Equations aux dérivées partielles:

exercice 1

Déterminer les fonctions $f \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ *qui vérifient*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy \qquad (E)$$

exercice 2

Déterminer les fonctions $f \in C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ *qui vérifient*

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2xy \qquad (E)$$

exercice 3

Déterminer les fonctions $f \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ *qui vérifient*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y.f(x,y) \qquad (E)$$

exercice 4

Déterminer les fonctions $f \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ *qui vérifient*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x^2+1)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x.f(x,y) = (x^2+1)^{3/2} \qquad (E)$$

exercice 5

Déterminer les fonctions $f \in C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ *qui vérifient*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0 \qquad (E)$$

exercice 6

Déterminer les fonctions $f \in C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ *qui vérifient*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + f(x,y) = 0 \qquad (E)$$

exercice 7

Déterminer les fonction $f \in C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ *qui vérifient*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - 3.\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2.f(x,y) = 2x - 3 + y \qquad (E)$$

exercice 8

Déterminer les fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui vérifient le système

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = 2x+y^2\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = 2xy+2y\end{cases}$$

exercice 9

Déterminer les fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui vérifient le système

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = 2x+y^2\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = 3xy+2y\end{cases}$$

exercice 10

Déterminer les fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ qui vérifient le système

$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ \begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) & = yz+y\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) & = xz+x\\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) & = xy+2z\end{cases}$$

exercice 11

Solutions

solution 1 • Nous allons procéder par analyse-synthèse.

- Partie Analyse.
  - On suppose que $f \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}^2$

    A $x \in \mathbb{R}$ fixé, on note $\boxed{\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & f(x,y) \end{array}}$

    On a alors $\forall y \in \mathbb{R}, g'(y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ et ainsi $\forall y \in \mathbb{R}, g'(y) = 2xy$
  - Par une simple quadrature (=primitivation), on trouve qu'il existe une constante, qui a priori dépend de x , que nous noterons $A(x) \in \mathbb{R}$ telle que

    $$\forall y \in \mathbb{R}, g(y) = xy^2 + A(x)$$
  - On a donc

    $$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = xy^2 + A(x) \quad \text{où } A(x) \text{ est une constante réelle}$$
  - **Montrons que $A : x \mapsto A(x)$ est de classe C^1**
    Pour $y = 0$, on remarque que $A : x \mapsto f(x,0)$
    et ceci prouve que $A \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ car $x \mapsto (x,0) \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$ et $f \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ par hypothèse.
  - **Conclusion: à l'issue de la partie synthèse, on a montré que**
    Si $f \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ est solution de (E) alors nécessairement $f : (x,y,z) \mapsto xy^2 + A(x)$ avec $A \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$
- Partie Synthèse

  Soit $\boxed{\begin{array}{rrcl} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & xy^2 + A(x) \end{array}}$ avec $A \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$

  Il est clair que $f \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ et vérifie (E)
- Conclusion

  La solution générale est $\boxed{\begin{array}{rrcl} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & xy^2 + A(x) \end{array}}$ avec $A \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$

solution 2 • Nous allons procéder par analyse-synthèse.

- Partie Analyse.
  - On suppose que $f \in C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}^3$

    A $(x,z) \in \mathbb{R}^2$ fixé, on note $\boxed{\begin{array}{rccl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & f(x,y,z) \end{array}}$

    On a alors $\forall y \in \mathbb{R}, g'(y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)$ et ainsi $\forall y \in \mathbb{R}, g'(y) = 2xy$
  - Par une simple quadrature (=primitivation), on trouve qu'il existe une constante, qui a priori dépend de x et z, que nous noterons $A(x,z) \in \mathbb{R}$ telle que

    $$\forall y \in \mathbb{R}, g(y) = xy^2 + A(x,z)$$
  - On a donc

    $$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = xy^2 + A(x,z) \quad \text{où } A(x,z) \text{ est une constante réelle}$$
  - **Montrons que** $A : (x,z) \mapsto A(x,z)$ **est de classe** C^1

    Pour $y = 0$, on remarque que $A : (x,z) \mapsto f(x,0,z)$

    et ceci prouve que $A \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ car $(x,z) \mapsto (x,0,z) \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)$ et $f \in C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ par hypothèse.
  - **Conclusion: à l'issue de la partie synthèse, on a montré que**

    Si $f \in C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ est solution de (E) alors nécessairement $f : (x,y,z) \mapsto xy^2 + A(x,z)$ avec $A \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$
- Partie Synthèse

  Soit $\boxed{\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & xy^2 + A(x,z) \end{array}}$ avec $A \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$

  Il est clair que $f \in C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ et vérifie (E)
- Conclusion

  La solution générale est $\boxed{\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & xy^2 + A(y,z) \end{array}}$ avec $A \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$

solution 3 • Nous allons procéder par analyse-synthèse.

