Somme d'une série entière (2A)

exercice 1 (*)

Déterminer la somme de $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{6n+2}}{(2n)!}$ *pour* $x\in\mathbb{R}$

exercice 2 (*)

Déterminer la somme de $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^{n+3}}{(n-1)!}$ *pour* $x\in\mathbb{R}$

exercice 3 (*)

Déterminer la somme de $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+5}}{(n+2)!}$ *pour* $x\in\mathbb{R}$

exercice 4 (*)

Déterminer la somme de $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{(n+2)!}$ *pour* $x\in\mathbb{R}$

exercice 5 (**)

Déterminer la somme de $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+3}}{(2n+2)!}$ *pour* $x\in\mathbb{R}$

exercice 6 (**)

Déterminer la somme de $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{4^{n+1}.x^{2n+4}}{(2n+3)!}$ *pour tout* $x\in\mathbb{R}$.

exercice 7 (**)

Déterminer la somme de $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{n+3}$ *pour* $x\in]-1,+1[$

exercice 8 (*)

Déterminer la somme de $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^{4n+3}}{2^{n+2}(n-1)!}$ *pour* $x\in\mathbb{R}$

exercice 9 (**)

Déterminer la somme de $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{n(n-1)}$ *pour* $x\in]-1,+1[^*$

exercice 10 (*)

Déterminer la somme de $\sum_{n=2}^{\infty}(1+3.2^{2n+1})x^n$ *pour* $x\in\left]\dfrac{-1}{4},\dfrac{1}{4}\right[$

exercice 11 (*)

Déterminer la somme de $\sum_{n=3}^{\infty}\dfrac{(-2)^{n+1}}{n-2}x^n$ *pour* $x\in\left]\dfrac{-1}{2},\dfrac{1}{2}\right[$

exercice 12 (**)

Déterminer la somme de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{n+2} x^n$ *pour* $x \in \left] \frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right[$

exercice 13 (***)

Déterminer la somme de $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n^2+n+1}{n(n-1)(n+1)} x^n$ *pour* $x \in]-1,+1[$

exercice 14 (**)

Déterminer la somme de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$ *pour* $x \in \mathbb{R}$
(on pourra poser $X = \sqrt{x}$ *ou* $X = \sqrt{-x}$*)*

exercice 15 (**)

Déterminer la somme de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!}$ *pour* $x \in \mathbb{R}$
(on pourra poser $X = \sqrt{x}$ *ou* $X = \sqrt{-x}$*)*

exercice 16 (*)

DÃ©terminer la somme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3n-5}{n!} x^n$

exercice 17

exercice 18

Solutions

résolution 1 • Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{6n+2}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^3)^{2n}.x^2}{(2n)!} = x^2. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^3)^{2n}}{(2n)!}$$

Or on sait que

$$\forall X \in \mathbb{R},\ \cos(X) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{X^{2n}}{(2n)!}$$

On en déduit ainsi que

$$S(x) = x^2. \cos(x^3)$$

- Conclusion:

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{6n+2}}{(2n)!} = x^2. \cos(x^3)$$

résolution 2 • Soit $x \in \mathbb{R}$.

On effectue le changement d'indice $p \longleftarrow n-1$, et on obtient

$$S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{(n-1)!} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^{p+4}}{p!} = x^4 . \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^p}{p!}$$

Or

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^p}{p!} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^p}{p!} - 1 = e^x - 1$$

d'où

$$S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{(n-1)!} = x^4 .(e^x - 1)$$

• Conclusion:

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{(n-1)!} = x^4 .(e^x - 1)$$

résolution 3

- Soit $x \in \mathbb{R}$

Le changement d'indice $p \longleftarrow n+2$ donne

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+5}}{(n+2)!} = \sum_{p=2}^{\infty} \frac{x^{2p+1}}{p!} = \sum_{p=2}^{\infty} \frac{x.(x^2)^p}{p!} = x.\sum_{p=2}^{\infty} \frac{(x^2)^p}{p!}$$

On sait que

$$\forall X \in \mathbb{R}, e^X = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{X^p}{p!}$$

