Table des matières

Réduction des coniques

exercice 1 (*)

Réduire la conique d'équation

$$4x^2 + 2x + y + 1 = 0$$

et donner ses éléments

exercice 2 (*)

Réduire la conique d'équation

$$x^2 + 2y^2 + 6x - 4y = 0$$

exercice 3 (**)

Réduire la conique d'équation

$$3\,x^2 + 2\,\sqrt{3}xy - 8\,\sqrt{3}x + y^2 - 8\,y - 8 - 4\,x + 4\,\sqrt{3}y = 0$$

exercice 4 (**)

Réduire la conique d'équation

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$$

exercice 5 (**)

Réduire la conique d'équation

$$3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 + 4\sqrt{3}x + 4y + 4 = 0$$

exercice 6 (**)

Réduire la conique d'équation

$$x^2 - 10\sqrt{3}xy + 11y^2 - 10\sqrt{3}x + 22y + 27 = 0$$

exercice 7 (*)

Réduire la conique d'équation

$$x(x-1) + (y-2)(y-3) = 0$$

et donner ses éléments

exercice 8

Solutions

résolution 1

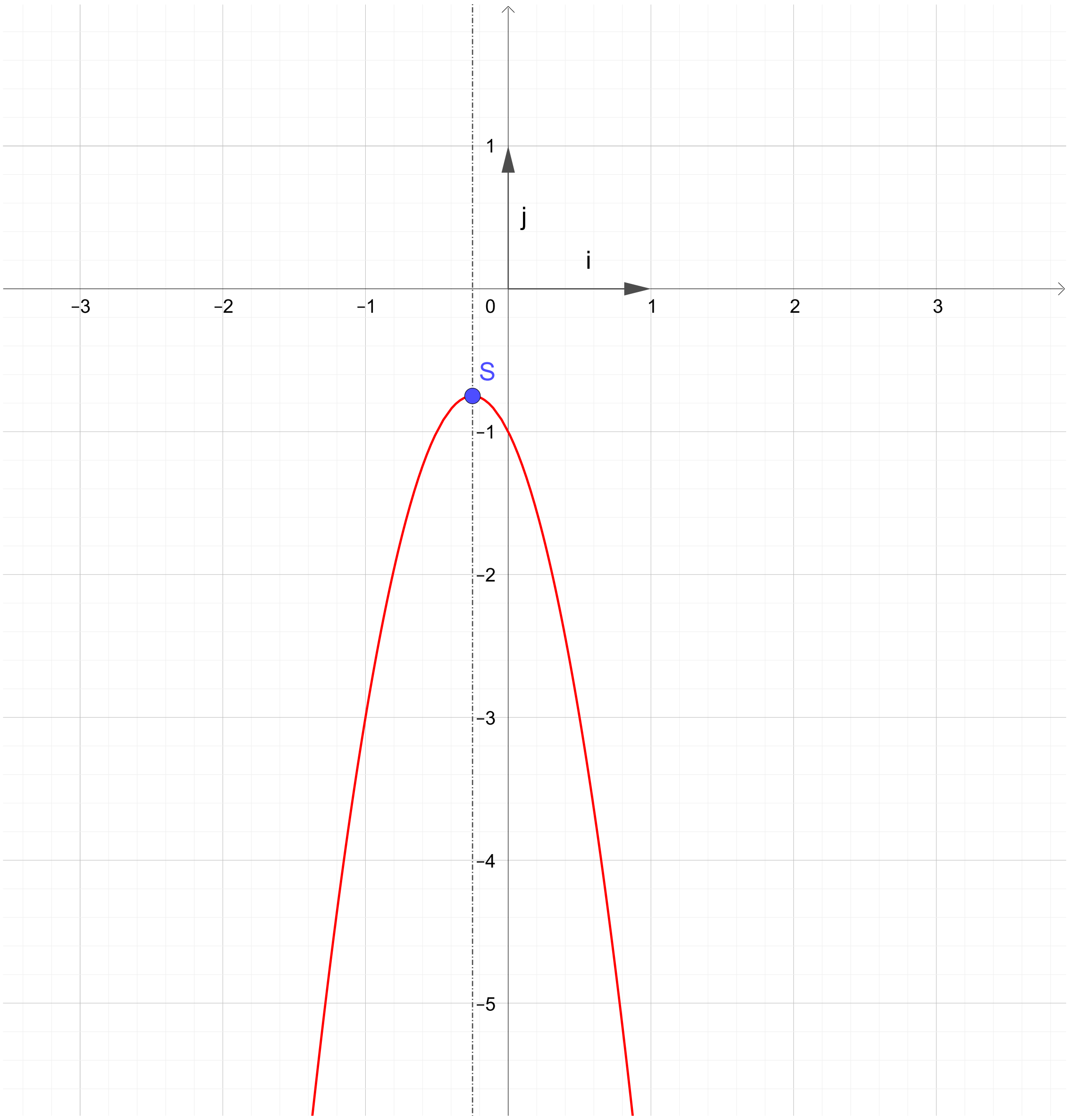
Il n'y a pas de terme croisé xy: il suffit de mettre sous forme canonique les trinÃ´mes!
remarque: ici on a de suite y qui est une fonction du second degré de x, donc c'est une parabole!

