

équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants (1A)

exercice 1 (*)

Déterminer les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = \cos(2x)$ sur $I = \mathbb{R}$

exercice 2 (*)

Déterminer les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' - 10y' + 41y = \sin(x)$ sur $I = \mathbb{R}$

exercice 3 (*)

Déterminer les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' - 3y' - 18y = xe^{4x}$ sur $I = \mathbb{R}$
(On pourra chercher une solution particulière de la forme $y_p : x \mapsto (K.x + L).e^{4x}$)

exercice 4 (*)

Donner la solution générale complexe de l'équation différentielle $y'' + 2y' - 3y = 0$

exercice 5 (*)

Déterminer les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' - 4y' + 5y = 10$ sur $I = \mathbb{R}$

exercice 6 (***)

Déterminer les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' + y = x \cdot \sin(x)$ sur $I = \mathbb{R}$
(On pourra chercher une solution particulière de l'équation complexifiée $y'' + y = x \cdot e^{ix}$ de la forme $y_p : x \mapsto (a \cdot x^2 + b \cdot x) \cdot e^{ix}$)

exercice 7 (**)

Déterminer les solutions réelles de l'équation différentielle $y'' + y' + y = \sin^3(x)$ sur $I = \mathbb{R}$
(on pourra linéariser le second membre et utiliser le principe de superposition)

exercice 8 (*)

m est un paramètre réel.
Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = e^{mx}$

exercice 9 (**)

m est un paramètre réel.
Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = xe^{mx}$
(Dans le cas où $m \neq 1$ on pourra chercher une solution de la forme $x \mapsto (Kx + L) \cdot e^{mx}$ et sinon de la forme $x \mapsto (K \cdot x^3 + L \cdot x^2) \cdot e^x$)

exercice 10

|

exercice 11

|

Solutions

résolution 1

- Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre: la solution générale est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière

- L'équation caractéristique de l'équa. diff. est $X^2 - 2X + 2 = 0$ qui a pour racines complexes conjuguées $1 + i$ et $1 - i$

La solution générale de l'équation homogène est donc

$$\begin{aligned} y : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} && \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto e^x (A \cos(x) + B \sin(x)) \end{aligned}$$

- On sait que $\cos(2x)$ est la partie réelle de e^{2ix} .
Comme $2i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, on peut chercher une solution particulière de la forme $y : x \mapsto K \cdot \cos(2x) + L \cdot \sin(2x)$

On a

$$y'(x) = -2K \cdot \sin(2x) + 2L \cdot \cos(2x)$$

et

$$y''(x) = -4K \cdot \cos(2x) - 4L \cdot \sin(2x)$$

D'où en remplaçant dans l'équation

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = (-2K - 4L) \cos(2x) + (4K - 2L) \sin(2x)$$

Le système $\begin{cases} -2K - 4L = 1 \\ 4K - 2L = 0 \end{cases}$ possède comme solution $(K, L) = \left(\frac{-1}{10}, \frac{-1}{5} \right)$

une solution particulière est donc

$$y : x \mapsto \frac{-1}{10} \cos(2x) - \frac{1}{5} \sin(2x)$$

- La solution générale de l'équation complète est ainsi

$$\begin{aligned} y : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} && \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto \frac{-1}{10} \cos(2x) - \frac{1}{5} \sin(2x) + e^x (A \cos(x) + B \sin(x)) \end{aligned}$$

- remarque: on aurait également pu procéder par complexification

résolution 2

- Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre: la solution générale est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière
- L'équation caractéristique de l'équa.diff. est $X^2 - 10X + 41 = 0$ qui a pour racines complexes conjuguées $5 + 4i$ et $5 - 4i$

La solution générale de l'équation homogène est donc

$$\begin{aligned} y : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^{5x}(A \cos(4x) + B \sin(4x)) \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

- On sait que $\sin(x)$ est la partie imaginaire de e^{ix}
Comme i n'est pas racine de l'équation caractéristique,
on peut chercher une solution particulière de la forme $y : x \mapsto K \cdot \cos(x) + L \cdot \sin(x)$

On a

$$y'(x) = -K \cdot \sin(x) + L \cdot \cos(x)$$

et

$$y''(x) = -K \cdot \cos(x) - L \cdot \sin(x)$$

D'où en remplaçant dans l'équation

$$y''(x) - 10y'(x) + 41y(x) = (40K - 10L) \cos(x) + (10K + 40L) \sin(x)$$

Le système $\begin{cases} 40K - 10L = 0 \\ 10K + 40L = 1 \end{cases}$ possède comme solution $(K, L) = \left(\frac{1}{170}, \frac{2}{85}\right)$
une solution particulière est donc

$$y : x \mapsto \frac{1}{170} \cos(x) + \frac{2}{85} \sin(x)$$

- La solution générale de l'équation complète est ainsi

$\begin{aligned} y : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{170} \cos(x) + \frac{2}{85} \sin(x) + e^{5x}(A \cos(4x) + B \sin(4x)) \end{aligned}$	avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$
---	--------------------------------

résolution 3

- Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre: la solution générale est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière
- L'équation caractéristique de l'équa.diff. est $X^2 - 3X - 18 = 0$ qui a pour racines réelles distinctes -3 et 6 .