On a donc

$$\forall X \in \mathbb{R}, \sum_{p=2}^{\infty} \frac{X^p}{p!} = e^X - 1 - X$$

Ainsi

$$S(x) = x.\sum_{p=2}^{\infty} \frac{(x^2)^p}{p!} = x.(e^{x^2} - 1 - x^2)$$

- Conclusion

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = x.(e^{x^2} - 1 - x^2)$$

résolution 4

- Soit $x \in \mathbb{R}$

Le changement d'indice $p \longleftarrow n+2$ donne

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(n+2)!} = \sum_{p=2}^{\infty} \frac{x^{3p-6}}{p!}$$

- pour $x = 0$, on a directement $S(0) = \dfrac{1}{2}$

- Soit $x \in \mathbb{R}^*$
On peut alors écrire

$$S(x) = \sum_{p=2}^{\infty} \frac{x^{3p-6}}{p!} = \frac{1}{x^6}.\sum_{p=2}^{\infty} \frac{(x^3)^p}{p!}$$

On sait que

$$\forall X \in \mathbb{R}, e^X = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{X^p}{p!}$$

On a donc

$$\forall X \in \mathbb{R}, \sum_{p=2}^{\infty} \frac{X^p}{p!} = e^X - 1 - X$$

Ainsi

$$S(x) = \frac{1}{x^6}\left(e^{x^3} - 1 - x^3\right)$$

- Conclusion

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{e^{x^3} - 1 - x^3}{x^6} & \text{sinon} \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{résolution 5}}$ • Soit $x \in \mathbb{R}$.

Le changement d'indice $p \longleftarrow n+1$ donne

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+3}}{(2n+2)!} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p)!} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x.x^{2p}}{(2p)!} = x.\sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!}$$

Or on sait que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!}$$

on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} = \mathrm{ch}(x) - 1$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = x.\sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} = x.(\mathrm{ch}(x) - 1)$$

• Conclusion

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = x.(\mathrm{ch}(x) - 1)$$

résolution 6 • Soit $x \in \mathbb{R}$.

La changement d'indice $p \longleftarrow n+1$ donne

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n+1}.x^{2n+4}}{(2n+3)!} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{4^{p}.x^{2p+2}}{(2p+1)!} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2^{2p}.x^{2p+1}.x}{(2p+1)!} = \frac{x}{2} \sum_{p=1}^{\infty} . \frac{(2x)^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

Or on sait que

$$\forall X \in \mathbb{R},\, \mathrm{sh}(X) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{X^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

On a donc

$$\forall X \in \mathbb{R},\, \sum_{p=1}^{\infty} \frac{X^{2p+1}}{(2p+1)!} = \mathrm{sh}(X) - X$$

D'où

$$S(x) = \frac{x}{2} \sum_{p=1}^{\infty} . \frac{(2x)^{2p+1}}{(2p+1)!} = \frac{x}{2} . \left(\mathrm{sh}(2x) - 2x\right)$$

- Conclusion

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n+1}.x^{2n+4}}{(2n+3)!} = \frac{x}{2} . \left(\mathrm{sh}(2x) - 2x\right)$$

résolution 7
- Soit $x \in]-1,+1[$.
On effectue le changement d'indice $p \longleftarrow n+3$, et on obtient

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n+3}=\sum_{p=3}^{\infty}\frac{x^{2(p-3)}}{p}=\sum_{p=3}^{\infty}\frac{x^{2p-6}}{p}$$

- pour $x=0$ on a directement $S(0)=\dfrac{1}{3}$

- Soit $x \in]-1,+1[^*$
On peut alors écrire

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n+3}=\sum_{p=3}^{\infty}\frac{x^{2p-6}}{p}=\frac{1}{x^6}\sum_{p=3}^{\infty}\frac{x^{2p}}{p}=\frac{1}{x^6}\sum_{p=3}^{\infty}\frac{(x^2)^p}{p}$$

