Séries entières et équations différentielles (2A)

exercice 1 (*)

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *une série entière de rayon* $R\neq 0$ *et de fonction somme* S.
Montrer que $\forall x \in]-R,+R[$

$$x^2S''(x)+4xS'(x)+2S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+3n+2)a_nx^n$$

exercice 2 (*)

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *une série entière de rayon* $R\neq 0$ *et de fonction somme* S.
Montrer que $\forall x \in]-R,+R[$

$$x^2.S''(x)-x(x+6)S'(x)+3(x+4)S(x)=12a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n-3)(n-4)a_n-(n-4)a_{n-1}\right].x^n$$

exercice 3 (*)

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *une série entière de rayon* $R\neq 0$ *et de fonction somme* S.
Montrer que $\forall x \in]-R,+R[$

$$S'(x)+x^3.S(x)=a_1+2.a_2.x+3.a^3.x^2+\sum_{n=3}^{\infty}\left[(n+1).a_{n+1}+a_{n-3}\right].x^n$$

exercice 4 (*)

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *une série entière de rayon* $R\neq 0$ *et de fonction somme* S.
Montrer que $\forall x \in]-R,+R[$

$$xS''(x)+(x-1)S'(x)-S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n^2-1)a_{n+1}+(n-1)a_n\right]x^n$$

exercice 5 (**)

Déterminer les fonctions développables en séries entières au voisinage de 0 de l'équation différentielle

$$4xy''+2y'+y=0$$

exercice 6 (***)

Déterminer les fonctions développables en séries entières au voisinage de 0 de l'équation différentielle

$$x^2.y''-x(x+6)y'+3(x+4)y=0$$

Les écrire si possible à l'aide des fonctions usuelles

exercice 7 (**)

Déterminer les fonctions développables au voisinage de 0 de l'équation différentielle

$$(x^2+x)y''+(3x+1)y'+y=0$$

exercice 8

Solutions

résolution 1 • On sait par théorème que

i) S est de classe C^∞ sur $]-R,+R[$

ii) S' est obtenue par dérivation terme à terme

Ainsi, sur $]-R,+R[$ on a

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n.a_n.x^{n-1} \qquad \text{et} \qquad S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1).a_n.x^{n-2}$$

• Soit $x \in]-R,+R[$.
On a donc

$$\begin{aligned} x^2S''(x) + 4xS'(x) + 2S(x) &= x^2.\sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1).a_n.x^{n-2} + 4x.\sum_{n=1}^{\infty} n.a_n.x^{n-1} + 2.\sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1).a_n.x^n + 4\sum_{n=1}^{\infty} n.a_n.x^n + 2.\sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n \end{aligned}$$

On remarque que

$$\sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1).a_n.x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n.(n-1).a_n.x^n$$

car

$$0.(0-1).a_0.x^0 = 0 \qquad \text{et} \qquad 1.0.a_1.x^1 = 0$$

et que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n.a_n.x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n.a_n.x^n$$

car

$$0.a_0.x^0 = 0$$

On a ainsi en reprenant l'égalité initiale

$$\begin{aligned} x^2S''(x) + 4xS'(x) + 2S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n.(n-1).a_n.x^n + 4\sum_{n=0}^{\infty} n.a_n.x^n + 2.\sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[n.(n-1) + 4.n + 2\right] a_n.x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(n^2 + 3n + 2\right) a_n.x^n \end{aligned}$$

résolution 2 • On sait par théorème que

i) S est de classe C^∞ sur $]-R,+R[$

ii) S' est obtenue par dérivation terme à terme

Ainsi, sur $]-R,+R[$ on a

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n.a_n.x^{n-1} \qquad \text{et} \qquad S''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1).a_n.x^{n-2}$$

- Soit $x\in]-R,+R[$.
  On a donc

$$\begin{aligned}
&x^2.S''(x)-x(x+6)S'(x)+3(x+4)S(x) &=\\
&x^2.\sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1).a_n.x^{n-2}-(x^2+6x).\sum_{n=1}^{\infty} n.a_n.x^{n-1}+(3x+12)\sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n &=\\
&\sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1).a_n.x^n-\sum_{n=1}^{\infty} n.a_n.x^{n+1}-6\sum_{n=1}^{\infty} n.a_n.x^n+3\sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^{n+1}+12\sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n &
\end{aligned}$$

