convergence et calcul d'intégrales généralisées convergentes

exercice 1 (*)

A l'aide la la définition, montrer que $\int_1^{\infty} \dfrac{dt}{t^2+4t}$ *converge et donner sa valeur*

exercice 2 (*)

A l'aide la la définition, montrer que $\int_0^{\infty} \dfrac{dt}{t^2+2\sqrt{2}t+4}$ *converge et donner sa valeur*

exercice 3 (*)

A l'aide la la définition, montrer que $\int_0^{\infty} \dfrac{t^3dt}{1+t^8}$ *converge et donner sa valeur. (on pourra poser* $u=t^4$*)*

exercice 4 (*)

A l'aide la la définition, montrer que $\int_{-\infty}^{0} \dfrac{dt}{t^2-6t+9}$ *converge et donner sa valeur*

exercice 5 (***)

A l'aide de la définition, montrer que $\int_0^{\infty} \dfrac{t+3}{(t^2+4)(t+1)^2}dt$ *converge et donner sa valeur*
(on pourra chercher une décomposition de la forme $\dfrac{At+B}{t^2+4}+\dfrac{C}{t+1}+\dfrac{D}{(t+1)^2}$*)*

exercice 6 (***)

A l'aide de la définition, montrer que $\int_0^{\infty} e^{-t}\ln(1+e^t)dt$ *converge et donner sa valeur.*
(on pourra poser $\theta=e^t$*)*

exercice 7 (***)

Soit $0<a<\pi$.
Montrer que $I=\int_0^{\infty} \dfrac{dt}{t^2-2\cos(a).t+1}$ *converge et vaut* $\dfrac{\pi-a}{\sin a}$

exercice 8

exercice 9

Solutions

résolution 1 • La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^2+4t} = \dfrac{1}{t(t+4)}$ est définie et continue sur l'intervalle $[1,+\infty[$,

– elle possède donc des primitives sur cet intervalle

– l'intégrale $\int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t(t+4)}$ est généralisée uniquement en sa borne supérieure

• Pour $x \geqslant 1$, on note $F(x) = \int_1^x f(t)dt = \int_1^x \dfrac{dt}{t(t+4)}$

• Une décomposition en éléments simples donne

$$\frac{1}{X(X+4)} = \frac{1}{4}.\frac{1}{X} - \frac{1}{4}.\frac{1}{(X+4)}$$

d'où

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_1^x \frac{dt}{t(t+4)} \\
&= \int_1^x \frac{1}{4}(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+4})dt \\
&= \frac{1}{4}\int_1^x \frac{1}{t} - \frac{1}{t+4}dt \\
&= \frac{1}{4}\left[\ln|t| - \ln|t+4|\right]_1^x \\
&= \frac{1}{4}(\ln(x) - \ln(x+4) + \ln 5) \\
&= \frac{1}{4}(\ln(x) - (\ln(x) + \ln(1+\frac{4}{x})) + \ln 5) \\
&= \frac{1}{4}(-\ln(1+\frac{4}{x}) + \ln 5)
\end{aligned}$$

Sous cette forme, il est clair que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \dfrac{\ln 5}{4}$

On peut affirmer que

$$\boxed{\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2+4t} \text{ converge et vaut } \frac{\ln 5}{4}}$$

résolution 2 • La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^2 + 2\sqrt{2}t + 4}$ est définie et continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$,

– elle possède donc des primitives sur cet intervalle

– L'intégrale $\int_0^\infty \dfrac{dt}{t^2 + 2\sqrt{2}t + 4}$ est généralisée en sa borne supérieure uniquement

- Pour $x \geqslant 0$, on note $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$

  On a alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \frac{dt}{t^2 + 2\sqrt{2}t + 4} \\ &= \int_0^x \frac{dt}{(t+\sqrt{2})^2 + 2} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dt}{\left(\dfrac{t+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} \end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $u = \dfrac{t+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ (on a donc $du = \dfrac{dt}{\sqrt{2}}$).

Ainsi

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^{(x+\sqrt{2})/\sqrt{2}} \frac{du}{u^2+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arctan u\right]_1^{(x+\sqrt{2})/\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan\frac{x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \arctan 1\right) \end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

On peut affirmer que

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{dt}{t^2 + 2\sqrt{2}t + 4} \text{ converge et vaut } \frac{\pi}{4\sqrt{2}}}$$

résolution 3 • La fonction $t : t \mapsto \dfrac{t^3}{1+t^8}$ est définie et continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$:

– elle possède donc des primitives sur cet intervalle

– l'intégrale $\int_0^{+\infty} \dfrac{t^3 dt}{1+t^8}$ est généralisée uniquement en sa borne supérieure

• Pour $x \geqslant 0$, on pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \dfrac{t^3 dt}{1+t^8}$