On a

$$\begin{aligned} 4x^2+2x+y+1=0 &\Longleftrightarrow y=-4x^2-2x-1 \\ &\Longleftrightarrow y=-4(x^2+\frac{x}{2})-1 \\ &\Longleftrightarrow y=-4\left[(x+\frac{1}{4})^2-\frac{1}{4^2}\right]-1 \\ &\Longleftrightarrow y=-4\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Sous cette forme, on reconnait l'équation d'une parabole

- de sommet $(-\frac{1}{4},-\frac{3}{4})$
- d'axe de symétrie la droite d'équation $x=-\frac{1}{4}$



1
j
i
-3
-2
-1
0
1
2
3
S
-1
-2
-3
-4
-5

résolution 2 Il n'y a pas de terme croisé xy: il suffit de mettre sous forme canonique les trinÃ´mes!

- On a

$$x^2 + 6x = (x+3)^2 - 9 \qquad \text{et} \qquad 2y^2 - 4y = 2(y^2 - 2y) = 2\left[(y-1)^2 - 1\right]$$

D'où

$$x^2 + 2y^2 + 6x - 4y = (x+3)^2 - 2(y-1)^2 - 11$$

L'équation de la conique s'écrit ainsi

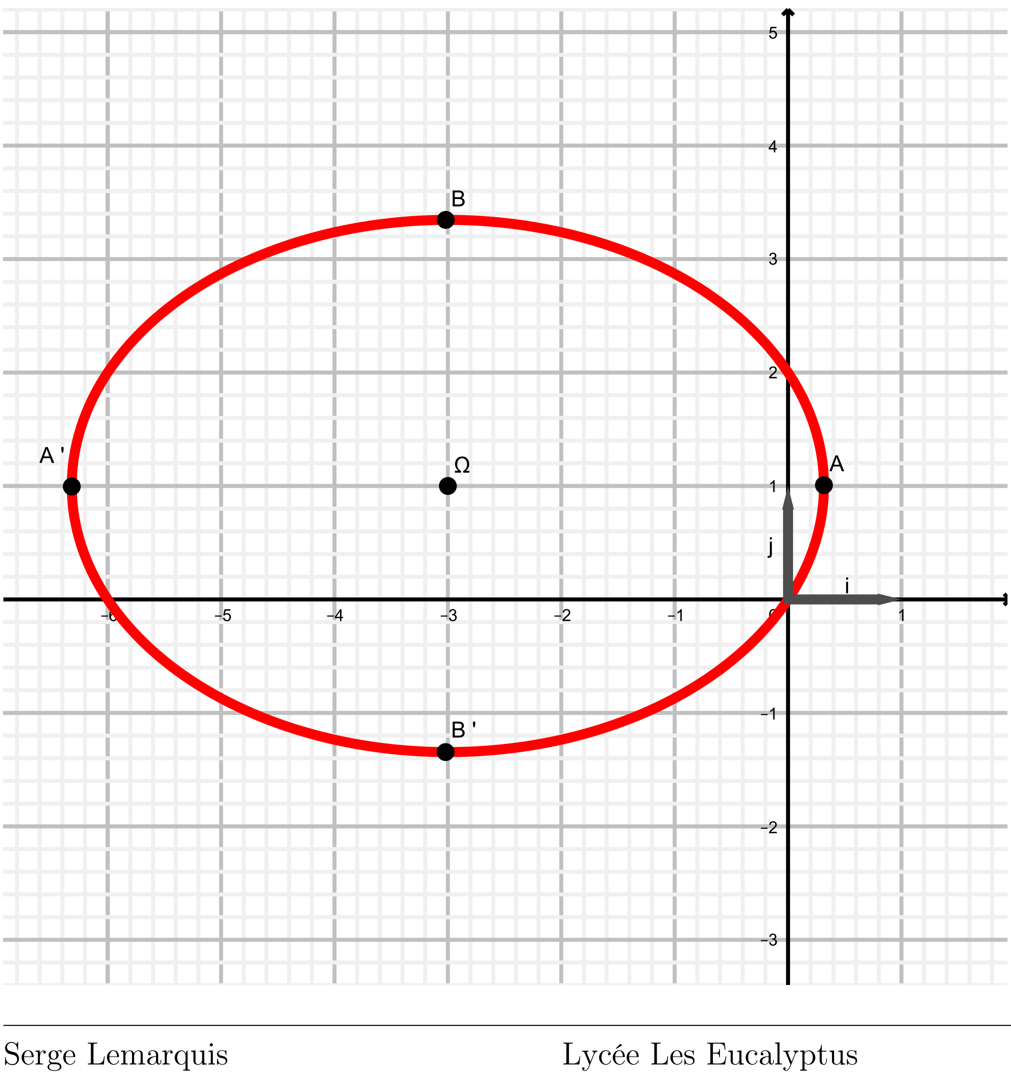
$$(x+3)^2 - 2(y-1)^2 = 11$$

c'est à dire

$$\frac{(x+3)^2}{(\sqrt{11})^2} - \frac{(y-1)^2}{\left(\sqrt{\frac{11}{2}}\right)^2} = 1$$

Sous cette forme, on reconnait l'équation d'une ellipse
  - de centre $\Omega(-3{,}1)$
  - de demi-grand axe $a = \sqrt{11}$
  - de demi-petit axe $b = \sqrt{\frac{11}{2}}$
  - les sommets sont les points

$$A(-3+\sqrt{11}{,}1) \qquad A'(-3-\sqrt{11}{,}1) \qquad B(-3+\sqrt{\frac{11}{2}}) \qquad B'(-3-\sqrt{\frac{11}{2}})$$



$\boxed{\textbf{résolution 3}}$ On suit la méthode standard:

- L'équation de la conique dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ est

$$3\,x^2+2\,\sqrt{3}xy-8\,\sqrt{3}x+y^2-8\,y-8-4\,x+4\,\sqrt{3}y=0$$

