Etude complète de courbes paramétrées

exercice 1

Etude de l'arc paramétré $\begin{cases} x(t) &= t+\sqrt{3}.t^2 \\ y(t) &= t^2-\sqrt{3}.t \end{cases}$ *avec* $t \in \mathbb{R}$

exercice 2

Etude de l'arc paramétré $\begin{cases} x(t) &= t^3+3t^2-9t \\ y(t) &= t^3-3t^2-9t \end{cases}$ *avec* $t \in \mathbb{R}$

exercice 3

Etude de l'arc paramétré $\begin{cases} x(t) &= \cos^2(t) \\ y(t) &= \cos^3(t).\sin(t) \end{cases}$ *avec* $t \in \mathbb{R}$

exercice 4

Etude de l'arc paramétré $\begin{cases} x(t) &= t^2+\dfrac{2}{t} \\ y(t) &= t+\dfrac{1}{t} \end{cases}$ *avec* $t \in \mathbb{R}^*$

exercice 5

Etude de l'arc paramétré $\begin{cases} x(t) &= t-\dfrac{1}{t} \\ y(t) &= \exp(1/t) \end{cases}$ *avec* $t \in \mathbb{R}^*$

exercice 6 (***)

Etude de l'arc paramétré $\begin{cases} x(t) &= \dfrac{1}{\cos(3t)} \\ y(t) &= \dfrac{1}{\sin(2t)} \end{cases}$

exercice 7

Etude de l'arc paramétré $\begin{cases} x(t) &= t.\ln(t) \\ y(t) &= \dfrac{\ln(t)}{t} \end{cases}$ *avec* $t \in]0,+\infty[$

exercice 8

Etude de l'arc paramétré $\begin{cases} x(t) &= (t-1)^2(t+1) \\ y(t) &= (t-1)^3(t+1) \end{cases}$

exercice 9 (***)

Etude de l'arc paramétré $(x(t),y(t)) = \left(\dfrac{1-2t}{t^2}, \exp\left[\dfrac{1}{2}(t+\dfrac{1}{t})\right]\right)$

exercice 10

Etude de l'arc paramétré $\begin{cases} x(t) &= \dfrac{t}{t^2-1} \\ y(t) &= \dfrac{t^2}{t-1} \end{cases}$

exercice 11

Etude de l'arc paramétré $\begin{cases} x(t) &= \cos(t) - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos^2(t) \\ y(t) &= \sin(t).\cos(t) \end{cases}$ *avec* $t \in \mathbb{R}$

On donnera les coordonnées du point double ainsi que l'angle sous lequel les tangentes s'y croisent.

exercice 12

Etude de l'arc paramétré $(x(t),y(t)) = (t - th(t), \dfrac{1}{\operatorname{ch} t})$ *avec* $t \in \mathbb{R}$

exercice 13

Solutions

résolution 1 • Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$, et de classe C^∞ sur cet ensemble car ce sont des fonctions polynomiales.

Il n' y a pas de symétrie particulière en évidence.

- Le calcul des dérivées donne

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, x'(t) = 1 + 2\sqrt{3}.t \qquad \text{et} \qquad y'(t) = 2t - \sqrt{3}}$$

Le tableau de variations est simple à écrire:

t	$-\infty$		$\frac{-1}{2\sqrt{3}}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	0		$+$		
$x(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{-\sqrt{3}}{12}$	$\nearrow$	$\frac{5\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{7}{12}$	$\searrow$	$-\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$			$-$		0	$+$	

- Il n'y a pas de point stationnaire
- Il y a deux branches infinies à étudier (quand $t \to -\infty$ et quand $t \to +\infty$)
- On a $M(\frac{-1}{2\sqrt{3}}) = (\frac{-\sqrt{3}}{12}, \frac{7}{12})$ et ta tangente y est verticale
- On a $M(\frac{\sqrt{3}}{2}) = (\frac{5\sqrt{3}}{4}, \frac{-\sqrt{3}}{4})$ et ta tangente y est horizontale

- **Etude de la branche infinie quand $t \to -\infty$**
Comme $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to-\infty} y(t) = +\infty$, on considère

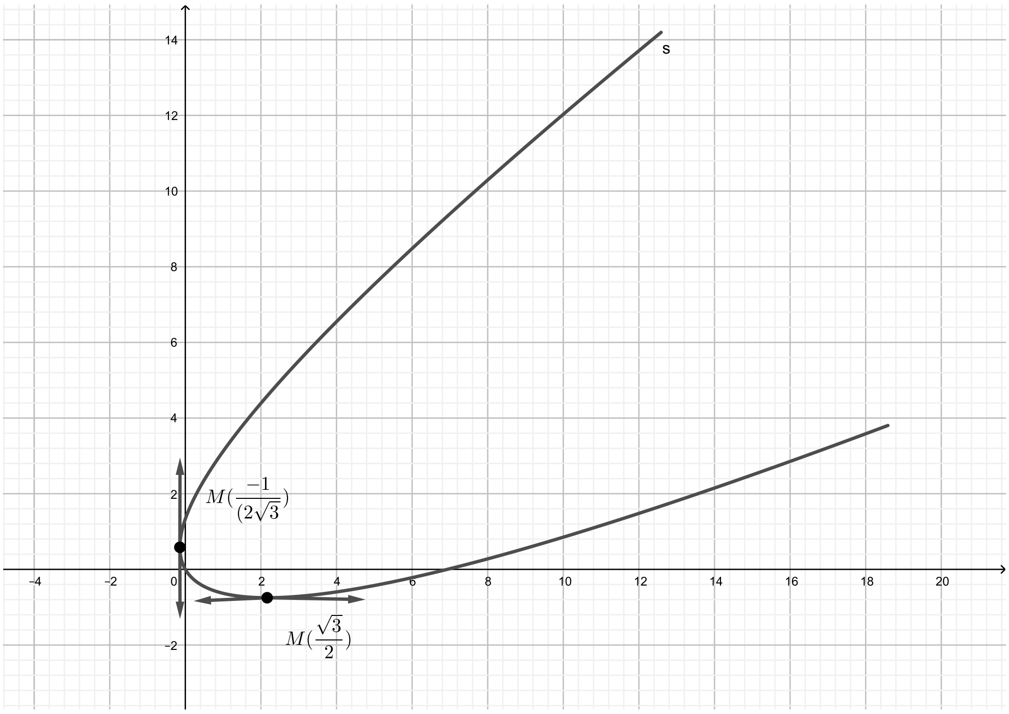
$$\lim_{t\to-\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to-\infty} \frac{t^2 - \sqrt{3}.t}{t + \sqrt{3}.t^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{(limite finie NON nulle)}$$

puis on considère maintenant

$$\lim_{t\to-\infty} y(t) - \frac{1}{\sqrt{3}}x(t) = \lim_{t\to-\infty} -\sqrt{3}t - \frac{1}{\sqrt{3}}t = +\infty$$

On en conclut qu'**il n'y a pas de droite asymptote** mais juste une branche parabolique de direction $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$.

