

équations différentielles linéaires du premier ordre(1A)

exercice 1 (*)

Résoudre sur $I =]0, \pi[$ l'équation différentielle $\sin(x).y' - \cos(x).y = -1$

exercice 2 (*)

Résoudre sur $I = \mathbb{R}$ l'équation différentielle $(2 + \cos x).y' - \sin(x).y = (2 + \cos x). \sin x$

exercice 3 (*)

Résoudre sur $I =]0, \pi[$ l'équation différentielle $\sin^3(x).y'(x) - 2 \cos(x).y(x) = 0$

exercice 4 (**)

Résoudre sur $I = \mathbb{R}$ l'équation différentielle $(2 + \cos x).y' + \sin(x).y = (2 + \cos x). \sin x$

exercice 5 (*)

Résoudre sur $I = \mathbb{R}$ l'équation différentielle $(x^2 + 1)y' - xy = (x^2 + 1)^{3/2}$

exercice 6 (**)

Résoudre sur $I =]-1, +1[$ l'équation différentielle $y' - \frac{x}{1+x^2}y = \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^4}}$

exercice 7 (*)

Résoudre sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ l'équation différentielle $y' + \tan(x).y = -\cos^2(x)$

exercice 8 (**)

Résoudre sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ l'équation différentielle $y' - \tan(x).y = \cos^3(x)$

exercice 9 (*)

Résoudre sur $I =]-\infty, 0[$ l'équation différentielle $x^3y' + 4(1-x^2)y = 0$

exercice 10 (***)

Résoudre sur $I =]-1, +\infty[$ l'équation différentielle $(1+x)^2y' + \arctan(x).y = 0$
(On pourra réaliser une IPP puis une décomposition en éléments simples)

exercice 11

|

exercice 12

|

Solutions

résolution 1

- Comme $\sin x$ ne s'annule pas sur I l'équation proposée est équivalente à l'équation

$$y' - \frac{\cos x}{\sin x}y = \frac{-1}{\sin x} \quad \text{sur } I$$

- Notons A une primitive de la fonction $a : x \mapsto -\frac{\cos x}{\sin x}$ sur I .

$$\text{On a } A(x) = \int^x -\frac{\cos t}{\sin t} dt = -\ln |\sin x| + Cste$$

(On a reconnu la forme $\frac{u'}{u}$)

et ainsi pour tout $x \in I$ on a

$$\exp(\ln |\sin x|) = |\sin x| = \sin(x)$$

car sur $I =]0, \pi[$ la fonction \sin est strictement positive

- On a donc la solution générale de l'équation homogène qui est

$$\boxed{\begin{array}{l} y: I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto K \cdot \sin(x) \end{array}} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

- La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est une solution évidente de l'équation complète!
(il est plus simple de le remarquer sur l'équation de départ que sur celle divisée par $\sin x$)
- La solution générale de l'équation complète est donc

$$\boxed{\begin{array}{l} y: I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto K \cdot \sin(x) + \cos x \end{array}} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

résolution 2

- Comme $2 + \cos x$ ne s'annule pas sur I l'équation proposée est équivalente à l'équation

$$y' - \frac{\sin x}{2 + \cos x} y = \sin x \quad (*) \quad \text{sur } I$$

- Notons A une primitive de la fonction $a : x \mapsto \frac{-\sin x}{2 + \cos x}$
On peut facilement déterminer A
(ou bien en reconnaissant une forme $\frac{u'}{u}$ ou bien à l'aide du changement de variable $u = \cos t$ (et donc $u = -\sin(t)dt$)
On a

$$A(x) = \int^x \frac{-\sin t}{2 + \cos t} dt = \int^{\cos x} \frac{du}{2 + u} = \ln |2 + \cos x| + Cste = \ln(2 + \cos x) + Cste$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\exp(-\ln(2 + \cos x)) = \frac{1}{2 + \cos(x)}$

- On a donc la solution générale de l'équation homogène qui est

$$\boxed{\begin{array}{l} y: I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{K}{2 + \cos(x)} \end{array}} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

- On détermine maintenant une solution particulière à l'aide de la variation de la constante .
On pose $y(x) = \frac{K(x)}{2 + \cos(x)}$ avec K une fonction dérivable inconnue et on remplace dans (*).
On aboutit à

$$K'(x) = \sin(x) \cdot (2 + \cos(x))$$

On détermine $K(x)$ par simple primitivation (même changement de variable!)