- On pose $\boxed{A=\begin{pmatrix}3 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}}$ et $\boxed{L=\begin{pmatrix}-8\sqrt{3}-4 & -8+4\sqrt{3}\end{pmatrix}}$ et $U=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$.
  Ainsi l'équation s'écrit $U^TAU+LU-8=0$
- *remarque (qui n'est pas nécessaire du tout): comme* $\det(A)=0$ *la conique est du genre parabole. Ceci signifie que si la conique n'est pas dégénérée alors c'est une parabole.*
- On a $A=PDP^{-1}$ avec $D=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ et $P=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\in O_2(\mathbb{R})$
  Notons $V=\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}$.
- Notons $\vec{I}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{i}-\sqrt{3}\,\overrightarrow{j})$ et $\vec{J}=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}\,\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j})$.
  Notons (X,Y) les coordonées dans le repère $\mathcal{R}(O,\overrightarrow{I},\overrightarrow{J})$.
  La formule de changement de base donne $U=PV$
- $U^TAU=0.X^2+4.Y^2$ et $LU=LPV=\begin{pmatrix}-8 & -16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=-8X-16Y$
  L'équation dans le nouveau repère est donc

$$4Y^2-8X-16Y-8=0$$

  L'équation dans le nouveau repère est donc

$$4Y^2-8X-16Y-8=0$$

  soit

$$X=\frac{1}{2}Y^2-2Y-1$$

- **X est une fonction du second degré de Y, il s'agit donc d'une parabole.**

Quelques précisions:

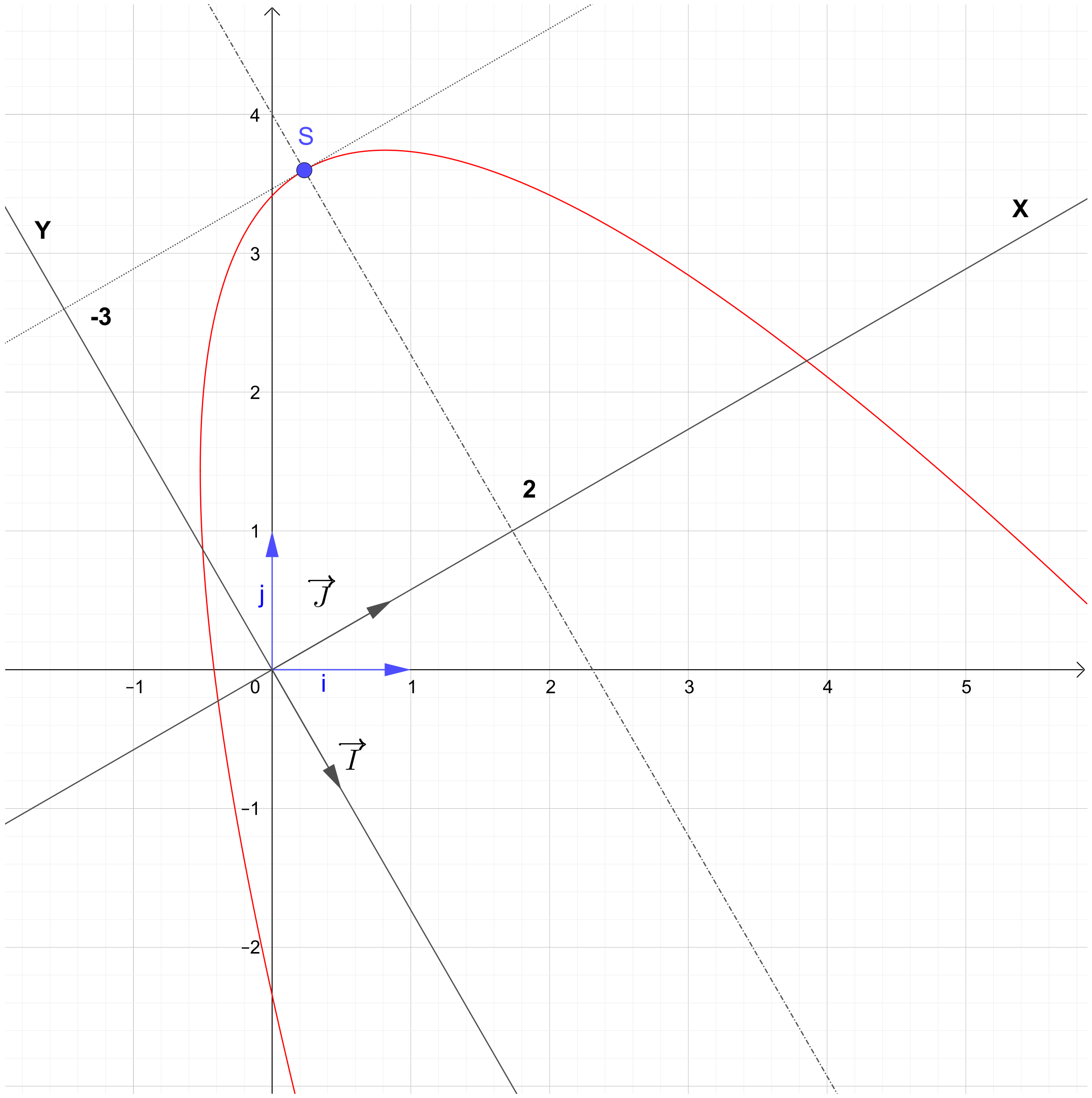
- l'équation s'écrit aussi

$$Y^2-4Y-2X-2=0$$

  ou encore

$$\boxed{(Y-2)^2=2(X+3)}$$

- Dans le nouveau repère, le sommet de la parabole a pour coordonnées $(-3,2)$.
  Dans le repère initial les coordonées sont alors $P.\begin{pmatrix}-3\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}-\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}+1\end{pmatrix}$
- L'axe de symétrie a pour équation dans le nouveau repère $Y-2=0$
  Or $\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=P^{-1}U=P^T\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$. On a donc $Y=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}x+y)$
  L'équation de l'axe de symétrie dans le repère initial est donc $\boxed{\sqrt{3}x+y-4=0}$