- **Etude de la branche infinie quand $t \to +\infty$**
  Elle porte au même résultat.



remarque:
il est possible de justifier que cette courbe est une parabole, par exemple en effectuant un changement de repère judicieux.

résolution 2

- Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$, et de classe C^∞ sur cet ensemble car ce sont des fonctions polynomiales.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\begin{cases} x(-t) &= -y(t) \\ y(-t) &= -x(t) \end{cases}$.
  Ceci signifie que les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = -x$ (droite appelée encore la deuxième bissectrice).
  On restreint l'intervalle d'étude à $[0, +\infty[$

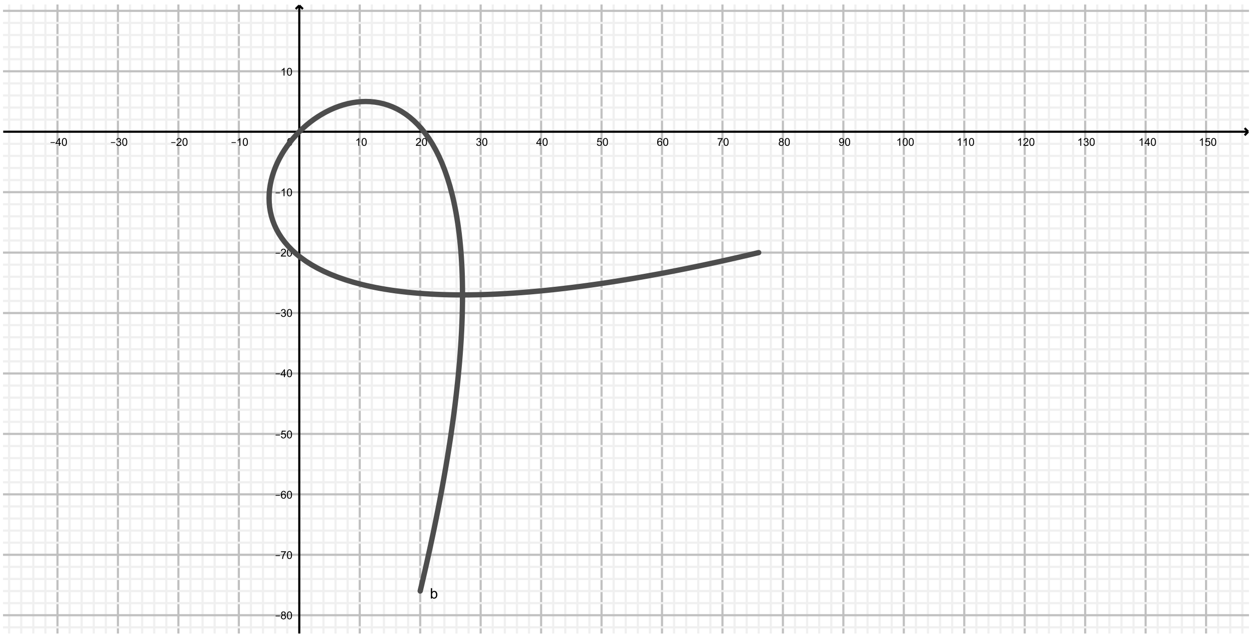
  On étudiera et on tracera la fonction vectorielle sur l'intervalle $[0, +\infty[$ puis pour obtenir toute la courbe on effectuera une symétrie par rapport à la deuxième bissectrice.

- Le calcul des dérivées donne pour tout $t \in \mathbb{R}$:
  $$x'(t) = 3t^2 + 6t - 9 = 3(t+3)(t-1)$$
  et
  $$y'(t) = 3t^2 - 6t - 9 = 3(t+1)(t-3)$$
  Le tableau de variations est simple à écrire:

t	0		1		3		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	0		$+$		
$x(t)$	0	↘	-5	↗	27	↗	$+\infty$
$y(t)$	0	↘	-11	↘	-27	↗	$+\infty$
$y'(t)$			$-$		0	$+$	

  - Il n'y a pas de point stationnaire (bonne nouvelle!)
  - Il y a une branche infinie à étudier quand $t \to +\infty$
  - On a $M(1) = (-5, -11)$ et la tangente y est verticale
  - On a $M(3) = (27, -27)$ et la tangente y est horizontale

- **Etude de la branche infinie lorsque $t \to +\infty$**
  On a
  $$\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^3}{t^3} = 1$$
  On étudie alors
  $$\lim_{t\to+\infty} y(t) - x(t) = \lim_{t\to+\infty} -6t^2 = -\infty$$
  On en conclut qu'**il n'y a pas de droite asymptote** mais juste une branche parabolique de direction $y = x$



Le tracé met en évidence un point double!

On peut observer que le point $M(3) = (27, -27)$ est sur l'axe de symétrie de la courbe…

ce qui signifie que $M(-3) = M(3)$!

…Et l'on a donc trouvé notre point double sans calcul!

résolution 3 • Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$, et de classe C^∞ sur cet ensemble.

- Les fonctions x et y sont π-périodiques: la fonction vectorielle $t \mapsto (x(t),y(t))$ l'est donc aussi. On étudiera et on tracera la courbe sur un intervalle de longueur π, et l'on obtiendra ainsi toute la courbe.

- La fonction x est paire et la fonction y est impaire: **on peut donc réduire l'intervalle d'étude à $[0,\pi/2]$, puis pour obtenir toute la courbe on réalisera une symétrie par rapport à l'axe des abscisses.**

- Le calcul des dérivées donne $\boxed{\forall t \in [0,\pi/2], x'(t) = -2\sin t.\cos t = -\sin(2t)}$

  et
  $$\forall t \in [0,\pi/2], y'(t) = \cos^4 t - 3\cos^2 t.\sin^2 t = 4\cos^4 t - 3\cos^2 t = 4\cos^2 t.(\cos^2 t - \frac{3}{4})$$
  Ainsi
  $$\boxed{\forall t \in [0,\pi/2], y'(t) = 4\cos^2 t.(\cos t + \frac{\sqrt{3}}{2})(\cos t - \frac{\sqrt{3}}{2})}$$
  Il faut toujours factoriser au maximun les dérivées pour ensuite faire une étude simple de signe!