Le changement de variable indiqué est $u = t^4$ (et donc $du = 4t^3 dt$) ce qui donne

$$F(x) = \int_0^{x^4} \frac{du}{4(1+u^2)} = \frac{1}{4}\int_0^{x^4} \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{4}[\arctan(u)]_0^{x^4} = \frac{1}{4}\arctan(x^4)$$

Comme

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{1}{4}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}$$

On peut affirmer que

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t^3 dt}{1+t^8} \text{ converge et vaut } \frac{\pi}{8}}$$

résolution 4 • La fonction $t : t \mapsto \dfrac{1}{t^2-6t+9} = \dfrac{1}{(t-3)^2}$ est définie et continue sur l'intervalle $]-\infty,0]$,

– elle possède donc des primitives sur cet intervalle

– l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} \dfrac{dt}{t^2-6t+9}$ est généralisée uniquement en sa borne inférieure

• Pour $x \leqslant 0$, on pose $F(x) = \int_x^0 f(t)dt$

On a

$$F(x) = \int_x^0 \frac{dt}{(t-3)^2} = \left[\frac{-1}{t-3}\right]_x^0 = \frac{1}{3} + \frac{1}{x-3}$$

Or

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-3} = 0 \text{ et ainsi } \lim_{x\to-\infty} F(x) = \frac{1}{3}$$

On peut affirmer que

$$\boxed{\int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{t^2-6t+9} \text{ converge et vaut } \frac{1}{3}}$$

résolution 5 • La fonction $f : t \mapsto \dfrac{t+3}{(t^2+4)(t+1)^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ comme quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas.

- f admet donc des primitives sur cet intervalle
- et l'intégrale est généralisée en sa borne supérieure uniquement

• La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ est du type

$$f(t) = \frac{At+B}{t^2+4} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{(t+1)^2} \text{ avec } (A,B,C,D) \in \mathbb{R}^4$$

• On a $D = \lim\limits_{t\to-1}(t+1)^2 f(t) = \lim\limits_{r\to-1} \dfrac{t+3}{t^2+4} = \dfrac{2}{5}$

• On a $A \times (2i) + B = \lim\limits_{t\to2i}(t^2+4)f(t) = \lim\limits_{t\to2i} \dfrac{t+3}{(t+1)^2} = \dfrac{2i+3}{(2i+1)^2} = \dfrac{-1}{25} - \dfrac{18}{25}i$

donc $\boxed{B = \dfrac{-1}{25} \text{ et } A = \dfrac{-9}{25}}$

• On a $\lim\limits_{t\to+\infty} t.f(t) = A + C$. Or $\lim\limits_{t\to+\infty} tf(t) = 0$ donc $\boxed{C = -A = \dfrac{9}{25}}$

• Pour tout $x \geqslant 0$ on pose

$$F(x) = \int_0^x \frac{At+B}{t^2+4} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{(t+1)^2} dt$$

On intègre chaque élément simple ensuite. On a

$$\int_0^x \frac{t}{t^2+4}dt = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{2t}{t^2+4}dt = \left[\frac{1}{2}\ln(t^2+4)\right]_0^x = \frac{1}{2}(\ln(x^2+4) - \ln 4)$$

$$\int_0^x \frac{dt}{t+1} = \ln(x+1) \qquad \text{et} \qquad \int_0^x \frac{dt}{(t+1)^2} = \left[\frac{-1}{t+1}\right]_0^x 1 - \frac{1}{1+x}$$

$$\int_0^x \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{4}\int_0^x \frac{dt}{(t/2)^2+1} = \frac{1}{2}\int_0^{x/2} \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} \text{ (on a posé } u = t/2)$$

• On a donc

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \frac{9}{25}\ln(x+1) - \frac{9}{50}\ln(x^2+4) - \frac{2/5}{1+x} - \frac{1}{50}\arctan(x/2) + \frac{2}{5} + \frac{9}{25}\ln 2$$

• Ensuite, on s'intéresse à la limite quand x tend vers $+\infty$. En particulier on a

$$\begin{aligned}\frac{9}{25}\ln(x+1) - \frac{9}{50}\ln(x^2+4) &= \frac{9}{25}(\ln x + \ln(1+\frac{1}{x})) - \frac{9}{50}(\ln(x^2) + \ln(1+\frac{4}{x^2})\\ &= \frac{9}{25}\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{9}{50}\ln(1+\frac{4}{x^2})\end{aligned}$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = -\dfrac{1}{50}\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2}{5} + \dfrac{9}{25}\ln 2$.