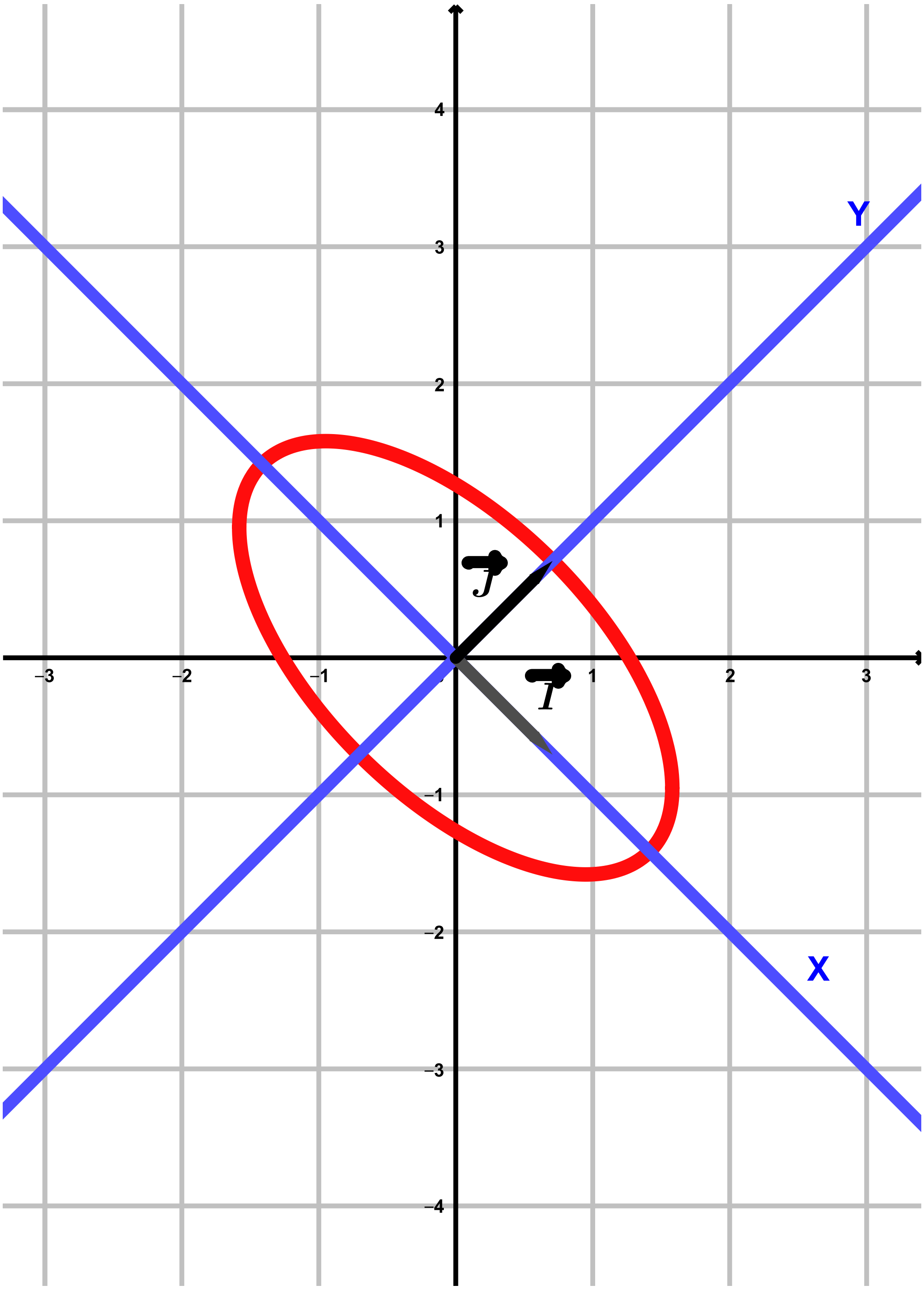

S
Y
X
-3
2
j
i
$\overrightarrow{J}$
$\overrightarrow{I}$
-1
0
1
2
3
4
5
-2

$\boxed{\textbf{résolution 4}}$ On suit la méthode standard:

- L'équation de la conique dans $(O,\vec{i},\vec{j})$ est
$$5x^2+6xy+5y^2-8=0$$
- On pose $A=\begin{pmatrix}5&3\\3&5\end{pmatrix}$ et $U=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$
Ainsi l'équation s'écrit
$$U^TAU-8=0$$
- *remarque: comme* $\det(A)=16>0$ *la conique est du genre ellipse.*
Ceci signifie que si la conique n'est pas dégénérée alors c'est une ellipse.
- La recherche des valeurs propres de A donnent $\lambda_1=2$ et $\lambda_2=8$
- *Comme il n'y a pas de partie linéaire, pour simplement déterminer la nature, il n'y aurait pas besoin de déterminer les sep. En revanche, si l'on souhaite réaliser le dessin, on doit forcément les déterminer.*
- Les calculs donnent $A=PDP^{-1}$ avec $D=\begin{pmatrix}2&0\\0&8\end{pmatrix}$ et $P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\in O_2(\mathbb{R})$
- Notons $\overrightarrow{I}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j})$ et $\overrightarrow{J}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j})$
Notons (X,Y) les coordonées dans le repère $(O,\overrightarrow{I},\overrightarrow{J})$.
- On sait que l'on a $U^TAU=2.X^2+8.Y^2$
L'équation dans le nouveau repère est donc
$$2X^2+8Y^2-8=0$$
c'est à dire
$$\frac{X^2}{2^2}+\frac{Y^2}{1^2}=1$$
On reconnait l'équation réduite d'une ellipse.

Quelques précisions
  - Dans le nouveau repère:
    - le demi-petit axe vaut 1 et le demi-grand axe vaut 2
    - le centre de symétrie est le point $O(0,0)$
    - les axes de symétries sont les droites d'équation $X=0$ et $Y=0$
    - les sommets sont les points
$$A(X=0,Y=1)\qquad A'(X=0,Y=-1)\qquad B(X=2,Y=0)\qquad B'(X=-2,Y=0)$$
  - Comme $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{X+Y}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{-X+Y}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, les coordonnées des sommets dans $(O,\vec{i},\vec{j})$ sont
$$A(-\sqrt{2},\sqrt{2})\qquad A'(-\sqrt{2},-\sqrt{2})\qquad B(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})\qquad B'(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$$

– Comme $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix}$
les axes de symétries dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ ont pour équation $x + y = 0$ et $x - y = 0$



$\boxed{\textbf{résolution 5}}$ On suit la méthode standard:

- L'équation de la conique dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ est

$$3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 + 4\sqrt{3}x + 4y + 4 = 0$$

- On pose $\boxed{A = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{L = \begin{pmatrix} 4\sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}}$ et $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
  Ainsi l'équation s'écrit $U^T AU + LU + 4 = 0$
- *remarque: comme* $\det(A) = 0$ *la conique est du genre parabole.*
  Ceci signifie que si la conique n'est pas dégénérée alors c'est une parabole.
- On a $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$
  Notons $V = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$.
- Notons $\vec{I} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3}\,\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$ et $\vec{J} = \dfrac{1}{2}(-\overrightarrow{i} + \sqrt{3}\,\overrightarrow{j})$.
  Notons (X,Y) les coordonnées dans le repère $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$.
  La formule de changement de base donne $U = PV$
- on sait que $U^T AU = 4.X^2 + 0.Y^2$ et $LU = LPV = \begin{pmatrix} 8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 8X$
  L'équation dans le nouveau repère est donc