  Le TV est simple à écrire:

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0		$-$		0
$x(t)$	1	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{16}$	$\searrow$	0
$y'(t)$		$+$	0	$-$	0

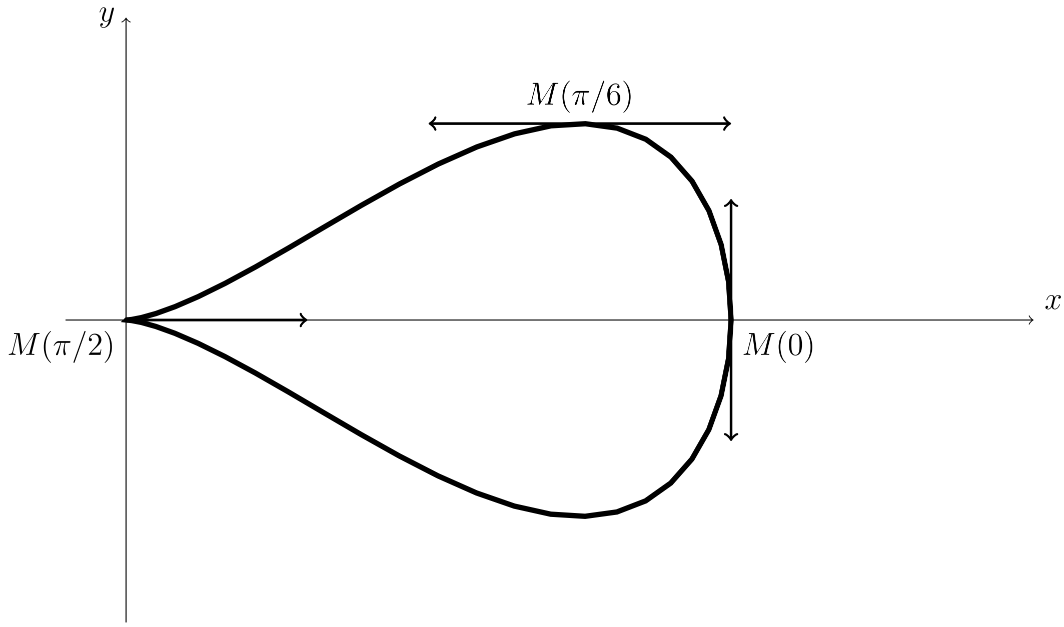
  – Il n'y a pas de branches infinies
  – On note la présence d'un unique point stationnaire $M(t = \pi/2)$
  – On a $M(\pi/6) = \left(\frac{3}{4},\frac{3\sqrt{3}}{16}\right)$ et la tangente y est horizontale
  – On a $M(0) = (1,0)$ est la tangente y est verticale

- **Etude du point stationnaire**
  Le calcul des dérivées secondes donne

$$M''(\pi/2) = (x''(\pi/2), y''(\pi/2)) = (2,0) \neq (0,0)$$

Ainsi la tangente au point $M(\pi/2)$ est dirigée par le vecteur (2,0): c'est une tangente horizontale!

remarque: compte tenu du tableau de variation et de la symétrie pa rapport à (Ox) le point $M(\pi/2)$ est forcément un point de rebroussement de première espèce (pas besoin d'un étude par le calcul!)



résolution 4 • Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}^*$, et de classe C^∞ sur cet ensemble.
Il n'y a pas de symétrie particulière en évidence.

- Le calcul des dérivées donne

$$\boxed{\forall t \neq 0, x'(t) = \frac{2}{t^2}(t^3 - 1) \text{ et } y'(t) = \frac{(t-1)(t+1)}{t^2}}$$

Le TV est simple à écrire:

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x'(t)$			$-$		$\Vert$	$-$	0	$+$	
$x(t)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	$+\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

On note la présence
  - de trois branches infinies à étudier
  - d'un point stationnaire

- **Etude du point stationnaire** $M(1)$
Le calcul des dérivées secondes donne $(x''(1),y''(1)) = (6,2) \neq (0,0)$
$\boxed{\text{Ainsi la tangente au point } M(1) \text{ est dirigée par le vecteur } (6,2), \text{ càd le vecteur } (3,1)}$

Un calcul supplémentaire donne $(x^{(3)}(1),y^{(3)}(1)) = (-12,-6)$.
Comme ce vecteur n'est pas colinéaire au vecteur (6,2), on arrête de calculer des dérivées et on écrit le DL

$$\begin{aligned} M(t) &= M(1) + (t-1)M'(1) + \frac{(t-1)^2}{2!}M''(1) + \frac{(t-1)^3}{3!}M^{(3)}(1) + o((t-1)^3) \\ &= M(1) + (t-1)^2(3,1) + (t-1)^3(-2,-1) + o((t-1)^3) \end{aligned}$$

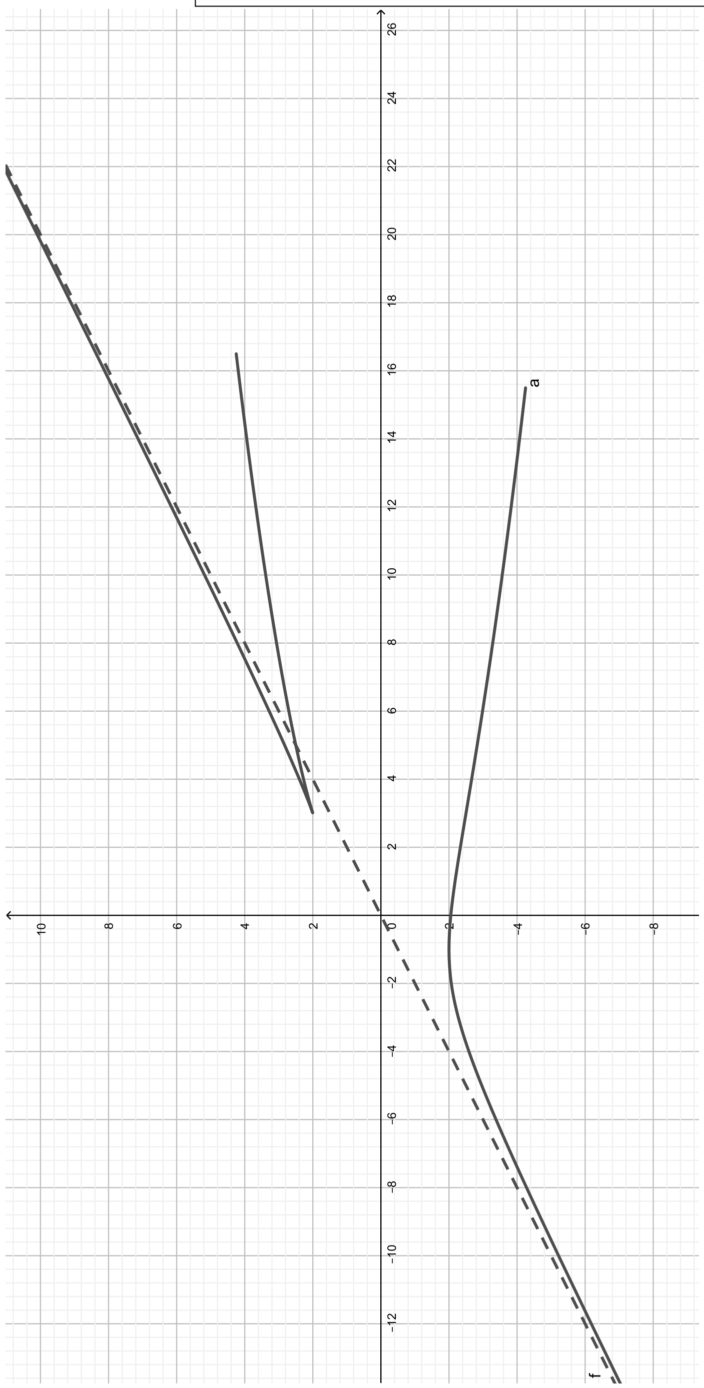
Puis on fait un petit dessin comme on l'a fait dans le cours
et on conclut que $\underline{M(1) \text{ est un point de rebroussement de première espèce}}$.