Or on sait que

$$\forall X \in]-1,+1[,\ -\ln(1-X)=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{X^p}{p}$$

et ici comme $|x|<1$ on a encore $|x^2|<1$ et l'on peut ainsi écrire

$$\sum_{p=3}^{\infty}\frac{(x^2)^p}{p}=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(x^2)^p}{p}-x^2-\frac{x^4}{2}=-\ln(1-x^2)-x^2-\frac{x^4}{2}$$

En conclusion:

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n+3}=\begin{cases}\dfrac{1}{3} & \text{si } x=0\\[2mm] -\dfrac{2\ln(1-x^2)+2x^2+x^4}{2x^6} & \text{si } x\in]-1,+1[^*\end{cases}$$

résolution 8 • Soit $x \in \mathbb{R}$.

On commence par effectuer le changement d'indice $p \longleftarrow n-1$, ce qui donne

$$S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{4n+3}}{2^{n+2}(n-1)!} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^{4p+7}}{2^{p+3}.p!} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^7}{2^3}.\frac{\left(\dfrac{x^4}{2}\right)^p}{p!} = \frac{x^7}{2^3}.\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\left(\dfrac{x^4}{2}\right)^p}{p!}$$

or on sait que

$$\forall X \in \mathbb{R}, \sum_{p=0}^{\infty} \frac{X^p}{p!} = e^X$$

on a donc ici

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\left(\dfrac{x^4}{2}\right)^p}{p!} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\left(\dfrac{x^4}{2}\right)^p}{p!} - 1 = \exp(\frac{x^4}{2}) - 1$$

- Conclusion:

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{4n+3}}{2^{n+2}(n-1)!} = \frac{x^7}{2^3}.\left[\exp(\frac{x^4}{2}) - 1\right] = \frac{x^7}{8}.\left[\exp(\frac{x^4}{2}) - 1\right]$$

résolution 9 • Dans tout cet exercice, x désignera un réel de l'intervalle $]-1,+1[$

- On commence par opérer une décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{X(X-1)}=\frac{1}{X-1}-\frac{1}{X}$$

et l'on a donc pour tout $n\geqslant 2$, $\dfrac{x^{2n-1}}{n(n-1)}=\dfrac{x^{2n-1}}{n-1}-\dfrac{x^{2n-1}}{n}$

- On s'intéresse à $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{n-1}$.
Le changement d'indice $p\longleftarrow n-1$ donne

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{n-1}=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{x^{2p+1}}{p}=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{x.(x^2)^p}{p}=x.\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(x^2)^p}{p}$$

Or on sait que

$$\forall X\in]-1,+1[,\ -\ln(1-X)=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{X^p}{p}$$

et ici comme $|x|<1$ on a encore $|x^2|<1$ et l'on peut ainsi écrire $\sum\limits_{p=1}^{\infty}\dfrac{(x^2)^p}{p}=-\ln(1-x^2)$
On a ainsi

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{n-1}=-x\ln(1-x^2)$$

- On s'intéresse à $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{n}$.
On distingue deux cas
  i) si $x=0$ on a directement $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{n}=0$
  ii) si $x\in]-1,+1[^*$, on peut écrire

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{-1}.(x^2)^n}{n}=\frac{1}{x}.\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n}$$

avec la même série entière de référence, on peut en déduire que

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n}-x^2=-\ln(1-x^2)-x^2$$

et ainsi

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{n}=\frac{-\ln(1-x^2)-x^2}{x}$$

- Conclusion

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{n(n-1)}=\begin{cases}0 & \text{si } x=0\\ -x\ln(1-x^2)+\dfrac{\ln(1-x^2)+x^2}{x}=\dfrac{(1-x^2)\ln(1-x^2)}{x}+x & \text{si } x\in]-1,+1[^*\end{cases}$$