La solution générale de l'équation homogène est donc

$$\begin{aligned} y : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} && \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto Ae^{-3x} + Be^{6x} \end{aligned}$$

- Comme 4 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on peut chercher une solution particulière de la forme $y : x \mapsto (Kx + L)e^{4x}$

On a

$$y'(x) = (4Kx + 4L + K)e^{4x}$$

et

$$y''(x) = (16Kx + 16L + 8K)e^{4x}$$

D'où en remplaçant dans l'équation

$$y''(x) - 3y'(x) + 18y(x) = (-14Kx + 5K - 14L)e^{4x}$$

Le système $\begin{cases} -14K & = 1 \\ 5K - 14L & = 0 \end{cases}$ possède comme solution $(K, L) = \left(\frac{-1}{14}, \frac{-5}{196}\right)$
une solution particulière est donc

$$y : x \mapsto \left(\frac{-1}{14}x - \frac{5}{196}\right)e^{4x} = \frac{-1}{196}(14x + 5)e^{4x}$$

- La solution générale de l'équation complète est ainsi

$$\boxed{\begin{aligned} y : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} && \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto \frac{-1}{196}(14x + 5)e^{4x} + Ae^{-3x} + Be^{6x} \end{aligned}}$$

résolution 4

• Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants homogène

- L'équation caractéristique de l'équa.diff. est $X^2 + 2X - 3 = 0$ qui a pour racines réelles distinctes 1 et -3 .

La solution générale de cette équation homogène est donc

$$\begin{array}{l} y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto Ae^{-3x} + Be^x \end{array} \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{C}^2$$

remarque: ici les constantes sont complexes car on demande les solutions à valeurs complexes

résolution 5

- Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre: la solution générale est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière

- L'équation caractéristique de l'équa.diff. est $X^2 - 4X + 5 = 0$ qui a pour racines complexes conjuguées $2 + i$ et $2 - i$

La solution générale de l'équation homogène est donc

$$\begin{array}{ll} y : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto e^{2x}(A \cos(x) + B \sin(x)) \end{array} \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

- Une solution particulière évident est la fonction constante $y : x \mapsto 2$
- La solution générale de l'équation complète est donc

$$\begin{array}{ll} y : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto 2 + e^{2x}(A \cos(x) + B \sin(x)) \end{array} \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

résolution 6

- Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre: la solution générale est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière
- L'équation caractéristique de l'équa.diff. est $X^2 + 1 = 0$ qui a pour racines complexes conjuguées i et $-i$

La solution générale de l'équation homogène est donc

$$\begin{aligned} y : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} && \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto A \cos(x) + B \sin(x) \end{aligned}$$

- On va complexifier cette équation pour déterminer une solution particulière. On sait que $\sin x$ est la partie imaginaire de e^{ix} , on va donc s'intéresser à l'équation

$$y'' + y = x.e^{ix} \quad (*)$$

On pose

$$y_p : x \mapsto (ax^2 + bx)e^{ix}$$

On a alors

$$y_p'(x) = (iax^2 + (2a + ib)x + b)e^{ix}$$

et

$$y_p''(x) = (-ax^2 + (4ai - b)x + 2a + 2ib)e^{ix}$$

En reportant dans (*) cela donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, (4aix + 2a + 2ib)e^{ix} = xe^{ix}$$

On considère alors le système $\begin{cases} 4ai &= 1 \\ 2a + 2ib &= 0 \end{cases}$ qui possède comme solution $(a, b) = \left(\frac{-i}{4}, \frac{1}{4}\right)$

Une solution particulière de (*) est donc $y : x \mapsto \left(\frac{-i}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\right)e^{ix} = \frac{1}{4}(-ix^2 + x)e^{ix}$

Il nous reste à prendre la partie imaginaire de cette fonction pour obtenir une solution particulière de l'équation de départ.

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{4}(-ix^2 + x)e^{ix} \right) &= \frac{1}{4} \operatorname{Im} ((-ix^2 + x)(\cos(x) + i \sin(x))) \\ &= \frac{1}{4}(x \sin(x) - x^2 \cos(x)) \end{aligned}$$

- Conclusion: la solution générale de l'équation complète est

$\begin{aligned} y : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} && \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto \frac{x \sin(x) - x^2 \cos(x)}{4} + A \cos(x) + B \sin(x) \end{aligned}$
--

résolution 7

- Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre: la solution générale est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière

- équation sans second membre:

L'équation caractéristique est $X^2 + X + 1 = 0$

Les racines sont complexes conjuguées, à savoir $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

La solution générale de l'équation homogène associée est donc

$$\boxed{\begin{array}{l} y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^{-\frac{x}{2}} \left(A \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \right) \end{array} \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2}$$

- équation avec second membre:

On va linéariser le second membre puis utiliser le principe de superposition des solutions

- On a $\sin^3(t) = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^3 = \frac{-1}{8i}(e^{3it} - 3e^{it} + 3e^{-it} - e^{-3it}) = \frac{3\sin(t)}{4} - \frac{\sin(3t)}{4}$
- Une solution particulière (évidente) de l'équation $y'' + y' + y = \sin(x)$ est $y(x) = -\cos(x)$ (si on ne trouvait pas cette solution évidente, on pouvait procéder de manière standard, voir ci-dessous)
- solution particulière de l'équation $y'' + y' + y = \sin(3x)$

1. PREMIÈRE MÉTHODE: ON COMPLEXIFIE L'ÉQUATION

On considère l'équation différentielle $\bar{z}'' + \bar{z}' + \bar{z} = e^{3ix}$.

