 6y & = 0 \\ 6x - 6y & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + x & = 0 \\ y & = x \end{cases}$$

  $\boxed{\text{On trouve deux points critiques } (0,0) \text{ et } (-1,-1)}$

- Le calcul donne

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -6$$

- **Etude du point** $(0,0)$
  - La matrice hessienne de f en $(0,0)$ est $H = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$
  - Cette matrice est symétrique réelle donc semblable à une matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$
  - On a $\lambda_1.\lambda_2 = \det(D) = \det(H) = -36$

    Les valeurs propres sont non nulles et de signes opposées,
    donc f **ne présente pas d'extremum en** $(0,0)$

- **Etude du point** $(-1,-1)$
  - La matrice hessienne de f en $(-1,-1)$ est $H = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$
  - On a $\det(H) = 36 >$ donc les valeurs propres sont non nulles et de mÃªme signe
  - On a $\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}(H) = -18 < 0$ donc les valeurs propres sont strictement négatives.
    On en déduit que f **présente un maximum local en** $(-1,-1)$
  - On peut remarquer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x,0) = +\infty$ donc la fonction f n'est pas majoré sur D et il n'y a donc pas de maximum global.
    ($f(-1,-1) = 5$ est ainsi un maximum local mais non global)

$\boxed{\text{résolution 6}}$ **• D est un ensemble fermé borné et la fonction f est continue sur D, on sait par théorème que f est bornée sur D et atteint ses bornes.**

- **Plan d'étude**
  1. Etude sur le plus grand ouvert inclus dans D (et sur lequel f est C^1)
  2. Etude sur la frontière de D
  3. Conclusion

1. $\boxed{\textbf{Etude sur } \overset{\circ}{D}}$

   (Comme $\overset{\circ}{D}$ est un ouvert, si f présente en a un extremum alors a est un point critique) **Détermination des points critiques sur $\overset{\circ}{D}$**

   On résout le système
   $$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1+3x^2 & = 0 \\ 1+3y^2 & = 0 \end{cases}$$

   $\boxed{\text{Il n'y a pas de point critique sur } \overset{\circ}{D}}$

2. $\boxed{\textbf{Etude sur la frontière de } D}$
   - Il s'agit d'étudier ce qui se passe sur le carré: pour cela nous allons étudier chaque côté. On réalise 4 TV