$$4X^2 + 8X + 4 = 0$$

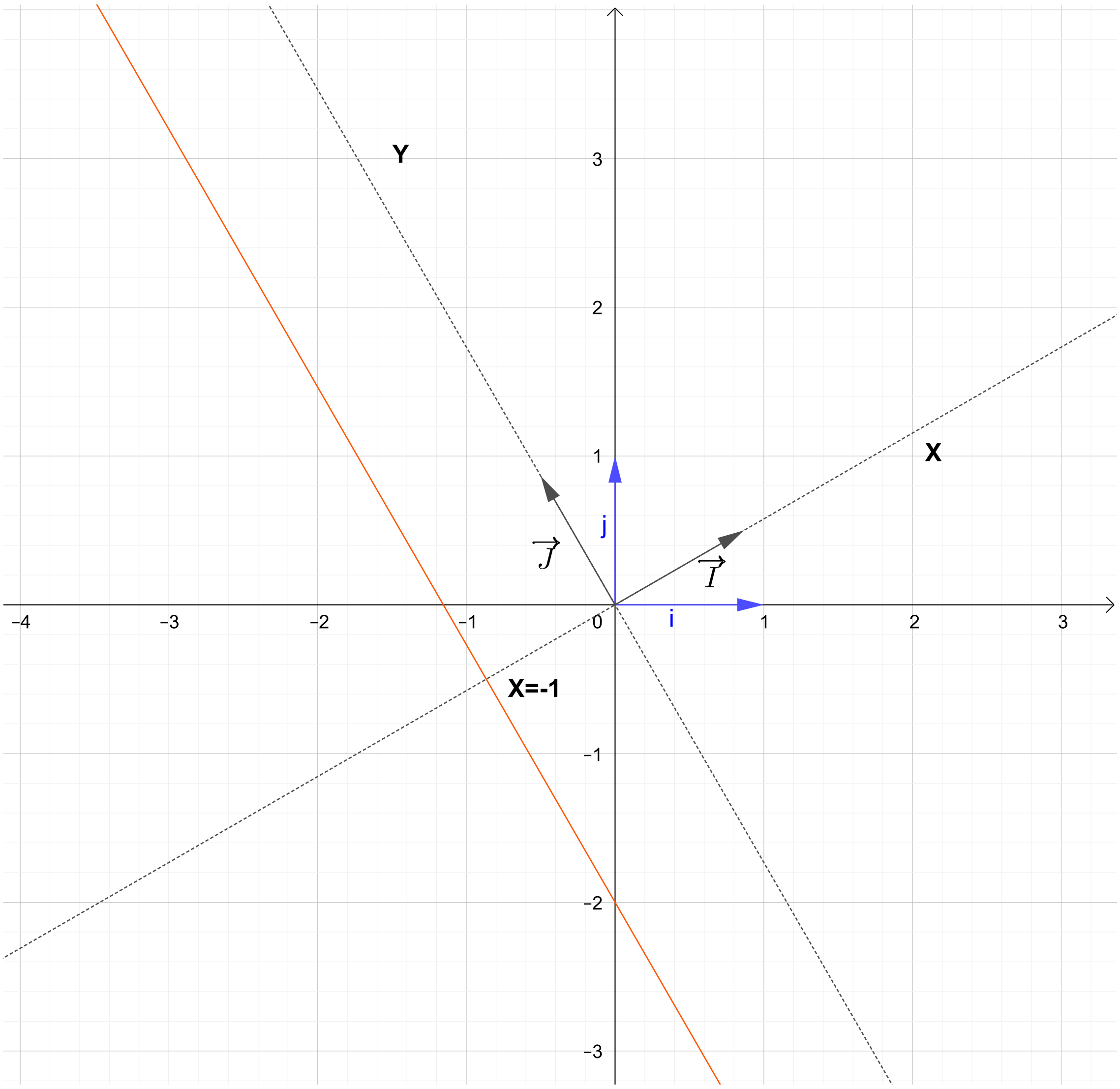
  soit

$$X^2 + 2X + 1 = (X + 1)^2 = 0$$

  ou encore

$$\boxed{X = -1}$$

  On reconnait **l'équation d'une droite.**
- Comme $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3}x + y \\ x - \sqrt{3}y \end{pmatrix}$
  l'équation de cette droite dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ est $\sqrt{3}x + y + 2 = 0$


Y
X
X=-1
j
i
$\overrightarrow{J}$
$\overrightarrow{I}$
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
-1
-2
-3

$\boxed{\textbf{résolution 6}}$ On suit la méthode standard:

- L'équation de la conique dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ est

$$x^2 - 10\sqrt{3}xy + 11y^2 - 10\sqrt{3}x + 22y + 27 = 0$$

- On pose $\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & 11 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{L = \begin{pmatrix} -10\sqrt{3} & 22 \end{pmatrix}}$ et $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
  Ainsi l'équation s'écrit $U^T AU + LU + 27 = 0$
- *remarque: comme* $\det(A) = -64 <$ *la conique est du genre hyperbole.*
  Ceci signifie que si la conique n'est pas dégénérée alors c'est une hyperbole.
- On a $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ et $P = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$
  Notons $V = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$.
- Notons $\vec{I} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{i} - \sqrt{3}\overrightarrow{j})$ et $\vec{J} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3}\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$.
  Notons (X,Y) les coordonnées dans le repère $(O,\overrightarrow{I},\overrightarrow{J})$.
  La formule de changement de base donne $U = PV$
- On sait que $U^T AU = 16.X^2 - 4.Y^2$ et $LU = LPV = \begin{pmatrix} -16\sqrt{3} & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = -16\sqrt{3}X - 4Y$
  L'équation dans le nouveau repère est donc