- **Etude de la branche infinie quand** $t \to +\infty$ **ou** $t \to -\infty$
On a

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{t^2+1}{t^3+2} = 0$$

Il y a donc $\boxed{\text{une branche parabolique de direction } (Ox)}$ (mais pas de droite asymptote)

- **Etude de la branche infinie quand** $t \to 0$ *(pas besoin de distinguer* 0^+ *et* 0^- *car les limites sont identiques)*
  On a
  $$\lim_{t\to 0} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2+1}{t^3+2} = \frac{1}{2} \qquad \text{(limite finie NON nulle)}$$
  On considère donc
  $$\lim_{t\to 0} y(t) - \frac{1}{2}x(t) = \lim_{t\to 0} t - \frac{t^2}{2} = 0$$
  Il y a donc $\boxed{\text{une droite asymptote oblique d'équation } y = \frac{x}{2}}$



résolution 5 • Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}^*$, et de classe C^∞ sur cet ensemble.

il n'y a pas de symétrie particulière en évidence.

- Le calcul des dérivées donne

$$\boxed{\forall t \neq 0, x'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} > 0 \quad \text{et} \quad y'(t) = \frac{-1}{t^2}.\exp(1/t) < 0}$$

Le TV est simple à écrire:

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$x'(t)$	$+$	‖	$+$
$x(t)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$
$y(t)$	$1 \searrow 0$	‖	$+\infty \searrow 1$
$y'(t)$	$-$	‖	$-$

Il n'y a pas de points stationnaires mais 4 branches infinies à étudier

- **"Etude" de la branche infinie quand $t \to -\infty$**
  On a $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} y(t) = 1$
  Il y a donc $\boxed{\text{une droite asymptote horizontale d'équation } y = 1}$

- **"Etude" de la branche infinie quand $t \to +\infty$**
  On a $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 1$
  Il y a donc $\boxed{\text{une droite asymptote horizontale d'équation } y = 1}$

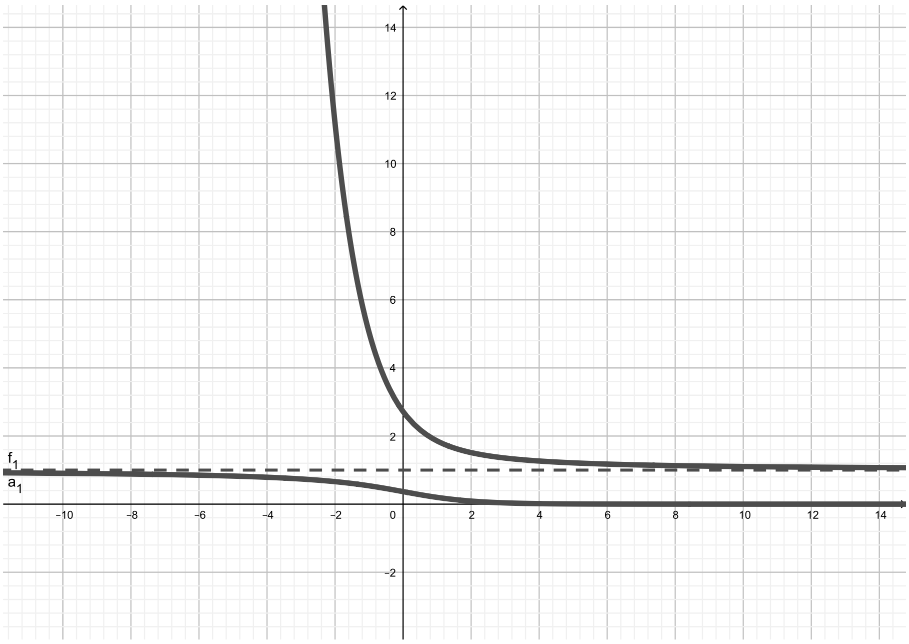
- **Etude de la branche infinie quand $t \to 0^-$**
  On a $\lim\limits_{t\to0^-} x(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to0^-} y(t) = 0$
  Il y a donc $\boxed{\text{une droite asymptote horizontale d'équation } y = 0}$

- **Etude de la branche infinie quand $t \to 0^+$**
  On a $\lim\limits_{t\to0^+} x(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to0^+} y(t) = +\infty$
  On forme, pour $t > 0$, le quotient

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t.\exp(1/t)}{t^2-1} = \frac{\exp(1/t + \ln(t))}{t^2-1} = \frac{\exp\left(\dfrac{1}{t}(1 - t\ln(t))\right)}{t^2-1}$$

Comme on sait que $\lim\limits_{t\to0^+} t\ln(t) = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{t\to0^+} \dfrac{y(t)}{x(t)} = -\infty$

Il y a donc $\boxed{\text{une branche parabolique de direction } (Oy)}$ (mais pas de droite asymptote)



f1
a1

résolution 6 • La fonction x n'est pas définie pour $3t \equiv \pi/2[\pi]$ càd $t \equiv \pi/6[\pi/3]$

La fonction y n'est pas définie pour $2t \equiv 0[\pi]$ càd $t \equiv 0[\pi/2]$

- La fonction x est $\dfrac{2\pi}{3}$-périodique et la fonction y est π-périodique.
  La fonction vectorielle $t \mapsto M(t) = (x(t),y(t))$ est donc 2π-périodique.
  On étudie et on trace la fonction sur un intervalle de longueur 2π et l'on obtient ainsi toute la courbe.

- La fonction x est paire et la fonction y est impaire: **on étudie la fonction vectorielle sur l'intervalle $[0,\pi]$, on la représente sur cet intervalle puis on effectue une symétrie par rapport à l'axe des abscisses.**

- On a

$$\forall t \in [0,\pi], \begin{cases} x(\pi - t) & = -x(t) \\ y(\pi - t) & = -y(t) \end{cases}$$

On va donc restreindre encore notre intervalle d'étude à $[0,\pi/2]$, représenter la courbe sur cet intervalle puis effectuer une symétrie par rapport au point O.

- Les fonctions x et y sont de classe C^∞ sur leur ensemble de définition et l'on a

$$\boxed{x'(t) = \frac{3\sin(3t)}{(\cos(3t))^2} \qquad \text{et} \qquad y'(t) = \frac{-2\cos(2t)}{(\sin(2t))^2}}$$

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$		$+$	‖		$+$		0	$-$	
$x(t)$	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-\sqrt{2}$	↗	-1	↘	$-\infty$
$y(t)$	‖ $+\infty$	↘	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	↘	1	↗	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	↗	$+\infty$
$y'(t)$			$-$		0	$+$			

- Il n'y a pas de point stationnaire.
- Il y a une droite asymptote verticale d'équation $x = 1$
- Il y a une droite asymptote horizontale d'équation $y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$
- Il y a une branche infinie quand $t \to \dfrac{\pi}{2}^-$ que l'on doit étudier.