x	0	1
$f(x;0)$	$0 \nearrow$	2

x	0	1
$f(x;1)$	$-2 \nearrow$	0

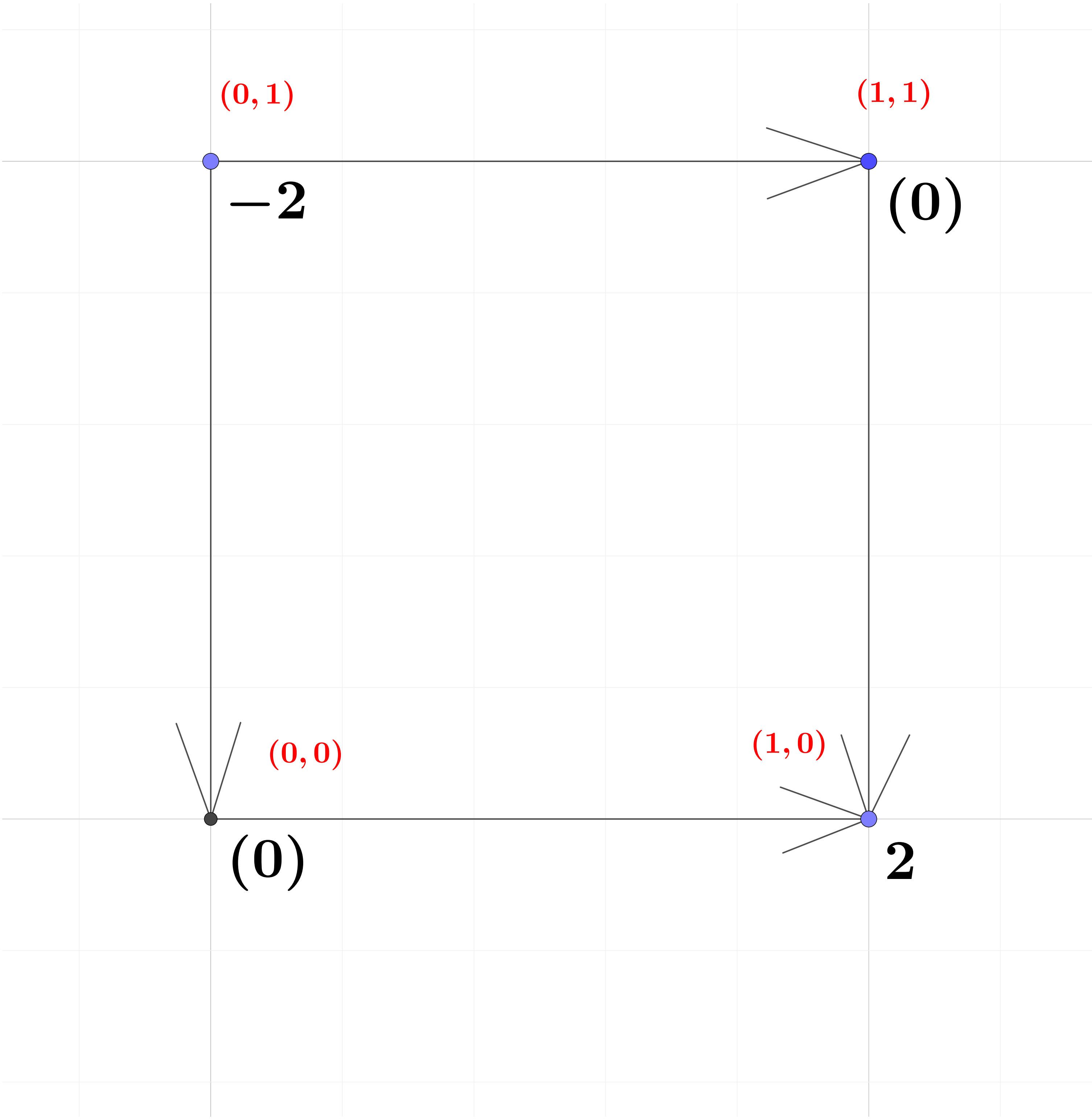
y	0	1
$f(y;0)$	$0 \searrow$	-2

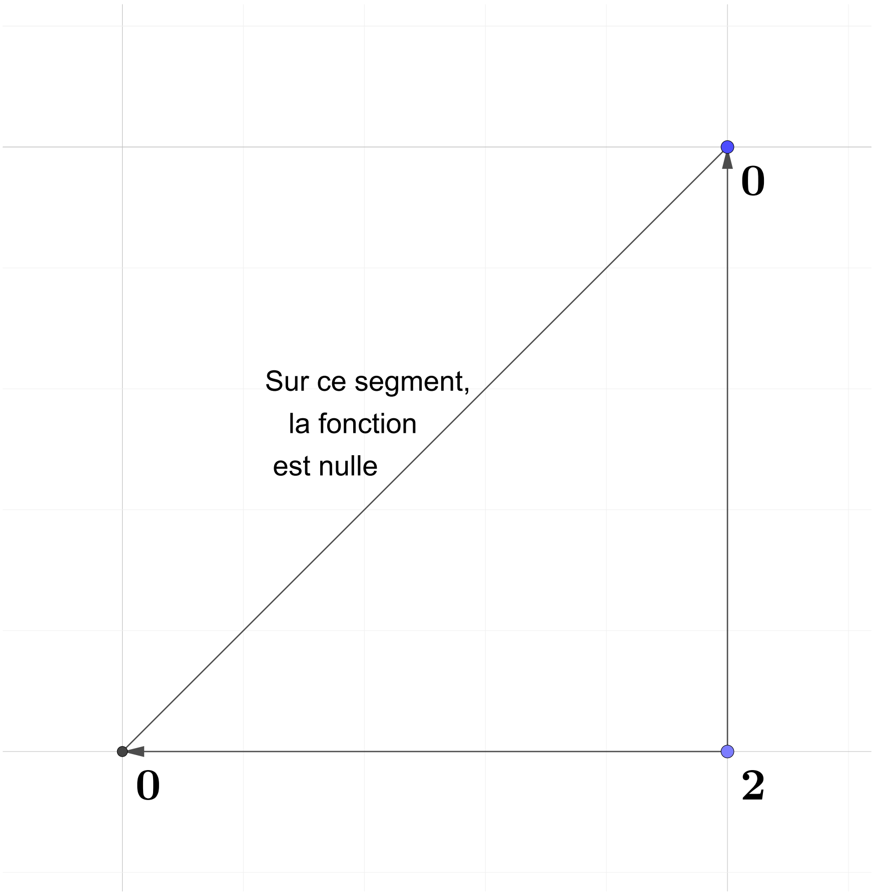
y	0	1
$f(y;1)$	$2 \searrow$	0

   On peut résumer la situation sur un schéma. (voir plus loin)
   - On trouve que f possède sur la frontière de D un minimum global (-2) et un maximum global (2) et ne présente pas d'autre extremum local.

3. $\boxed{\textbf{Conclusion}}$

   Comme on sait que f possède un maximum global et un minimum global sur D, et que sur $\overset{\circ}{D}$ ils ne s'y trouvent pas, on peut affirmer que
   - -2 **est le minimun global de f sur D, et qu'il est atteint en** $(0,1)$
   - 2 **est le maximun global de f sur D, et qu'il est atteint en** $(1,0)$
   - **f ne possède pas d'autre extremum**


(0, 1)
(1, 1)
−2
(0)
(0, 0)
(1, 0)
(0)
2