$$K(x) = \int^x \sin(t) \cdot (2 + \cos(t)) dt = \int^{\cos x} (2 + u)(-du) = -\frac{(2 + \cos(x))^2}{2} + Cste$$

ainsi une solution particulière est $y : x \mapsto -\frac{(2 + \cos(x))^2}{2(2 + \cos x)} = -\frac{2 + \cos x}{2}$

- On a donc la solution générale de l'équation complète qui est

$$\boxed{\begin{array}{l} y: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto -\frac{2 + \cos(x)}{2} + \frac{K}{2 + \cos(x)} \end{array}} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

résolution 3

- Comme $\sin^3 x$ ne s'annule pas sur I l'équation proposée est équivalente à l'équation

$$y' - 2 \frac{\cos x}{\sin^3 x} y = 0 \quad \text{sur } I$$

On reconnaît une équation différentielle linéaire homogène

- Notons A une primitive de la fonction $a : x \mapsto -\frac{2 \cos x}{\sin^3 x}$ sur I .

En effectuant le changement de variable $u = \sin t$ (et donc $du = \cos(t)dt$)

$$A(x) = \int^x -\frac{2 \cos t}{\sin^3 t} dt = \int^{\sin x} \frac{-2 du}{u^3} = \frac{1}{\sin^2(x)} + Cste$$

(rem: sans changement de variable, on reconnaît aussi la forme $u' \cdot u^{-3}$ à une constante multiplicative près)

- On a donc la solution générale de l'équation homogène qui est

$\begin{aligned} y: I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto K \cdot \exp(-1/\sin^2(x)) \end{aligned}$	avec $K \in \mathbb{R}$
---	-------------------------

résolution 4

- Comme $2 + \cos x$ ne s'annule pas sur I l'équation proposée est équivalente à l'équation

$$y' + \frac{\sin x}{2 + \cos x} y = \sin x \quad (*) \quad \text{sur } I$$

- Notons A une primitive de la fonction $a : x \mapsto \frac{\sin x}{2 + \cos x}$

On peut facilement déterminer A

(par exemple à l'aide du changement de variable $u = \cos t$ (et donc $du = -\sin(t)dt$))

On a

$$A(x) = \int^x \frac{\sin t}{2 + \cos t} dt = \int^{\cos x} \frac{-du}{2 + u} = -\ln(2 + \cos x) + Cste$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\exp(\ln(2 + \cos x)) = 2 + \cos(x)$

- On a donc la solution générale de l'équation homogène qui est

$$\boxed{\begin{array}{l} y: I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto K \cdot (2 + \cos(x)) \end{array}} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

- On détermine maintenant une solution particulière à l'aide de la variation de la constante .
On pose $y(x) = K(x) \cdot (2 + \cos(x))$ avec K fonction dérivable inconnue et on remplace dans (*).
On aboutit à

$$K'(x) = \frac{\sin(x)}{2 + \cos(x)}$$

On détermine $K(x)$ par simple primitivation (même changement de variable! ou bien on reconnaît à une constante primitive près la forme $\frac{u'}{u}$)

$$K(x) = \int^x \frac{\sin(t)}{2 + \cos(t)} dt = \int^{\cos x} \frac{-du}{2 + u} = -\ln(2 + \cos x) + Cste$$

ainsi une solution particulière est $y : x \mapsto -(2 + \cos(x)) \cdot \ln(2 + \cos x)$

- On a donc la solution générale de l'équation complète qui est

$$\boxed{\begin{array}{l} y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto -(2 + \cos(x)) \cdot \ln(2 + \cos x) + K \cdot (2 + \cos x) \end{array}} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

résolution 5

- Comme $1+x^2$ ne s'annule pas sur \mathbb{R} l'équation proposée est équivalente à l'équation

$$y' - \frac{x}{1+x^2}y = \sqrt{1+x^2} \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

- On note A une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{-x}{1+x^2}$ sur I .

On a

$$A(x) = \int^x \frac{-t}{1+t^2} dt = \frac{-1}{2} \int^x \frac{2t}{1+t^2} dt = \frac{-1}{2} \ln|1+x^2| + Cste = \frac{-1}{2} \ln(1+x^2) + Cste$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\exp\left(\frac{1}{2} \ln(1+x^2)\right) = \sqrt{1+x^2}$

- On a donc la solution générale de l'équation homogène qui est

$$\boxed{\begin{array}{l} y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto K\sqrt{1+x^2} \end{array}} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

- On détermine maintenant une solution particulière à l'aide de la variation de la constante.
On pose $y(x) = K(x)\sqrt{1+x^2}$ avec K fonction dérivable inconnue et on remplace dans l'équation différentielle.