- **Etude de la branche infinie quand** $t \to \dfrac{\pi}{2}^-$

  On pose $t = \dfrac{\pi}{2} + h$ et l'on a

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\cos(3t)}{\sin(2t)} = \frac{\cos(3h + 3\pi/2)}{\sin(2h + \pi)} = \frac{\sin(3h)}{-\sin(2h)} \sim \frac{3h}{-2h} = \frac{-3}{2}$$

  Ainsi

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{-3}{2} \qquad \text{limite finie NON nulle}$$

  On considère

$$y(t) + \frac{3}{2}x(t) = \cdots = \frac{3\sin(2h) - 2\sin(3h)}{2\sin(2h)\sin(3h)}$$

  On a

$$2\sin(2h)\sin(3h) \sim 2.(2h)(3h) = 12h^2$$

  et

$$3\sin(2h) - 2\sin(3h) = 3(2h - (2h)^3/6 + o(h^3)) - 2(3h - (3h)^3/6 + o(h^3) = 5h^3 + o(h^3) \sim 5h^3$$

  On trouve que

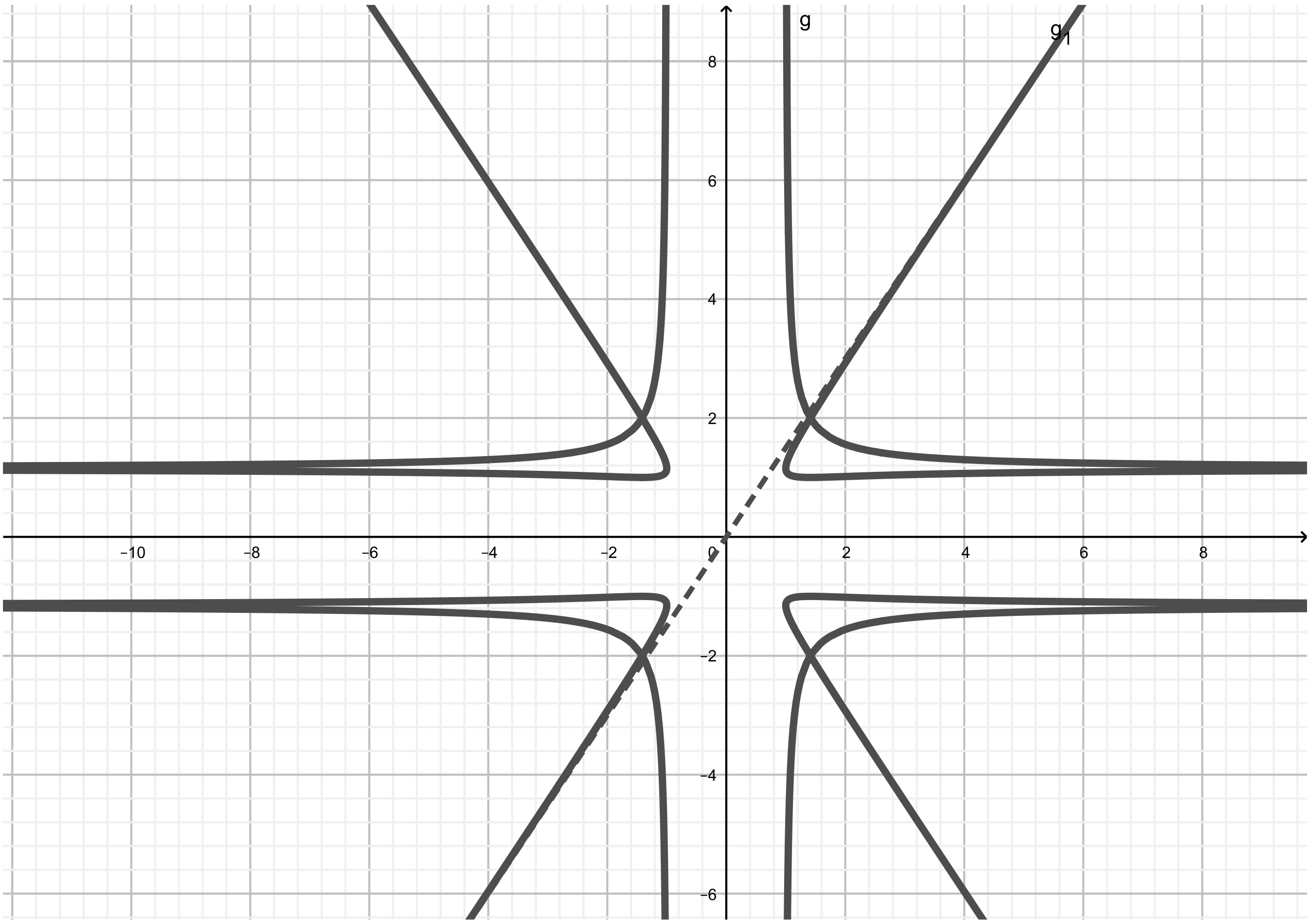
$$y(t) + \frac{3}{2}x(t) \sim \frac{5h}{12}$$

  et ainsi que

$$\lim_{t \to \pi/2^-} y(t) + \frac{3}{2}x(t) = 0$$

$$\boxed{\text{La droite d'équation } y + \frac{3}{2}x = 0 \text{ est droite asymptote oblique à la courbe.}}$$

  On peut même indiquer que pour $t \to \dfrac{\pi}{2}^-$, on a $h \to 0^-$ et donc $\dfrac{5h}{12}$ est négatif. La courbe est située en-dessous de cette droite asymptote lorsque $t \to \dfrac{\pi}{2}^-$


g
g1
8
6
4
2
-2
-4
-6
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

résolution 7 • Les fonctions x et y sont définies et de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$

Il n'y a pas de symétrie particulière en évidence (quoique…)