$\boxed{\textbf{résolution 7}}$ EN TRAVAUX

$\boxed{\textbf{résolution 8}}$ • $D = B_O((0,0),1)$ **est un ouvert et** f **est de classe** C^∞ **sur** D**, on sait alors par théorème que si** f **présente un extremum en** a **alors** a **est un point critique**

- **Détermination des points critiques**
  On résout le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x & = 0 \\ 3y^2 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = 0 \\ y & = 0 \end{cases}$$

  $\boxed{\text{On trouve un seul point critique } (0,0)}$

- Le calcul donne

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

- $\boxed{\textbf{Etude du point } (0,0)}$

  – La matrice hessienne de f en $(0,0)$ est $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

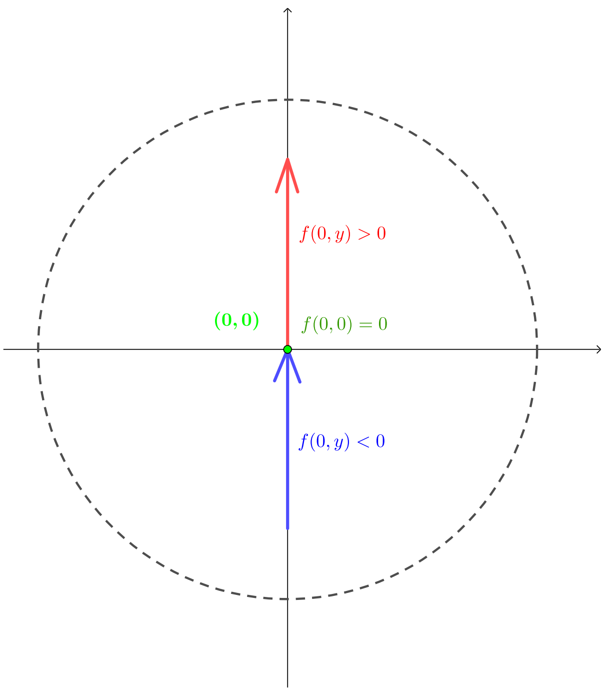
  – Comme la matrice n'est pas inversible, il va falloir conclure en étant imaginatif!