On aboutit à $K'(x) = 1$ et donc de manière évidente $K(x) = x + Cste$

Une solution particulière est $y : x \mapsto x.\sqrt{1+x^2}$

- On a donc la solution générale de l'équation complète qui est

$$\boxed{\begin{array}{l} y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x.\sqrt{1+x^2} + K\sqrt{1+x^2} \end{array}} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

résolution 6

- On note A une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{-x}{1+x^2}$ sur I .

On a

$$A(x) = \int^x \frac{-t}{1+t^2} dt = \frac{-1}{2} \int^x \frac{2t}{1+t^2} dt = \frac{-1}{2} \ln|1+x^2| + Cste = \frac{-1}{2} \ln(1+x^2) + Cste$$

Pour tout $x \in I$ on a $\exp\left(\frac{1}{2} \ln(1+x^2)\right) = \sqrt{1+x^2}$

- On a donc la solution générale de l'équation homogène qui est

$$\boxed{\begin{array}{l} y :]-1, +1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto K\sqrt{1+x^2} \end{array}} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

- On détermine maintenant une solution particulière à l'aide de la variation de la constante. On pose $y(x) = K(x)\sqrt{1+x^2}$ avec K fonction dérivable inconnue et on remplace dans l'équation différentielle.

On aboutit à

$$K'(x) \cdot \sqrt{1+x^2} = \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^4}}$$

ce qui équivaut encore à

$$K'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ainsi $K(x) = \arcsin(x) + Cste$

Une solution particulière est $y : x \mapsto \arcsin(x) \cdot \sqrt{1+x^2}$

- On a donc la solution générale de l'équation complète qui est

$$\boxed{\begin{array}{l} y :]-1, +1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \arcsin(x) \cdot \sqrt{1+x^2} + K\sqrt{1+x^2} \end{array}} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

résolution 7

- Notons A une primitive de la fonction \tan sur I

On rappelle que

$$A(x) = \int^x \tan(t) dt = \int^x \frac{\sin t}{\cos t} dx = -\ln |\cos(x)| + Cste$$

(On a reconnu à une constante multiplicative près la forme $\frac{u'}{u}$) et ainsi pour tout $x \in I$ on a $\exp(\ln |\cos(x)|) = |\cos x| = \cos x$

car sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ la fonction \cos est strictement positive

- On a donc la solution générale de l'équation homogène qui est

$$\boxed{\begin{array}{l} y: I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto K \cdot \cos(x) \end{array}} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

- On détermine maintenant une solution particulière à l'aide de la variation de la constante. On pose $y(x) = K(x) \cdot \cos(x)$ avec K fonction dérivable inconnue et on remplace dans l'équation. On aboutit à

$$K'(x) = -\cos(x)$$

et ainsi directement $K(x) = -\sin(x) + Cste$

ainsi une solution particulière est $y : x \mapsto -\sin(x) \cdot \cos(x) = -\frac{\sin(2x)}{2}$

- On a donc la solution générale de l'équation complète qui est

$$\boxed{\begin{array}{l} y: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto -\frac{\sin(2x)}{2} + K \cdot \cos(x) \end{array}} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

résolution 8

- Notons A une primitive de la fonction $-\tan$ sur I

On rappelle que

$$A(x) = \int^x -\tan(t)dt = \int^x \frac{-\sin t}{\cos t} dt = \ln |\cos(x)| + Cste$$

et ainsi pour tout $x \in I$ on a $\exp(-\ln |\cos(x)|) = \frac{1}{|\cos x|} = \frac{1}{\cos x}$

car sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ la fonction \cos est strictement positive

- On a donc la solution générale de l'équation homogène qui est

$$\boxed{\begin{array}{l} y: I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{K}{\cos x} \end{array}} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

- On détermine maintenant une solution particulière à l'aide de la variation de la constante.

On pose $y(x) = \frac{K(x)}{\cos x}$ avec K fonction dérivable inconnue et on remplace dans l'équation.