$$16X^2 - 4Y^2 - 16\sqrt{3}X - 4Y + 27 = 0$$

  en mettant sous forme canonique, cela donne

$$16\left(X - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 4\left(Y + \frac{1}{2}\right)^2 + 16 = 0$$

  soit encore

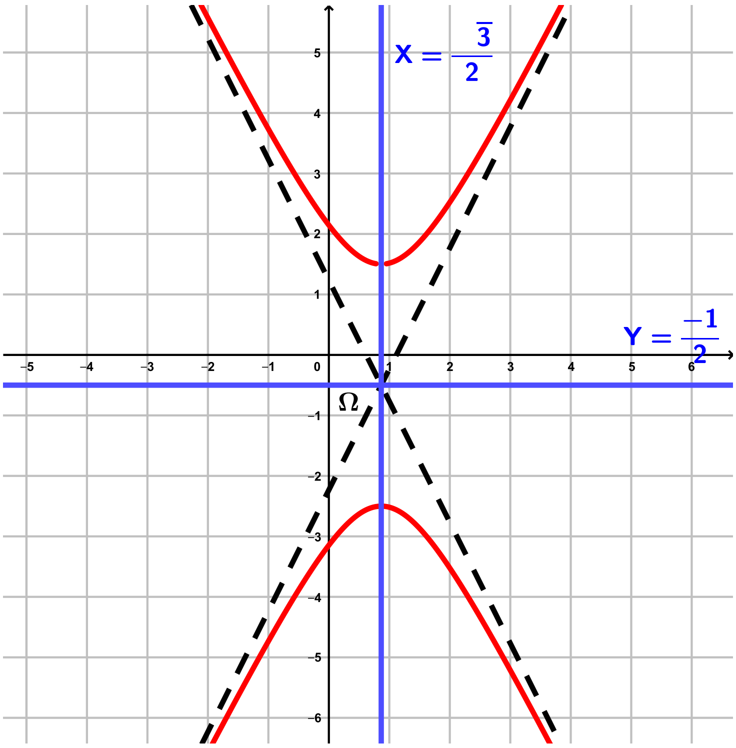
$$\frac{\left(Y + \frac{1}{2}\right)^2}{2^2} - \frac{\left(X - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{1^2} = 1$$

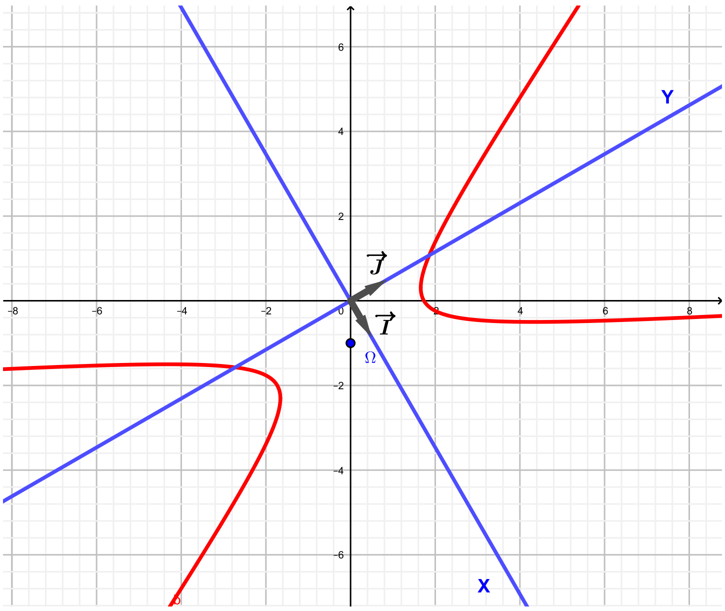
- **On reconnait l'équation d'une hyperbole.**

Quelques précisions

- Dans le repère $(O,\vec{I},\vec{J})$,
  - le centre de symétrie est le point $\Omega(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$
  - les axes de symétrie ont pour équation $X = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $Y = \dfrac{-1}{2}$
  - les droites asymptotes sont données par

$$Y + \frac{1}{2} = \pm.2.\left(X - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$


X = 3/2
Y = −1/2
Ω


Y
X
Ω

résolution 7

résolution 8