Conclusion $\boxed{\int_0^\infty f(t)dt \text{ converge et vaut } -\dfrac{\pi}{100} + \dfrac{2}{5} + \dfrac{9}{25}\ln 2}$

résolution 6 • La fonction $f : t \mapsto e^{-t}\ln(1+e^t)$ est continue sur $[0,+\infty[$

- f admet donc des primitives sur cet intervalle
- et l'intégrale est généralisée en sa borne supérieure uniquement

• Pour $x \geqslant 0$ on pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x e^{-t}\ln(1+e^t)dt$

On effectue le changement de variable $\theta = e^t$ (et donc $d\theta = e^t dt$). Cela donne

$$F(x) = \int_0^x e^{-t}\ln(1+e^t)dt = \int_1^{e^x} \frac{\ln(1+\theta)}{\theta^2}d\theta$$

On effectue maintenant une intégration par parties
en posant $u(\theta) = \ln(1+\theta)$ (et donc $u'(\theta) = \dfrac{1}{1+\theta}$) et $v'(\theta) = \dfrac{1}{\theta^2}$ (et on choisit $v(\theta) = \dfrac{-1}{\theta}$)

$$F(x) = \left[-\frac{\ln(1+\theta)}{\theta}\right]_1^{e^x} + \int_1^{e^x} \frac{d\theta}{\theta(1+\theta)}$$

Une décomposition en éléments simples donne $\dfrac{1}{X(X+1)} = \dfrac{1}{X} - \dfrac{1}{X+1}$
et ainsi

$$\begin{aligned} F(x) &= \left[-\frac{\ln(1+\theta)}{\theta}\right]_1^{e^x} + \int_1^{e^x} \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta+1}d\theta \\ &= \left[-\frac{\ln(1+\theta)}{\theta}\right]_1^{e^x} + [\ln(\theta) - \ln(\theta+1)]_1^{e^x} \\ &= \ln(2) - e^{-x}\ln(1+e^x) + \ln(e^x) - \ln(e^x+1) + \ln 2 \end{aligned}$$

On détermine maintenant proprement les limites

- Comme $e^{-x}\ln(1+e^x) = e^{-x}(\ln(e^x(1+e^{-x}))) = e^{-x}(x+\ln(1+e^{-x}))$
  on peut affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\ln(1+e^x) = 0$
- Comme $\ln(e^x) - \ln(e^x+1) = \ln\dfrac{e^x}{e^x+1} = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$
  on peut affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^x) - \ln(e^x+1) = 0$

On a montré que final que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 2\ln 2$

Ceci prouve que

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-t}\ln(1+e^t)dt \text{ converge et vaut } 2\ln 2}$$

résolution 7 soit $0 < a < \pi$ fixé.

- On note $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^2 - 2\cos(a).t + 1}$
- L'équation $t^2 - 2.\cos(a).t + 1 = 0$ ne possède pas de solutions réelles car

$$\Delta = 4\cos^2 a - 4 = -4.\sin^2 a < 0$$

- La fonction f est donc continue sur $[0,+\infty[$ comme quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas.
  Ainsi f possède des primitives sur cet intervalle et l'intégrale est généralisée en $+\infty$ uniquement
- Il est clair que l'intégrale est convergente car $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ et l'on applique la règle des équivalents.
- On utilise la méthode classique en mettant sous forme canonique puis en effectuant un changement de variable.
  Soit $X \geqslant 0$

$$\begin{aligned} F(X) = \int_0^X \frac{dt}{t^2 - 2\cos(a).t + 1} &= \int_0^X \frac{dt}{(t-\cos a)^2 + \sin^2 a} \\ &= \frac{1}{\sin^2 a}\int_0^X \frac{dt}{\left(\dfrac{t-\cos a}{\sin a}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{1}{\sin a}\left[\arctan\left(\frac{t-\cos a}{\sin a}\right)\right]_0^X \end{aligned}$$

- Comme $\sin a > 0$, on a $\lim\limits_{X\to\infty} \arctan\left(\dfrac{X-\cos a}{\sin a}\right) = \dfrac{\pi}{2}$
- Comme la fonction arctan est impaire, on a

$$\arctan\left(-\frac{\cos a}{\sin a}\right) = -\arctan\frac{\cos a}{\sin a} = -\arctan\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-a)}{\cos(\frac{\pi}{2}-a)} = -\arctan(\tan(\frac{\pi}{2}-a))$$

- On sait que $\forall\theta \in]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$, $\arctan(\tan\theta)) = \theta$
  Ici comme $a \in]0,\pi[$, on a $\dfrac{\pi}{2} - a \in]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$ et ainsi affirmer que $\arctan(\tan(\dfrac{\pi}{2}-a)) = \dfrac{\pi}{2} - a\,!$
  Il est à noter ici que si $a \in]\pi,2\pi[$**, on a** $\arctan(\tan(\dfrac{\pi}{2}-a)) = \dfrac{3\pi}{2} - a \neq \dfrac{\pi}{2} - a\,$**!**
- En résumé, on a prouvé que

$$\lim_{X\to+\infty} F(x) = \frac{1}{\sin a}\left(\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - a\right)\right) = \frac{\pi - a}{\sin a}$$

$\boxed{\textbf{résolution 8}}$

$\boxed{\textbf{résolution 9}}$