

Rayon d'une série entière (2A)

exercice 1 (*)

Déterminer le rayon de la série entière $\sum a_n \cdot z^n$ avec $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

exercice 2 (*)

Déterminer le rayon de la série entière $\sum a_n \cdot z^n$ avec $a_n = \frac{n^2}{4^n + n}$

exercice 3 (***)

Déterminer le rayon de la série entière $\sum a_n \cdot z^n$ avec $a_n = \frac{\cos(n\pi/3)}{\sqrt{n}}$

exercice 4

Déterminer le rayon de la série entière $\sum a_n \cdot z^n$ avec $a_n = \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$

exercice 5

Solutions

résolution 1

- On commence par rappeler que $\boxed{\lim a_n = e}$

En effet: On sait que pour $n > 0$ on a $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left[n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et que $\ln(1+h) \underset{0}{\sim} h$, on en déduit que

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

et ainsi

$$n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{n} = 1$$

On a ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$.

Comme la fonction \exp est continue sur \mathbb{R} , et donc en particulier en 1, on peut en déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp(1) = e$$

- A partir de là, on peut soit utiliser la règle de D'Alembert, soit revenir à la définition pour conclure.

Utilisons ici la définition!

On s'intéresse à la suite $(|a_n| \cdot r^n)$ avec $r \geq 0$ fixé.

D'après ce qui précède, on a (lorsque $r > 0$)

$$|a_n| \cdot r^n \underset{+\infty}{\sim} e \cdot r^n$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| \cdot r^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } r > 1 \\ e & \text{si } r = 1 \\ 0 & \text{si } r < 1 \end{cases}$$

On en déduit que

$$\{r \geq 0 \mid \text{la suite } (|a_n| \cdot r^n) \text{ est majorée}\} = [0, 1]$$

D'où

$$\boxed{R = \sup([0, 1]) = 1}$$

- remarque:

si vous êtes plus à l'aise avec la règle de D'Alembert, utilisez la!

résolution 2

- On commence par remarquer que

$$a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^2}{4^n}$$

- A partir de là, on peut soit utiliser la règle de D'Alembert, soit revenir à la définition pour conclure.

Utilisons ici la définition!

On s'intéresse à la suite $(|a_n|.r^n)$ avec $r \geq 0$ fixé.

D'après ce qui précède, on a (lorsque $r > 0$)

$$|a_n|.r^n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^2}{4^n}.r^n = n^2. \left(\frac{r}{4}\right)^n$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n|.r^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } r > 4 \\ +\infty & \text{si } r = 4 \\ 0 & \text{si } r < 4 \end{cases}$$

(En effet, dans ce dernier cas, on a $\lim n^2 = +\infty$ et $\lim \left(\frac{r}{4}\right)^n = 0$, mais le théorème des croissances comparées nous permet d'affirmer que $\lim n^2. \left(\frac{r}{4}\right)^n = 0$)

On en déduit que

$$\{r \geq 0 \mid \text{la suite } (|a_n|.r^n) \text{ est majorée}\} = [0,4[$$

D'où

$$R = \sup([0,4[) = 4$$

- remarque:
si vous êtes plus à l'aise avec la règle de D'Alembert, utilisez la!

résolution 3

- Nous allons montrer que le rayon de cette série entière vaut un à l'aide de la définition.

On s'intéresse pour cela à la suite $(|a_n|.r^n) = \left(\cos(n\pi/3) \cdot \frac{r^n}{\sqrt{n}} \right)$ avec $r \geq 0$

- i) pour $r \in [0,1]$ on a $\lim |a_n|.r^n = 0$ car $(\cos(n\pi/3))$ est une suite bornée et $(\frac{r^n}{\sqrt{n}})$ est une suite qui tend vers 0.

Comme la suite $(|a_n|.r^n)$ est une suite convergente, on peut affirmer qu'elle est bornée.

- ii) pour $r > 1$, nous allons montrer rigoureusement que la suite $(v_n) = (|a_n|.r^n)$ n'est pas majorée. Soit $r > 1$.

– la suite $(\frac{r^n}{\sqrt{n}})$ tend vers $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées.

– notons $u_n = \cos(n\pi/3)$.

La suite (u_n) ne possède pas de limite mais la suite extraite (u_{6n}) possède une limite puisque c'est la suite constante égale à un.

– la suite extraite $(v_{6n}) = (|a_{6n} \cdot r^{6n})$ tend ainsi vers $+\infty$ en tant que produit de la suite constante un et d'une suite de limite infinie.

– comme $\lim v_{6n} = 0$, on peut affirmer que la suite $(v_n) = (|a_n|.r^n)$ n'est pas majorée

- iii) On en déduit que

$$\{r \geq 0 \mid \text{la suite } (|a_n|.r^n) \text{ est majorée}\} = [0,1[\text{ ou } [0,1]$$

D'où $\boxed{R = 1}$

- remarque:

si vous êtes plus à l'aise avec la règle de D'Alembert, . . . et bien tant pis pour vous! Ici on ne pouvait l'utiliser car le quotient ne possède pas de limite. . .

résolution 4

- Pour $z \neq 0$, on pose

$$u_n = |a_n \cdot z^n| = \left| \sin \frac{1}{2^n} \right| \cdot |z|^n$$

- Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ on a $\sin \frac{1}{2^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2^n}$ et donc

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{|z|^n}{2^n}$$

- Comme $u_n > 0$, nous allons utiliser la règle de D'Alembert à la série numérique $\sum u_n$.
On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\frac{|z|^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{|z|^n}{2^n}} = \frac{|z|}{2}$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|z|}{2}$$

On peut en déduire ainsi que

- pour $|z| < 2$ la série $\sum a_n \cdot z_n$ est ACV
- pour $|z| > 2$ la série $\sum a_n \cdot z_n$ est GDV

On en déduit donc que $\boxed{R = 2}$

résolution 5