- Partie Analyse.
  - On suppose que $f \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}^2$

    A $y \in \mathbb{R}$ fixé, on note $\boxed{\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x,y) \end{array}}$

    On a alors $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = y.g(x)$

    La fonction g vérifie ainsi l'équation différentielle linéaire du premier ordre

    $$\theta'(x) - y.\theta(x) = 0$$

  - La solution générale de cette équation différentielle est $\boxed{\begin{array}{rcl} \theta : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & A.e^{xy} \end{array}}$ avec $A \in \mathbb{R}$
  - On a en déduit donc qu'il existe une constante $A(y) \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = A(y).e^{xy}$

    On a donc

    $$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = A(y).e^{xy}}$$

  - **Montrons que $A : y \mapsto A(y)$ est de classe C^1**

    Pour $x = 0$, on remarque que $A : y \mapsto f(0,y)$

    et ceci prouve que $A \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ car $y \mapsto (0,y) \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$ et $f \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ par hypothèse.

  - **Conclusion: à l'issue de la partie synthèse, on a montré que**

    Si $f \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ est solution de (E) alors nécessairement $f : (x,y) \mapsto A(y).e^{xy}$ avec $A \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$

- Partie Synthèse

  Soit $\boxed{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & A(y).e^{xy} \end{array}}$ avec $A \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$

  Il est clair que $f \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ et vérifie (E)

- Conclusion

  La solution générale est $\boxed{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & A(y).e^{xy} \end{array}}$ avec $A \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$

solution 4 • Nous allons procéder par analyse-synthèse

- Partie Analyse

  – On suppose que $f \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}^2$

  A $y \in \mathbb{R}$ fixé, on note $\boxed{\begin{array}{rcl} g:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x,y) \end{array}}$

  On a alors $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2+1)g'(x) - x.g(x) = (x^2+1)^{3/2}$

  – On a vu que la solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

  $$(x^2+1)\theta'(x) - x.\theta(x) = (x^2+1)^{3/2}$$

  est

  $$\boxed{\begin{array}{rcl} \theta:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x.\sqrt{1+x^2} + A.(x^2+1)^{3/2} \end{array} \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}}$$

  – On en déduit donc ici qu'il existe une constante $A(y) \in \mathbb{R}$ telle que

  $$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = x.\sqrt{1+x^2} + A(y).(x^2+1)^{3/2}$$

  – On a donc

  $$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = x.\sqrt{1+x^2} + A(y).(x^2+1)^{3/2} \text{ où } A(y) \text{ est une constante réelle.}}$$

  – **Montrons que $A : y \mapsto A(y)$ est de classe C^1**
  Pour $x = 0$, on remarque que $A : y \mapsto f(0,y)$
  et ceci prouve que $A \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ car $y \mapsto (0,y) \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $f \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ par hypothèse.

  – **Conclusion: à l'issue de la partie Synthèse, on a montré que**
  si $f \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ vérifie (E) alors nécessairement $f : (x,y) \mapsto x.\sqrt{1+x^2} + A(y).(x^2+1)^{3/2}$ avec $A \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$

- Partie Synthèse

  Soit $\boxed{\begin{array}{rcl} f: \ \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x.\sqrt{1+x^2} + A(y).(x^2+1)^{3/2} \end{array}}$ avec $A \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$
  Il est clair que $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et vérifie (E)

- Conclusion

  La solution générale est $\boxed{\begin{array}{rcl} f: \ \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x.\sqrt{1+x^2} + A(y).(x^2+1)^{3/2} \end{array}}$ avec $A \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$

solution 5 • On va faire un raisonnement simplifié.

- Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.

  Pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, on note $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$

  On a alors pour tout x réel

$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \qquad \text{et} \qquad g''(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$$

  On en déduit les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0 &\iff \forall x \in \mathbb{R}, g''(x) = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = A(y) \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = A(y).x + B(y) \end{aligned}$$

  Conclusion: la solution générale est $\boxed{f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & A(y)x + B(y) \end{array}}$ avec $(A,B) \in [C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})]^2$

solution 6 • On va faire un raisonnement simplifié.

- Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.

  Pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, on note $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$

  On a alors pour tout x réel

$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \qquad \text{et} \qquad g''(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$$

  et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + f(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, g''(x) + g(x) = 0$$

  La solution générale de l'équation différentielle $\theta''(x) + \theta(x) = 0$
  est $\theta : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & A.\cos x + B.\sin x \end{array}$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$

  On en déduit ainsi qu'il existe deux constantes réelles $A(y)$ et $B(y)$
  telles que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = A(y).\cos x + B(y).\sin x$.

  Conclusion:
  la solution générale est $\boxed{f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & A(y).\cos x + B(y).\sin x \end{array}}$ avec $(A,B) \in [C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})]^2$

solution 7 • Nous allons procéder par analyse-synthèse

- Partie Analyse

  – On suppose que $f \in C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}^2$.

  A $y \in \mathbb{R}$ fixé, on note $\boxed{\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x,y) \end{array}}$

  On a alors $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $g''(x) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$
  Ainsi on a

  $$\forall x \in \mathbb{R}, g''(x) - 3.g'(x) + 2.g(x) = 2x - 3 + y$$

  La fonction g vérifie donc une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.

  $$\theta''(x) - 3\theta'(x) + 2\theta(x) = 2x - 3 + y$$

  – Avec la méthode standard, on résout l'équation ci-dessus e
    – la solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène est $\theta : x \mapsto A.e^x + B.e^{2x}$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$
    – une solution particulière de l'équation complète est $\theta_0 : x \mapsto x + y/2$
    – par théorème, la solution générale de l'équation complète est la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière,
    càd ici $\boxed{\begin{array}{rcl} \theta : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & A.e^x + B.e^{2x} + x + y/2 \end{array} \quad \text{avec } (A,B) \in \mathbb{R}^2}$

  – On en déduit donc qu'il existe deux constantes $A(y) \in \mathbb{R}$ et $B(y) \in \mathbb{R}$ telles que

  $$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = A(y).e^x + B(y).e^{2x} + x + y/2$$

  – On a donc

  $$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = A(y).e^x + B(y).e^{2x} + x + y/2 \quad \text{où } A(y) \text{ et } B(y) \text{ sont deux constantes réelles}}$$

  – **Montons que $A : y \mapsto A(y)$ et $B : y \mapsto B(y)$ sont de classe C^2.**
  On remarque que $\forall y \in \mathbb{R}, \begin{cases} f(0,y) & = A(y) + B(y) + y/2 \\ f(1,y) & = e.A(y) + e^2.B(y) + 1 + y/2 \end{cases}$
  On en déduit que

  $$A : y \mapsto \frac{1}{e - e^2}\big(f(1,y) - e^2.f(0,y) - 1 - y.(1 - e^2)/2\big)$$

  Cette expression prouve que $A \in C^2(\mathbb{R}{\cdot}\mathbb{R})$ car $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$
  On montre de même que $B \in C^2(\mathbb{R}{\cdot}\mathbb{R})$

  – **Conclusion: à l'issue de la partie synthèse, on a montré que**
  Si $f \in C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ vérifie (E) alors nécessairement

  $$f : (x,y) \mapsto A(y).e^x + B(y).e^{2x} + x + y/2 \text{ avec } (A,B) \in \big[C^2(\mathbb{R}{\cdot}\mathbb{R})\big]^2$$

- $\boxed{\text{Partie Synthèse}}$

  Soit $\boxed{\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & A(y).e^x + B(y).e^{2x} + x + y/2 \end{array}}$ avec $(A,B) \in \left[C^2(\mathbb{R}{,}\mathbb{R})\right]^2$

  Il est clair que $f \in C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ et vérifie (E)

- $\boxed{\text{Conclusion}}$

  La solution générale est $\boxed{\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & A(y).e^x + B(y).e^{2x} + x + y/2 \end{array}}$ avec $(A,B) \in \left[C^2(\mathbb{R}{,}\mathbb{R})\right]^2$

solution 8 • La méthode consiste à résoudre la première équation puis à remplacer dans la deuxième

- On a déjà l'équivalence

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x+y^2\iff\exists K\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,f(x,y)=x^2+xy^2+K(y)$$