Dans la deuxième et la quatrième somme, on effectue le décalage d'indice $n\leftarrow n+1$, et on obtient

$$\begin{aligned}
&x^2.S''(x)-x(x+6)S'(x)+3(x+4)S(x) &=\\
&\sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1).a_n.x^n-\sum_{n=2}^{\infty}(n-1).a_{n-1}.x^n-6\sum_{n=1}^{\infty} n.a_n.x^n+3\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}.x^n+12\sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n &
\end{aligned}$$

On remarque que $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n.(n-1).a_n.x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty} n.(n-1).a_n.x^n$ et $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(n-1).a_{n-1}.x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n-1).a_{n-1}.x^n$
Ce qui permet d'avoir

$$\begin{aligned}
&x^2.S''(x)-x(x+6)S'(x)+3(x+4)S(x) &=\\
&\sum_{n=1}^{\infty} n.(n-1).a_n.x^n-\sum_{n=1}^{\infty}(n-1).a_{n-1}.x^n-6\sum_{n=1}^{\infty} n.a_n.x^n+3\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}.x^n+12\sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n &
\end{aligned}$$

En isolant les termes d'indice $n=0$, on obtient au final

$$\begin{aligned}
&x^2.S''(x)-x(x+6)S'(x)+3(x+4)S(x) &=\\
&\sum_{n=1}^{\infty} n.(n-1).a_n.x^n-\sum_{n=1}^{\infty}(n-1).a_{n-1}.x^n-6\sum_{n=1}^{\infty} n.a_n.x^n+3\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}.x^n+12\sum_{n=1}^{\infty} a_n.x^n+12a_0 &=\\
&12a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n(n-1)-6n+12)a_n+(3-(n-1))a_{n-1}\right].x^n &=\\
&12a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n^2-7n+12)a_n+(4-n)a_{n-1}\right].x^n &=\\
&12a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n-3)(n-4)a_n-(n-4)a_{n-1}\right].x^n &
\end{aligned}$$

résolution 3

- On sait par théorème que
  i) S est de classe C^∞ sur $]-R,+R[$
  ii) S' est obtenue par dérivation terme à terme

  Ainsi, sur $]-R,+R[$ on a

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n.a_n.x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1).a_{n+1}.x^n$$

- Soit $x \in]-R,+R[$.
  On a donc

$$\begin{aligned} S'(x) + x^3.S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1).a_{n+1}.x^n + x^3.\sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1).a_{n+1}.x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^{n+3} \end{aligned}$$

On effectue le décalage d'indice $n \leftarrow n+3$ dans la seconde série

$$S'(x) + x^3.S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1).a_{n+1}.x^n + \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3}.x^n$$

On isole les termes d'indices $0, 1$ et 2 dans la première somme

$$\begin{aligned} S'(x) + x^3.S(x) &= a_1 + 2.a_2.x + 3.a_3.x^2 + \sum_{n=3}^{\infty}(n+1).a_{n+1}.x^n + \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3}.x^n \\ &= a_1 + 2.a_2.x + 3.a_3.x^2 + \sum_{n=3}^{\infty}\left[(n+1).a_{n+1} + a_{n-3}\right].x^n \end{aligned}$$

résolution 4 • On sait par théorème que

i) S est de classe C^∞ sur $]-R,+R[$

ii) S' est obtenue par dérivation terme à terme

Ainsi, sur $]-R,+R[$ on a

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n.a_n.x^{n-1} \qquad \text{et} \qquad S''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1).a_n.x^{n-2}$$

- Soit $x\in]-R,+R[$.
  On a donc

$$\begin{aligned}
&xS''(x)+(x-1)S'(x)-S(x) &=\\
&xS''(x)+xS'(x)-S'(x)-S(x) &=\\
&x.\sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1).a_n.x^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty} n.a_n.x^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty} n.a_n.x^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n &=\\
&\sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1).a_n.x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty} n.a_n.x^{n}-\sum_{n=1}^{\infty} n.a_n.x^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n &
\end{aligned}$$

On effectue maintenant le glissement d'indice $n\leftarrow n-1$ dans la première et troisième somme

$$\begin{aligned}
&xS''(x)+(x-1)S'(x)-S(x) &=\\
&\sum_{n=1}^{\infty} n.(n+1).a_{n+1}.x^{n}+\sum_{n=1}^{\infty} n.a_n.x^{n}-\sum_{n=0}^{\infty} (n+1).a_{n+1}.x^{n}-\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n &
\end{aligned}$$

On constate que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n.(n+1).a_{n+1}.x^{n}=\sum_{n=0}^{\infty} n.(n+1).a_{n+1}.x^{n}$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} n.a_n.x^{n}=\sum_{n=0}^{\infty} n.a_n.x^{n}$$