  – On remarque que

    – $\forall y > 0, f(0,y) = y > 0 = f(0,0)$

    – $\forall y < 0, f(0,y) = y < 0 = f(0,0)$

  donc f **ne présente pas d'extremum en** $(0,0)$**.**



résolution 9 • **D est un ensemble fermé borné et la fonction f est continue sur D, on sait par théorème que f est bornée sur D et atteint ses bornes.**

- **Plan d'étude**
  1. Etude sur le plus grand ouvert inclus dans D (et sur lequel f est C^1)
  2. Etude sur la frontière de D
  3. Conclusion

1. **Etude sur $\overset{\circ}{D}$**

   Comme $\overset{\circ}{D}$ est un ouvert, si f présente un extremum en a alors a est un point critique.
   Comme $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4$, il n'y a aucun point critique sur $\overset{\circ}{D}$, donc aucun extremum sur $\overset{\circ}{D}$

2. **Etude sur la frontière de D**

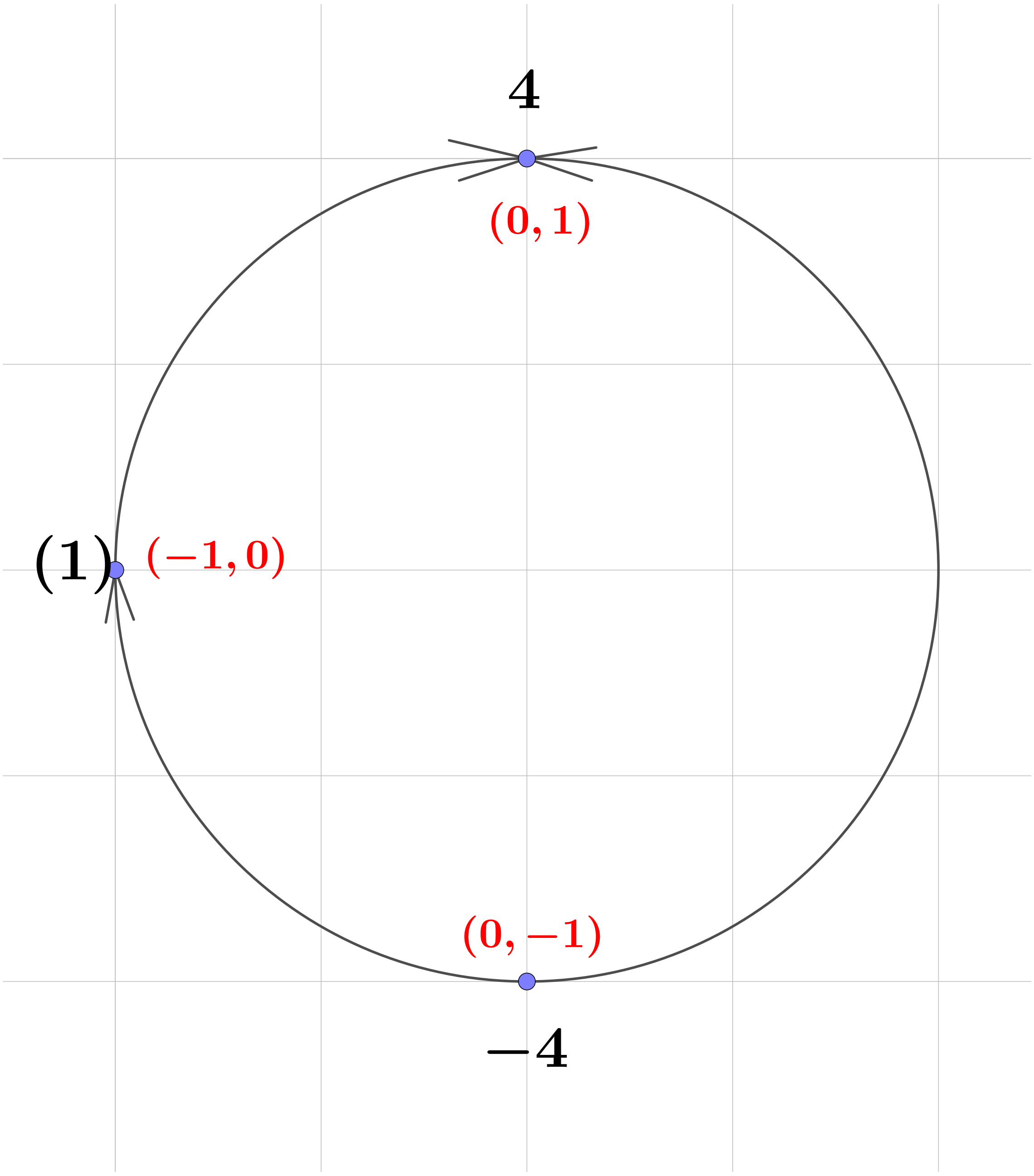
   - La frontière a pour paramétrisation $\begin{array}{ccc} [-\pi,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (\cos t, \sin t) \end{array}$
   - On pose $g : \begin{array}{ccc} [-\pi,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + 4 \sin t \end{array}$
     - On a $\forall t \in [-\pi,\pi], g'(t) = -2.\cos t.\sin t + 4\cos t = 2\cos t.\underbrace{(2 - \sin t)}_{>0}$