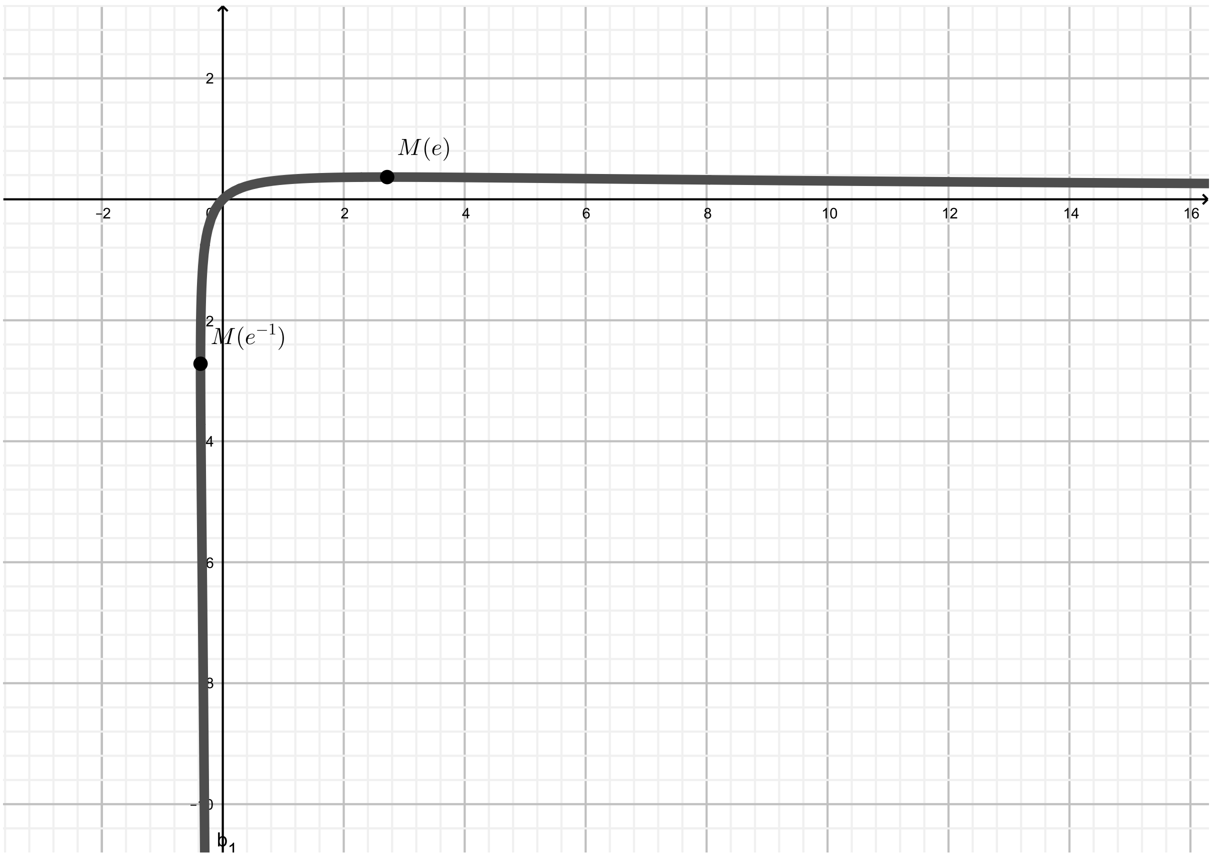
- Le calcul des dérivées donne

$$\boxed{\forall t>0, x'(t)=1+\ln(t) \qquad \text{et} \qquad y'(t)=\frac{1-\ln(t)}{t^2}}$$

Le tableau de variations est simple à écrire:

t	0		e^{-1}		e		$+\infty$
$x'(t)$	$\|$	$-$	0		$+$		
$x(t)$	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-e$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0
$y'(t)$	$\|$		$+$		0	$-$	

- Il n'y a pas de point stationnaire !
- L'axe des abscisses est droite asymptote horizontale à la courbe car $\begin{cases} x(t) & \longrightarrow +\infty \\ y(t) & \longrightarrow 0 \end{cases}$ lorsque $t\to+\infty$
- L'axe des ordonnées est droite asymptote verticale à la courbe car $\begin{cases} x(t) & \longrightarrow 0 \\ y(t) & \longrightarrow -\infty \end{cases}$ lorsque $t\to 0^+$
- On a $M(e^{-1})=(-e^{-1},-e)$ et la tangente y est verticale
- On a $M(e)=(e,e^{-1})$ et la tangente y est horizontale



$M(e)$
$M(e^{-1})$

résolution 8 • Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$, et de classe C^∞ sur cet ensemble car ce sont des fonctions polynomiales.

Il n'y a pas de symétrie particulière en évidence

• Le calcul et la factorisation des dérivées donnent

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, x'(t) = (t-1)(3t+1) \qquad \text{et} \qquad y'(t) = 2(t-1)^2(2t+1)}$$

Sous cette forme, le tableau de variations est aisé à écrire

t	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		$\frac{-1}{3}$		1		$+\infty$
$x'(t)$			$+$		0	$-$	0	$+$	
$x(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{9}{8}$	$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{27}{16}$	$\nearrow$	$-\frac{128}{81}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$-$	0		$+$		0	$+$	

– Il y a un point stationnaire, le point $M(1)$

– On a $M(-1/2) = (9/8, -27/16)$ et la tangente y est horizontale

– On a $M(-1/3) = (32/27, -128/81)$ et la tangente y est verticale

– Il y a deux branches infinies à étudier (quand $t \to +\infty$ et quand $t \to -\infty$

• **Etude de la branche infinie quand $t \to +\infty$**
On a

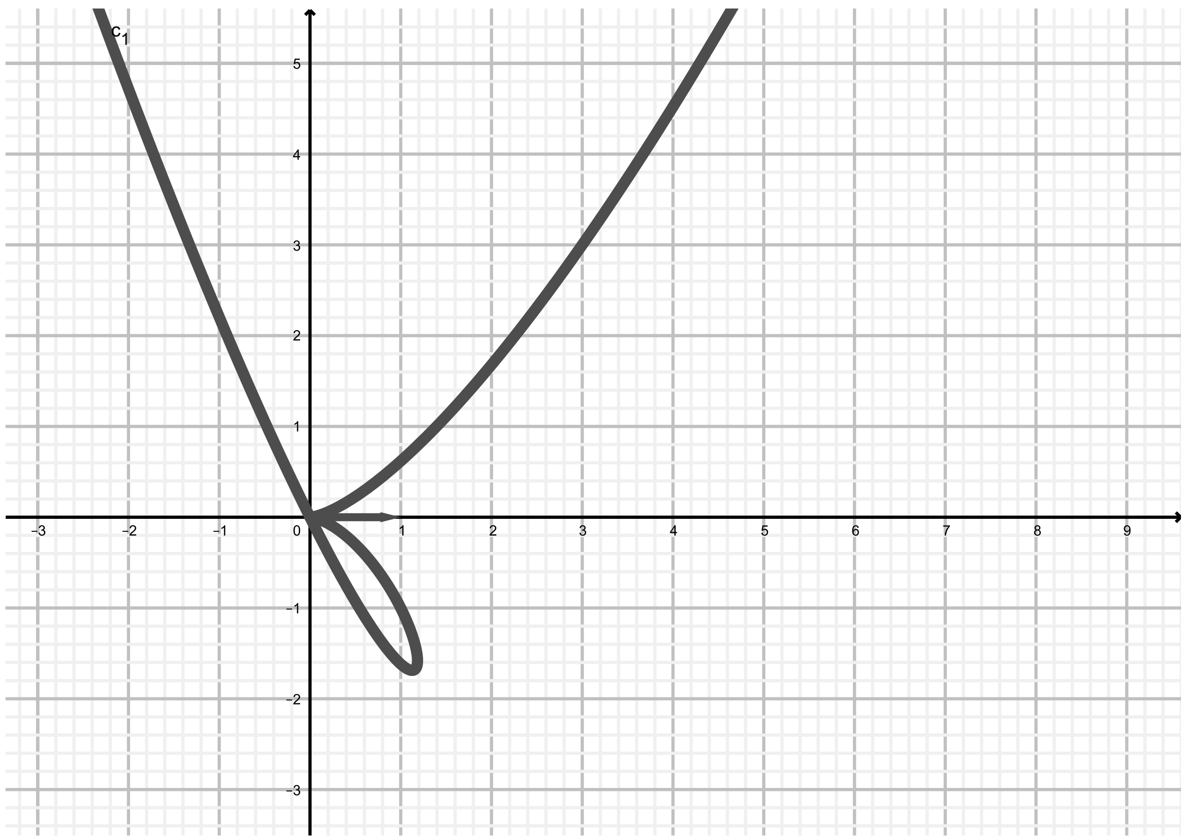
$$\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to+\infty} t - 1 = +\infty$$