- En reportant dans le système cela donne

$$\begin{aligned}
&\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x+y^2\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2xy+2y\end{cases}\\
\iff&\exists K\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\begin{cases}f(x,y) &= x^2+xy^2+K(y)\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2xy+2y\end{cases}\\
\iff&\exists K\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\begin{cases}f(x,y) &= x^2+xy^2+K(y)\\ 2xy+K'(y) &= 2xy+2y\end{cases}\\
\iff&\exists K\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\begin{cases}f(x,y) &= x^2+xy^2+K(y)\\ K'(y) &= 2y\end{cases}\\
\iff&\exists K\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),\exists A\in\mathbb{R},\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\begin{cases}f(x,y) &= x^2+xy^2+K(y)\\ K(y) &= y+A\end{cases}
\end{aligned}$$

- Conclusion: les fonctions cherchées sont

$$\boxed{\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & (x,y) & \longmapsto & x^2+xy^2+y^2+A\end{array}}\qquad \text{avec } A\in\mathbb{R}$$

solution 9 • La méthode consiste à résoudre la première équation puis à remplacer dans la deuxième

- On a déjà l'équivalence

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x+y^2 \iff \exists K\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}), \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y)=x^2+xy^2+K(y)$$

- En reportant dans le système cela donne

$$\begin{aligned}
&\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, \begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x+y^2\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 3xy+2y\end{cases}\\
\iff&\exists K\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}), \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, \begin{cases}f(x,y) &= x^2+xy^2+K(y)\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 3xy+2y\end{cases}\\
\iff&\exists K\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}), \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, \begin{cases}f(x,y) &= x^2+xy^2+K(y)\\ 2xy+K'(y) &= 3xy+2y\end{cases}\\
\iff&\exists K\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}), \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, \begin{cases}f(x,y) &= x^2+xy^2+K(y)\\ K'(y) &= xy+2y\end{cases}
\end{aligned}$$

Or il n'existe pas de fonctions K vérifiant $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, K'(y)=xy+2y$!
(En effet, on devrait avoir $K'(1)=1.1+2.1=3$ mais aussi $K'(1)=3.1+2.1=5$)

- Conclusion: il n'existe pas de fonction vérifiant le système proposé

solution 10 • La méthode consiste à résoudre la première équation puis à remplacer dans la deuxième et la résoudre, puis ...

- On a déjà l'équivalence
$$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=yz+y \iff \exists K\in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}),\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y,z)=xyz+xy+K(y,z)$$
- En reportant dans le système cela donne
$$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ \begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) & =yz+y\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) & =xz+x\\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) & =xy+2z\end{cases}$$
$$\iff \exists K\in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}),\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases}f(x,y,z) & =xyz+xy+K(y,z)\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) & =xz+x\\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) & =xy+2z\end{cases}$$
$$\iff \exists K\in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}),\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases}f(x,y,z) & =xyz+xy+K(y,z)\\ xz+x+\dfrac{\partial K}{\partial y}(y,z) & =xz+x\\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) & =xy+2z\end{cases}$$
$$\iff \exists K\in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}),\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases}f(x,y,z) & =xyz+xy+K(y,z)\\ \dfrac{\partial K}{\partial y}(y,z) & =0\\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) & =xy+2z\end{cases}$$
$$\iff \exists K\in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}),\exists L\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases}f(x,y,z) & =xyz+xy+K(y,z)\\ K(y,z) & =L(z)\\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) & =xy+2z\end{cases}$$
$$\iff \exists K\in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}),\exists L\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases}f(x,y,z) & =xyz+xy+K(y,z)\\ K(y,z) & =L(z)\\ xy+L'(z) & =xy+2z\end{cases}$$
$$\iff \exists K\in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}),\exists L\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases}f(x,y,z) & =xyz+xy+K(y,z)\\ K(y,z) & =L(z)\\ L'(z) & =2z\end{cases}$$
$$\iff \exists K\in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}),\exists L\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),\exists A\in\mathbb{R},\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases}f(x,y,z) & =xyz+xy+K(y,z)\\ K(y,z) & =L(z)\\ L(z) & =z^2+A\end{cases}$$

- Conclusion: les fonctions cherchées sont
$$\boxed{\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & (x,y,z) & \longmapsto & xyz+xy+z^2+A\end{array}}\qquad \text{avec } A\in\mathbb{R}$$

solution 11