       On obtient le TV ci-dessous

t	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		$+\pi$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$	1	$\searrow$	-4	$\nearrow$	4	$\searrow$	1

       On peut résumer la situation sur un schéma (voir plus loin)
     - On trouve que g possède un minimum global (-4) et un maximum global (4) et ne présente pas d'autre extremum local.

   - **Conclusion**
     Comme on sait que f possède un maximum global et un minimum global sur D, et que sur $\overset{\circ}{D}$ ils ne s'y trouvent pas, on peut affirmer que
     - -4 **est le minimun global de f sur D, et qu'il est atteint en** $(0,-1)$
     - 4 **est le maximun global de f sur D, et qu'il est atteint en** $(0,1)$
     - **f ne possède pas d'autre extremum**


4
$(0,1)$
(1)
$(-1,0)$
$(0,-1)$
-4

résolution 10 • **D est un ensemble fermé borné et la fonction f est continue sur D, on sait par théorème que f est bornée sur D et atteint ses bornes.**

- **Plan d'étude**
  1. Etude sur le plus grand ouvert inclus dans D (et sur lequel f est C^1)
  2. Etude sur la frontière de D
  3. Conclusion

1. **Etude sur $\overset{\circ}{D}$**

   Comme $\overset{\circ}{D}$ est un ouvert, si f présente un extremum en a alors a est un point critique.
   Comme $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1$, il n'y a aucun point critique sur $\overset{\circ}{D}$, donc aucun extremum sur $\overset{\circ}{D}$