Il n'y a donc pas de droite asymptote à la courbe, mais seulement une branche parabolique de direction (Oy)

rem: on trouve bien le même résultat quand $t \to -\infty$

- **Etude du point stationnaire** $M(1)$
  On pose $1+h$.
  On a
$$x(t) = x(1+h) = (2+h).h^2 = 2h^2 + h^3 = 0 + 2h^2 + h^3 + o(h^3)$$
  et
$$y(t) = y(1+h) = (2+h).h^3 = 2h^3 + h^4 = 0 + 2h^3 + o(h^3)$$
  Ce que l'on écrit vectoriellement
$$M(t) = M(1) + h^2.\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + h^3.\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix} + o(h^3)$$
  On fait un petit dessin comme on l'a fait dans le cours
  et on conclut que
  i) la tangente au point $M(1)$ est dirigé par le vecteur (2,0)

  ii) $M(1)$ est un point de rebroussement de première espèce



résolution 9 • Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}^*$ et sont C^∞ sur cet ensemble.

Il n'y a pas de symétrie particulière en évidence.

- Le calcul des dérivées donne

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, x'(t) = 2.\frac{t-1}{t^3} \qquad \text{et} \qquad y'(t) = \frac{(t-1)(t+1)}{2t^2}.\exp\left[\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t})\right]$$

Le tableau de variations est simple à écrire

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x'(t)$			$+$		‖	$-$	0	$+$	
$x(t)$	0	$\nearrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0 ‖ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

- Il y a un point stationnaire: le point $M(1)$
- Il y a un point limite lorsque $t \to -\infty$
- L'axe des abscisses est une droite asymptote à la courbe car $\begin{cases} x(t) \to & +\infty \\ y(t) \to & 0 \end{cases}$ lorsque $t \to 0^-$
- L'axe des ordonnées est une droite asymptote à la courbe car $\begin{cases} x(t) \to & 0 \\ y(t) \to & +\infty \end{cases}$ lorsque $t \to +\infty$
- Il y a une branche infinie à étudier: quand $t \to 0^+$

- **Etude du point limite quand $t \to -\infty$**
Lorsque $t \to -\infty$, le point $M(t)$ se rapproche du point O.
Etudions avec quelle demi-tangente: pour cela on considère

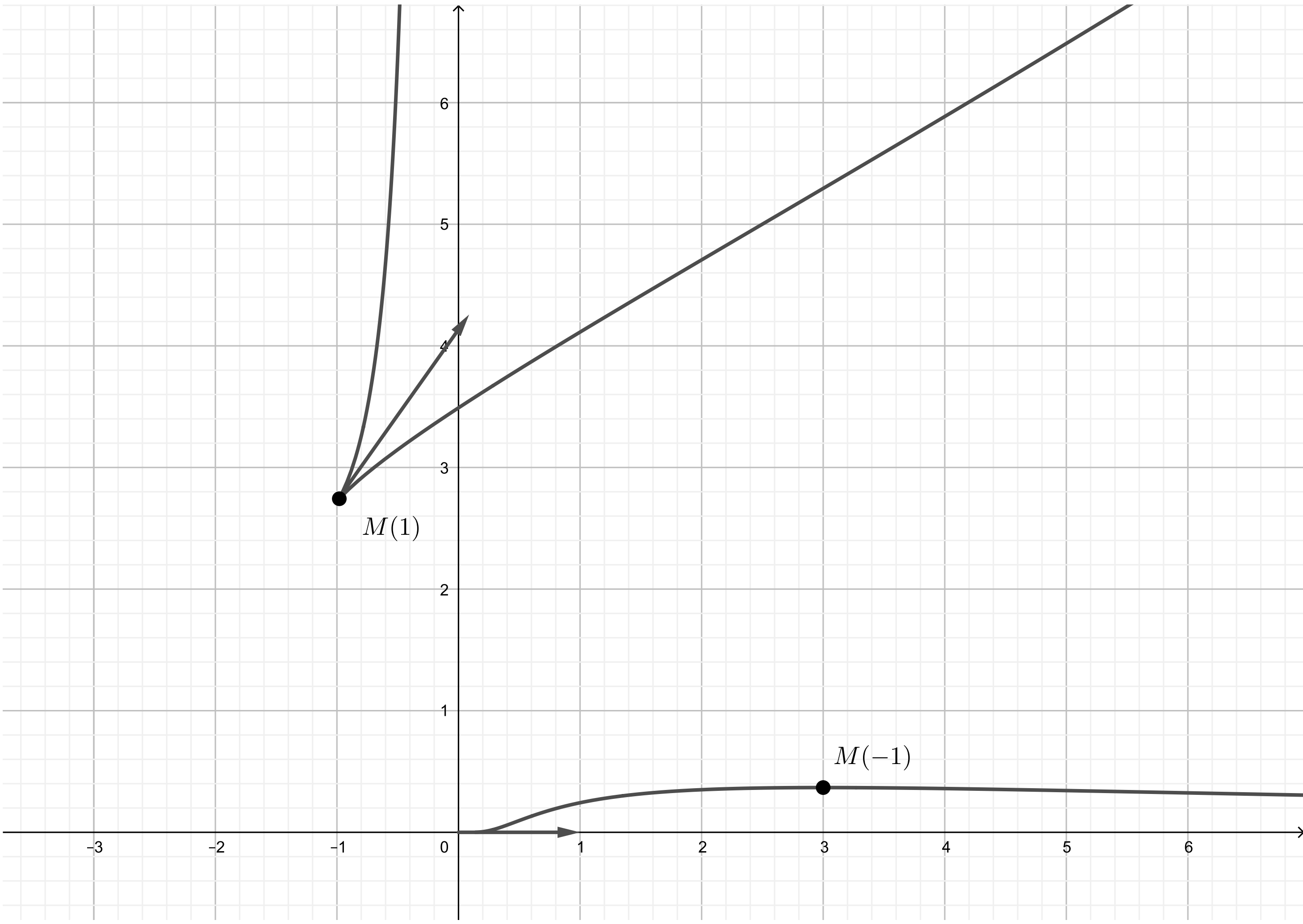
$$\lim_{t\to-\infty} \frac{y(t)-0}{x(t)-0} = \lim_{t\to-\infty} \frac{t^2}{1-2t}.\exp\left[\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t})\right] = 0 \quad \text{d'après TCC}$$