D'où

$$\begin{aligned}
&xS''(x)+(x-1)S'(x)-S(x) &=\\
&\sum_{n=0}^{\infty} n.(n+1).a_{n+1}.x^{n}+\sum_{n=0}^{\infty} n.a_n.x^{n}-\sum_{n=0}^{\infty} (n+1).a_{n+1}.x^{n}-\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n &=\\
&\sum_{n=0}^{\infty} \left[n.(n+1).a_{n+1}+n.a_n-(n+1).a_{n+1}.x^n-a_n\right]x^n &=\\
&\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n^2-1)a_{n+1}+(n-1)a_n\right]x^n &
\end{aligned}$$

résolution 5 Nous allons procéder par Analyse-Synthèse

Partie Analyse

On suppose qu'il existe une solution y de l'équation différentielle sous la forme d'une série entière de rayon $R \neq 0$

- On considère donc $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une SE de rayon $R \neq 0$
  Le théorème de dérivation terme à terme des SE nous dit que
  - y est C^∞ sur $]-R,+R[$
  - $\forall x \in]-R,+R[, y'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$
  - $\forall x \in]-R,+R[, y''(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1) a_{n+1} x^{n-1}$
- On a alors pour tout $x \in]-R,+R[$

$$\begin{aligned}
4xy''(x) + 2y'(x) + y(x) &= 4x \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)a_{n+1}x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= 4\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)a_{n+1}x^{n} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= 4\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)a_{n+1}x^{n} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(4n+2)a_{n+1} + a_n\right] x^n
\end{aligned}$$

- Or **une série entière est la série entière nulle ssi tous ses coefficients sont nuls**,
  On a donc
  $$\forall n \geqslant 0, (n+1)(4n+2)a_{n+1} + a_n = 0$$
  ce qui peut s'écrire
  $$\forall n \geqslant 0, 2(n+1)(2n+1)a_{n+1} + a_n = 0$$
  ou encore
  $$\forall n \geqslant 0, a_{n+1} = \frac{-1}{(2n+2)(2n+1)} a_n$$
- soit $n \geqslant 1$.
  On a alors

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{-1}{(2n)(2n-1)} a_{n-1} \\
&= \frac{-1}{(2n)(2n-1)} \cdot \frac{-1}{(2n-2)(2n-3)} a_{n-2} \\
&= \frac{-1}{(2n)(2n-1)} \cdot \frac{-1}{(2n-2)(2n-3)} \cdot \frac{-1}{(2n-4)(2n-5)} a_{n-3} \\
&\vdots \\
&= (-1)^n \cdot \frac{1}{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\dots 2.1} a_0 = \frac{(-1)^n}{(2n)!} a_0
\end{aligned}$$

(on pourrait alors pour être extrêmement rigoureux prouver par récurrence cette formule)

On vient de prouver que si une solution dse existe alors elle est forcément de la forme

$$y : x \mapsto a_0.\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n.x^n}{(2n)!} \qquad \text{avec } a_0 \in \mathbb{R}$$

Partie synthèse

Elle consiste ici à vérifier que le rayon de la série entière trouvée est non nul.

Nous allons utiliser la règle de D'Alembert .
Pour $x \neq 0$, on pose $u_n = \left|\dfrac{(-1)^n.x^n}{(2n)!}\right| = \dfrac{|x|^n}{(2n)!} \neq 0$.
On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n)!}{(2n+2)!}.x^2 = \frac{x^2}{2n(2n-1)} \longrightarrow 0 < 1$$

On peut donc affirmer que la série $\sum u_n$ converge pour tout $x \neq 0$

On vient de prouver que *Rayon* $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n.x^n}{(2n)!}\right) = +\infty$

Conclusion: Les solutions de l'équation différentielle développables en séries entières sont

$$\boxed{\begin{array}{rcl} y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & A.\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n.x^n}{(2n)!} \end{array} \qquad \text{avec } A \in \mathbb{R}}$$

résolution 6 On va procéder par Analyse-Synthèse.