On cherche une solution particulière sous la forme ae^{3ix} avec a complexe

En remplaçant dans l'équation cela donne $(-8 + 3i)a = 1$, soit $a = \frac{1}{-8 + 3i} = \frac{-8 - 3i}{73}$

On trouve donc comme solution particulière

$$x \mapsto \operatorname{Im} \left(\frac{-8 - 3i}{73} e^{3ix} \right) = \frac{-3}{73} \cos(3x) - \frac{8}{73} \sin(3x)$$

2. DEUXIÈME MÉTHODE:

on cherche une solution sous la forme $y : x \mapsto a \cos(3x) + b \sin(3x)$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

On remplace et on aboutit sur le système $\begin{cases} 3b - 8a = 0 \\ -3a - 8b = 1 \end{cases}$.

Ce qui donne $(a, b) = \left(\frac{-3}{73}, \frac{-8}{73}\right)$.

(on retrouve bien la même solution que par la première méthode)

- En appliquant le principe de superposition on trouve que la solution générale est

$$\boxed{\begin{array}{l} y; \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto -\frac{3}{4} \cos(x) + \frac{3}{292} \cos(3x) + \frac{2}{73} \sin(3x) + e^{-\frac{x}{2}} \left(A \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \right) \end{array}}$$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

résolution 8

• Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre: la solution générale est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière

- L'équation homogène est $y'' - 2y' + y = 0$

Son équation caractéristique est $X^2 - 2X + 1 = 0$

Cette équation possède une racine réelle double 1

La solution générale de l'équation homogène est ainsi

$$\begin{array}{l} y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (Ax + B)e^x \end{array} \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

- Equation complète: on discute suivant que $m = 1$ ou pas

i) cas où $m \neq 1$

Comme m n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de la forme $y : x \mapsto K.e^{mx}$ avec K constante.

On a alors $y'(x) = Km.e^{mx}$ et $y''(x) = Km^2.e^{mx}$

en reportant dans l'équation cela donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, K(m^2 - 2m + 1)e^{mx} = e^{mx}$$

$$\text{On trouve } K = \frac{1}{m^2 - 2m + 1} = \frac{1}{(m - 1)^2}$$

La solution générale de l'équation complète est ainsi

$$\begin{array}{l} y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (Ax + B)e^x + \frac{e^{mx}}{(m - 1)^2} \end{array} \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

ii) cas où $m = 1$

Comme 1 est racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de la forme $y : x \mapsto Kx^2.e^x$

En remplaçant dans l'équation complète on aboutit à

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2Ke^x = e^x$$

$$\text{et donc } K = \frac{1}{2}$$

La solution générale de l'équation complète est ainsi

$$\begin{array}{l} y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (Ax + B)e^x + \frac{x^2 e^x}{2} \end{array} \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

résolution 9

• Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre: la solution générale est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière

- L'équation homogène est $y'' - 2y' + y = 0$

Son équation caractéristique est $X^2 - 2X + 1 = 0$

Cette équation possède une racine réelle double 1

La solution générale de l'équation homogène est ainsi

$$\begin{array}{l} y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (Ax + B)e^x \end{array} \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

- Equation complète: on discute suivant que $m = 1$ ou pas

i) cas où $m \neq 1$

Comme m n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de la forme $yx \mapsto (Kx + L)e^{mx}$ avec K et L deux constante.

On a alors $y'(x) = (mKx + mL + K)e^{mx}$ et $y''(x) = (m^2Kx + m^2L + 2mK)e^{mx}$ en reportant dans l'équation cela donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, [(m-1)^2Kx + 2(m-1)K + (m-1)^2L] e^{mx} = xe^{mx}$$

ce qui donne le système
$$\begin{cases} (m-1)^2K & = 1 \\ 2(m-1)K + (m-1)^2L & = 0 \end{cases}$$

On trouve $K = \frac{1}{(m-1)^2}$ et $L = \frac{-2}{(m-1)^3}$

La solution générale de l'équation complète est ainsi

$$\begin{array}{l} y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (Ax + B)e^x + \frac{((m-1)x - 2)e^{mx}}{(m-1)^3} \end{array} \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

ii) cas où $m = 1$

Considérons $y : x \mapsto (Kx^3 + Lx^2)e^x$

En remplaçant dans l'équation complète on aboutit à $(6Kx + 2L)e^x = xe^x$ et donc $K = \frac{1}{6}$ et $L = 0$

La solution générale de l'équation complète est ainsi

$$\begin{array}{l} y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (Ax + B)e^x + \frac{x^3e^x}{6} \end{array} \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

résolution 10

résolution 11