résolution 10

- Dans tout cet exercice, x désignera un réel de l'intervalle $\left]\frac{-1}{4},\frac{1}{4}\right[$
- On s'intéresse à $\sum_{n=2}^{\infty} x^n$
  On a évidemment
$$\sum_{n=2}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1 - x = \frac{1}{1-x} - 1 - x = \frac{x^2}{1-x}$$
- Comme $|x| < \frac{1}{4}$ on a $|4x| < 1$ et l'on peut donc écrire
$$\sum_{n=2}^{\infty} 3.2^{2n+1}.x^n = \sum_{n=2}^{\infty} 3.2.4^n.x^n = 6.\sum_{n=2}^{\infty}(4x)^n = 6.\left[\frac{1}{1-4x} - 1 - 4x\right] = 6.\frac{16.x^2}{1-4x} = \frac{96x^2}{1-4x}$$
- On en déduit ainsi
$$\sum_{n=2}^{\infty}(1+3.2^{2n+1})x^n = \sum_{n=2}^{\infty} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} 3.2^{2n+1}.x^n = \frac{x^2}{1-x} + \frac{96x^2}{1-4x}$$

$\boxed{\textbf{résolution 11}}$ • Dans tout cet exercice, on aura $x \in \left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[$

• Le changement d'indice $n \longleftarrow n-2$ donne

$$S(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{n-2} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n+3}}{n} x^{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n.(-2)^3}{n} x^n.x^2 = -8x^2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2.x)^n}{n}$$

Or on sait que

$$\forall X \in]-1,+1[, \ -\ln(1-X) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{X^p}{p}$$

et ici comme $x \in \left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ on a $-2x \in]-1,+1[$ et l'on peut ainsi écrire

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2.x)^n}{n} = -\ln(1-(-2x)) = -\ln(1+2x)$$

• Conclusion

$$\forall x \in \left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[, S(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{n-2} x^n = 8x^2. \ln(1+2x)$$

résolution 12 • Dans tout cet exercice, x désignera un réel de l'intervalle $\left]\dfrac{-1}{2},\dfrac{1}{2}\right[$

- On effectue le changement d'indice $n \longleftarrow n+2$, ce qui donne

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}}{n+2}x^n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-2)^{n-1}}{n}x^{n-2}$$

- On va distinguer deux cas

  i) si $x=0$ on a directement $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-2)^{n+1}}{n+2}x^n=\dfrac{-2}{2}=-1$

  ii) si $x\in\left]\dfrac{-1}{2},\dfrac{1}{2}\right[^*$, on aura alors $2x\in]-1,+1[^*$.
  Or on sait que

$$\forall X\in]-1,+1[,\ \ln(1+X)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.X^n$$

  On peut ainsi écrire

$$\begin{aligned}S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}}{n+2}x^n&=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-2)^{n-1}}{n}x^{n-2}\\&=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}2^n.2^{-1}.x^n.x^{-2}\\&=\frac{1}{2x^2}.\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(2x)^n\\&=\frac{1}{2x^2}.\left[\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(2x)^n-2x\right]\\&=\frac{1}{2x^2}.\left[\ln(1+2x)-2x\right]\end{aligned}$$

  iii) Conclusion

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}}{n+2}x^n=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+2x)-2x}{2x^2} & \text{si } x\left]\dfrac{-1}{2},\dfrac{1}{2}\right[^*\\ -1 & \text{si } x=0\end{cases}$$

résolution 13 • Dans tout cet exercice, x désignera un réel de l'intervalle $]-1,+1[$

• On décompose en éléments la fraction rationnelle et l'on trouve

$$\frac{2X^2+X+1}{X(X-1)(X+1)}=\frac{2}{X-1}-\frac{1}{X}+\frac{1}{X+1}$$

• On a ainsi

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n^2+n+1}{n(n-1)(n+1)}x^n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2.x^n}{n-1}-\frac{x^n}{n}+\frac{x^n}{n+1}=2.\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-1}}_{=T(x)}-\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n}}_{=U(x)}+\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}}_{V(x)}$$

• On rappelle que

$$\forall x\in]-1,+1[,\ \ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

• On a ainsi

$$U(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-x=-\ln(1-x)-x$$

• En effectuant le changement d'indice $p\longleftarrow n-1$ dans $T(x)$ cela donne

$$T(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-1}=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{x^{p+1}}{p}=x.\sum_{p=1}^{\infty}\frac{x^p}{p}=-x.\ln(1-x)$$