Partie Analyse

On suppose qu'il existe une solution y de l'équation différentielle sous la forme d'une série entière de rayon $R \neq 0$

- On considère donc $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon $R \neq 0$.
  Le théorème de dérivation terme à terme des séries entières nous permet d'affirmer que y est C^∞ sur $]-R,+R[$ et le calcul **??** nous rappelle que $\forall x \in]-R,+R[$,

$$x^2.y''(x) - x(x+6)y'(x) + 3(x+4)y(x) = 12a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n-3)(n-4)a_n - (n-4)a_{n-1}\right].x^n$$

- Or **une série entière est la série entière nulle ssi tous ses coefficients sont nuls**,
  On a donc $\begin{cases} 12a_0 = 0 \\ (n-3)(n-4)a_n - (n-4)a_{n-1} = 0 \quad ,\forall n \geqslant 1 \end{cases}$
  On constate déjà que l'égalité précédente est toujours vraie pour $n = 4$, et si dans le cas contraire on peut simplifier par $n - 4 \neq 0$, ce qui donne ainsi $\begin{cases} a_0 = 0 \\ (n-3)a_n = a_{n-1} \quad ,\forall n \geqslant \mathbb{N}^* - \{4\} \end{cases}$
  En prenant $n = 1, 2$ et 3 cela donne $\boxed{a_0 = a_1 = a_2 = 0}$
  On a donc $\forall n \geqslant 5, a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n-3}$
  De cette relation, on obtient pour $n \geqslant 5$

$$a_n = \frac{1}{n-3}a_{n-1} = \frac{1}{n-3}\frac{1}{n-4}a_{n-4} = \cdots = \frac{1}{n-3}\frac{1}{n-4}\cdots\frac{1}{2}a_4 = \frac{a_4}{(n-3)!}$$

- On note qu'il n'y a pas de conditions sur a_3 et a_4
  On vient de prouver que si une solution dse existe alors elle est forcément de la forme

$$y : x \mapsto a_3.x^3 + a_4.\sum_{n=4}^{\infty} \frac{x^n}{(n-3)!} \qquad \text{avec } (a_3,a_4) \in \mathbb{R}^2$$

Partie synthèse

Elle consiste ici à vérifier que le rayon de la série entière trouvée est non nul.
Le rayon est ici infini car d'après les dse de référence, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=4}^{\infty} \frac{x^n}{(n-3)!} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^{p+3}}{p!} = x^3 \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^p}{p!} - 1\right) = x^3(e^x - 1)$$

Conclusion: Les solutions de l'équation différentielle développables en série entières sont

$$\boxed{\begin{array}{rcl} y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & A.x^3 + B.x^3(e^x - 1) \end{array} \qquad \text{avec } (A,B) \in \mathbb{R}^2}$$

résolution 7 Nous allons procéder par Analyse-Synthèse

Partie Analyse

On suppose qu'il existe une solution y de l'équation différentielle sous la forme d'une série entière de rayon $R \neq 0$

- On considère donc $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une SE de rayon $R \neq 0$
  Le théorème de dérivation terme à terme des SE nous dit que
  - y est C^∞ sur $]-R, +R[$
  - $\forall x \in]-R, +R[, y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$
  - $\forall x \in]-R, +R[, y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) a_{n+1} x^{n-1}$
- On a alors pour tout $x \in]-R, +R[$

$$
\begin{aligned}
&(x^2+x)y''(x) + (3x+1)y'(x) + y(x) &=\\
&x^2 y''(x) + xy'(x) + 3xy'(x) + y'(x) + y(x) &=\\
&x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) a_{n+1} x^{n-1} + 3x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &=\\
&\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n + 3 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &=\\
&\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n + 3 \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &=\\
&\sum_{n=0}^{\infty} (n^2+2n+1)(a_{n+1}+a_n) x^n &=\\
&\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 (a_{n+1}+a_n) x^n
\end{aligned}
$$

- Or **une série entière est la série entière nulle ssi tous ses coefficients sont nuls**,
  On doit donc avoir $\forall n \geqslant 0, (n+1)^2(a_{n+1}+a_n)$, càd $\forall n \geqslant 0, a_{n+1} = -a_n$
  On en déduit que $\forall n \geqslant 0, a_n = (-1)^n.a_0$
- On vient de prouver que si une solution dse existe alors elle est forcément de la forme

$$y : x \mapsto a_0. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \qquad \text{avec } a_0 \in \mathbb{R}$$

Partie synthèse

Elle consiste ici à vérifier que le rayon de la série entière trouvée est non nul.

D'après les dse de référence, on sait que $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ est une série entière de rayon 1 (et de somme $\frac{1}{1+x}$ sur l'intervalle ouvert de convergence)

Conclusion: Les solutions de l'équation différentielle développables en séries entières sont

$$\boxed{\begin{array}{rcl} y :]-1,+1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{A}{1+x} \end{array} \qquad \text{avec } A \in \mathbb{R}}$$

$\boxed{\textbf{résolution 8}}$