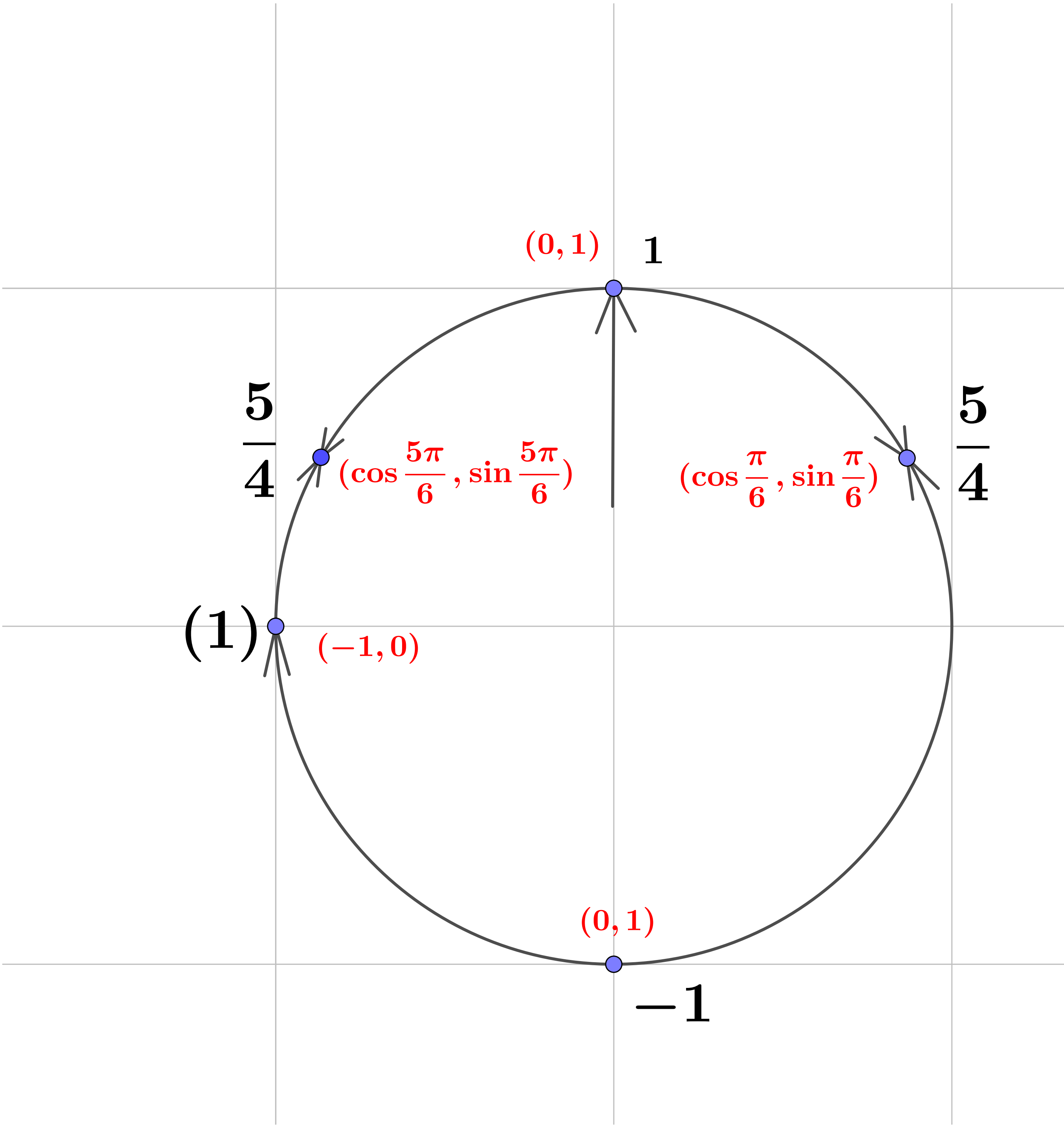
2. **Etude sur la frontière de D**

   - La frontière a pour paramétrisation $\begin{array}{rcl} [-\pi,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (\cos t, \sin t) \end{array}$
   - On pose $g : \begin{array}{rcl} [-\pi,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin t \end{array}$
     - On a $\forall t \in [-\pi,\pi], g'(t) = -2.\cos t.\sin t + \cos t = \cos t.(1 - 2\sin t)$
       On obtient le TV ci-dessous

t	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$	
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$

       On peut résumer la situation sur un schéma (voir plus loin)
     - On trouve que g possède un minimum global (-1) et un maximum global $(\dfrac{5}{4})$ et présente un minimum local en $\dfrac{\pi}{2}$
     - $\boxed{\textbf{Etude du point } (\cos\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\pi}{2}) = (0,1)}$
       - On a $\forall \theta \in]\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}[, f(\cos\theta, \sin\theta) > f(0,1)$
         ce qui s'écrit encore $\forall x \in]0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}[, f(x,\sqrt{1-x^2}) > f(0,1)$
         On remarque que $\forall y \in [0,1[, f(0,y) = 4y < 4 = f(0,1)$
         On en déduit qu'en $(0,1)$ f ne présente pas d'extremum.

- $\boxed{\textbf{Conclusion}}$
  Comme on sait que f possède un maximum global et un minimum global sur D, et que sur $\overset{\circ}{D}$ ils ne s'y trouvent pas, on peut affirmer que
  - -1 **est le minimun global de** f **sur** D**, et qu'il est atteint en** $(0,-1)$
  - $\frac{5}{4}$ **est le maximun global de** f **sur** D**, et qu'il est atteint en** $(\cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6}) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ **et** $(\cos\frac{5\pi}{6}, \sin\frac{5\pi}{6}) = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$
  - f **ne possède pas d'autre extremum**



résolution 11

$\boxed{\textbf{résolution 12}}$