On aboutit à

$$K'(x) = \cos^4(x)$$

Dans un des exercices de calcul, on a linéarisé cette expression et on a montré que

$$\cos^4 x = \frac{\cos(4x)}{8} + \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{3}{8}$$

On a donc

$$K(x) = \frac{\sin(4x)}{32} + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{3}{8}x + Cste$$

ainsi une solution particulière est

$$y : x \mapsto \frac{\frac{\sin(4x)}{32} + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{3}{8}x}{\cos x} = \frac{\sin(4x) + 8 \sin(2x) + 12x}{32 \cos x}$$

- Ainsi la solution générale de l'équation complète est

$$\boxed{\begin{array}{l} y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{\sin(4x) + 8 \sin(2x) + 12x}{32 \cos x} + \frac{K}{\cos x} \end{array}} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

résolution 9

- Comme x^3 ne s'annule pas sur I l'équation proposée est équivalente à l'équation

$$y' + \frac{4(1-x^2)}{x^3}y = 0 \quad \text{sur } I$$

- Notons A une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{4(1-x^2)}{x^3}$ sur I

On a

$$A(x) = \int^x \frac{4(1-t^2)}{t^3} dt = 4 \int^x \frac{1}{t^3} - \frac{1}{t} dt = \frac{-2}{x^2} - 4 \ln |x| + Cste$$

Pour tout $x \in I$ on a

$$\exp\left(\frac{2}{x^2} + 4 \ln |x|\right) = \exp\left(\frac{2}{x^2}\right) \cdot \exp(4 \ln |x|) = \exp\left(\frac{2}{x^2}\right) \cdot |x|^4 = x^4 \cdot \exp\left(\frac{2}{x^2}\right)$$

- La solution générale de l'équation sur I est donc

$y :]-\infty, 0[\longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto K \cdot x^4 \cdot \exp\left(\frac{2}{x^2}\right)$	avec $K \in \mathbb{R}$
--	-------------------------

résolution 10

• $(1+x)^2$ ne s'annule pas sur l'intervalle $I =]-1, +\infty[$ donc l'équation proposée est équivalente à l'équation

$$y' + \frac{\arctan(x)}{(1+x)^2}y = 0 \quad \text{sur } I$$

- Notons A une primitive de $x \mapsto \frac{\arctan(x)}{(1+x)^2}$ sur I

On note $A(x) = \int^x \frac{\arctan(t)}{(1+t)^2} dt$

- On réalise une intégration par parties en posant $u(x) = \arctan(x)$ (et donc $u'(x) = \frac{1}{1+x^2}$) et $v'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ (et on choisit $v(x) = \frac{-1}{1+x}$)

On obtient

$$A(x) = \frac{-\arctan x}{1+x} + \int^x \frac{1}{(1+t^2)(1+t)} dt$$

- On cherche une décomposition en éléments simples de $\frac{1}{(1+X^2)(1+X)}$ sous la forme $\frac{aX+b}{1+X^2} + \frac{c}{1+X}$ et l'on trouve

$$\frac{1}{(1+X^2)(1+X)} = \frac{\frac{1}{2}}{1+X} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}X}{X^2+1}$$

D'où

$$\begin{aligned} \int^x \frac{1}{(1+t^2)(1+t)} dt &= \frac{1}{2} \int^x \frac{dt}{1+t} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+1} - \frac{1}{4} \int^x \frac{2t}{t^2+1} dt \\ &= \frac{1}{2} \ln|1+x| + \frac{1}{2} \arctan(x) - \frac{1}{4} \ln|1+x^2| + Cste \end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{-\arctan x}{1+x} + \frac{1}{2} \ln|1+x| + \frac{1}{2} \arctan(x) - \frac{1}{4} \ln|1+x^2| + Cste \\ &= \frac{x-1}{2(x+1)} \arctan(x) + \frac{1}{4} \ln \frac{(1+x)^2}{1+x^2} + Cste \end{aligned}$$

- On a pour $x \in I$

$$\exp\left(-\left(\frac{x-1}{2(x+1)} \arctan(x) + \frac{1}{4} \ln \frac{(1+x)^2}{1+x^2}\right)\right) = \left(\frac{1+x^2}{(1+x)^2}\right)^{1/4} \cdot \exp\left(\frac{1-x}{2(x+1)} \arctan(x)\right)$$

- La solution générale est ainsi

$y :]-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto K \cdot \left(\frac{1+x^2}{(1+x)^2}\right)^{1/4} \cdot \exp\left(\frac{1-x}{2(x+1)} \arctan(x)\right)$	avec $K \in \mathbb{R}$
--	-------------------------

résolution 11

résolution 12