• Pour $V(x)$, on va distinguer deux cas:

i) si $x=0$, on a évidemment $V(0)=0$

ii) si $x\in]-1,+1[^*$, le changement d'indice $p\longleftarrow n+1$

$$\begin{aligned}V(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}&=\sum_{p=3}^{\infty}\frac{x^{p-1}}{p}\\&=\frac{1}{x}.\sum_{p=3}^{\infty}\frac{x^p}{p}\\&=\frac{1}{x}.\left[\sum_{p=1}^{\infty}\frac{x^p}{p}-x-\frac{x^2}{2}\right]\\&=\frac{1}{x}.\left(-\ln(1-x)-x-\frac{x^2}{2}\right)\\&=-\frac{\ln(1-x)}{x}-1-\frac{x}{2}\end{aligned}$$

• On en déduit en conclusion que

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n^2+n+1}{n(n-1)(n+1)}x^n=\begin{cases}-2.x.\ln(1-x)+\ln(1-x)-\dfrac{\ln(1-x)}{x}-1+\dfrac{x}{2} & \text{si } x\in]-1,+1[^*\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

résolution 14

- Nous allons utiliser les séries entières de référence ci dessous

$$\forall X \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^{2n}}{(2n)!} = \mathrm{ch}(X) \qquad \forall X \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{X^{2n}}{(2n)!} = \cos(X)$$

- Soit $x \geqslant 0$.
  On a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = \mathrm{ch}(\sqrt{x})$$

- Soit $x \leqslant 0$.
  On a

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-x)^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{-x})^{2n}}{(2n)!} = \cos(\sqrt{-x})$$

- Conclusion

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \begin{cases} \mathrm{ch}(\sqrt{x}) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \cos(\sqrt{-x}) & \text{sinon} \end{cases}$$

résolution 15 • Nous allons utiliser les séries entières de référence ci dessous

$$\forall X \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^{2n+1}}{(2n+1)!} = \mathrm{sh}(X) \qquad \forall X \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{X^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(X)$$

- Soit $x > 0$.
  On a

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!} = \frac{1}{\sqrt{x}}.\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{(2n)!} = \frac{\mathrm{sh}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

- Soit $x < 0$.
  On a

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-x)^n}{(2n)!} = \frac{1}{\sqrt{-x}}.\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{-x})^{2n+1}}{(2n)!} = \frac{\sin(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}}$$

- Pour $x = 0$, on a $S(0) = \dfrac{1}{(2.0+1)!} = 1$
- Conclusion

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{sh}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\sin(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

résolution 16 • Soit $x \in \mathbb{R}$.
On a

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3n-5}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3n}{n!} x^n - 5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=\boxed{1}}^{\infty} \frac{n^2+3n}{n!} x^n - 5e^x \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{(n-1)!} x^n - 5e^x \end{aligned}$$

On effectue le glissement d'indice $p \longleftarrow n-1$

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{p+4}{p!} x^{p+1} - 5e^x \\ &= x. \sum_{p=0}^{\infty} \frac{p}{p!}.x^p + 4x. \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^p}{p!} - 5e^x \\ &= x. \sum_{p=\boxed{1}}^{\infty} \frac{p}{p!}.x^p + 4xe^x - 5e^x \\ &= x. \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^p}{(p-1)!} + 4xe^x - 5e^x \end{aligned}$$

On effectue le glissement d'indice $q \longleftarrow p-1$

$$\begin{aligned} S(x) &= x. \sum_{q=0}^{\infty} \frac{x^{q+1}}{q!} + 4xe^x - 5e^x \\ &= x^2. \sum_{q=0}^{\infty} \frac{x^q}{q!} + 4xe^x - 5e^x \\ &= x^2e^x + 4xe^x - 5e^x \end{aligned}$$

• Conclusion

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3n-5}{n!} x^n = x^2e^x + 4xe^x - 5e^x$$

résolution 17

résolution 18