On en déduit qu'**il existe une demi-tangente horizontale au point limite O**

- **Etude de la branche infinie quand** $t \to 0^+$
  On a
  $$\lim_{t\to0^+} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to0^+} \frac{t^2}{1-2t}.\exp\left[\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t})\right] = +\infty \quad \text{d'après TCC}$$
  On en déduit qu'**il n'y a pas de droite asymptote, mais juste une branche parabolique de direction** (Oy)

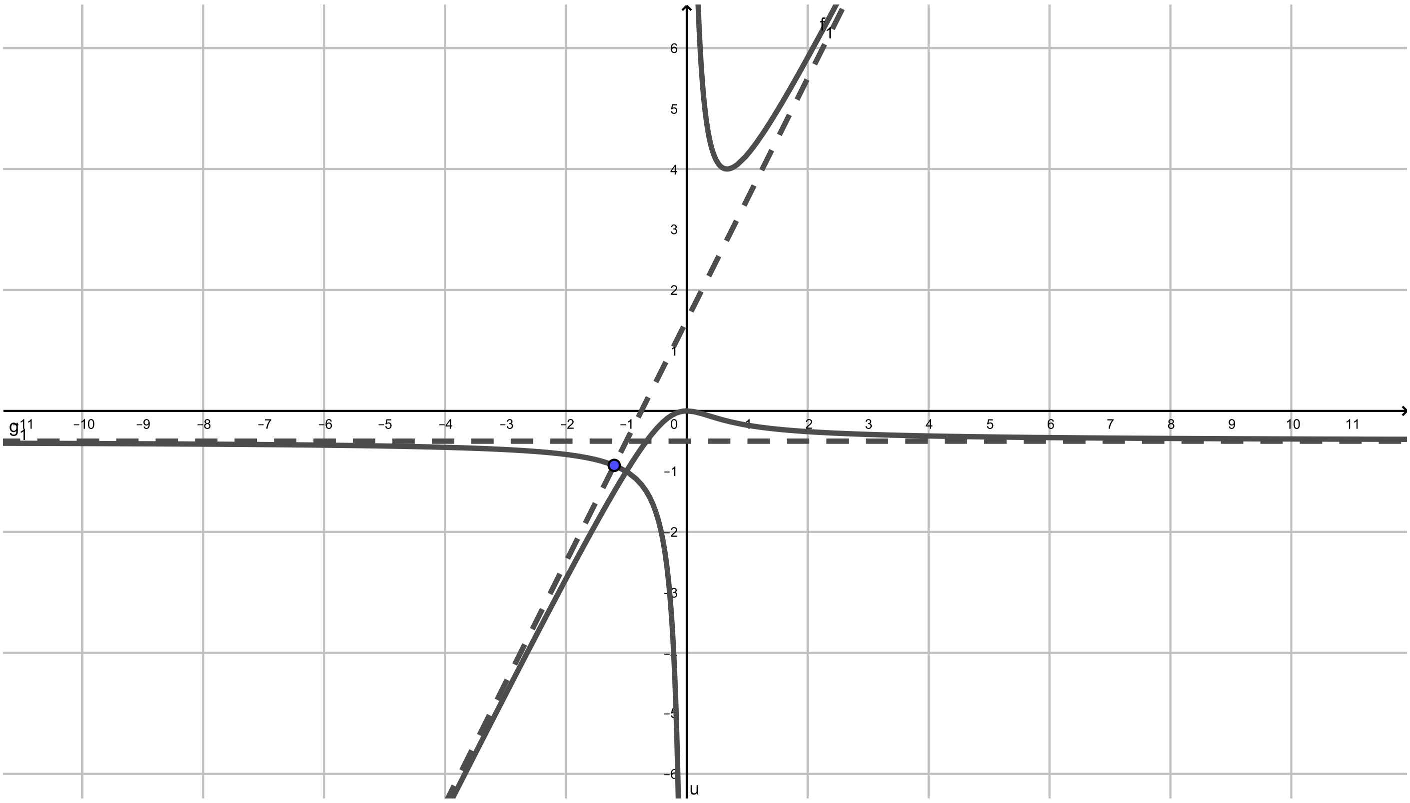
- **Etude du point stationnaire** $M(1)$
  On pose $t = 1+h$ et on effectue les DLs...
  On trouve
  $$x(t) = x(1+h) = \cdots = -1 + h^2 - 2h^3 + o(h^3)$$
  et
  $$y(t) = y(1+h) = \cdots = e\left(1 + \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{2} + o(h^3)\right)$$
  On écrit le DL vectoriellement
  $$\begin{aligned} M(t) = M(1+h) &= \begin{pmatrix}-1\\ e\end{pmatrix} + h^2.\underbrace{\begin{pmatrix}1\\ e/2\end{pmatrix}}_{\vec{I}} + h^3\underbrace{\begin{pmatrix}-2\\ -e/2\end{pmatrix}}_{\vec{J}} + o(h^3) \\ &= M(1) + h^2.\vec{I} + h^3.\vec{J} + o(h^3)\end{aligned}$$
  Les vecteurs $\vec{I}$ et $\vec{J}$ ne sont pas colinéaires: on fait un petit dessin comme dans le cours et on peut conclure que
  i) **La tangente au point** $M(1)$ **est dirigée par le vecteur** $\vec{I} = (1{,}e/2)$

  ii) **le point** $M(1)$ **est un point de rebroussement de 1ère espèce.**


$M(1)$
$M(-1)$

résolution 10 •

t	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	$\Vert$		$-$		$\Vert$		$-$		
$x(t)$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$2/3$	$\searrow$	0
$y(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-1/2$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$			$+$		0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	



résolution 11

- Les fonctions x et y sont définies et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

- la fonction x est $2\pi-$périodique et la fonction y est $\pi-$périodique.
  La fonction vectorielle $t \mapsto M(t) = (x(t),y(t))$ est donc $2\pi-$périodique.
  On étudie et on trace la courbe sur un intervalle de longueur 2π et l'on obtient toute la courbe

- La fonction x est paire et la fonction y est impaire: **on étudie la fonction vectorielle sur l'intervalle $[0,\pi]$, on la représente sur cet intervalle puis on effectue une symétrie par rapport à l'axe des abscisses.**

- On a pour tout $t \in [0,\pi]$

$$x'(t) = \sqrt{2}.\sin(t).\left(\cos(t) - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad y'(t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos(2t)$$

  Sous cette forme, le signe des dérivées est simple à établir.
  On obtient ainsi

t	0		$\pi/4$		$3\pi/4$		$+\infty$
$x'(t)$	0	$+$	0		$-$		0
$x(t)$	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{2}}{4}$	$\searrow$	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0
$y'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

  - Il y a un point stationnaire: le point $M(\pi/4)$

  - Il n'y a pas de branches infinies

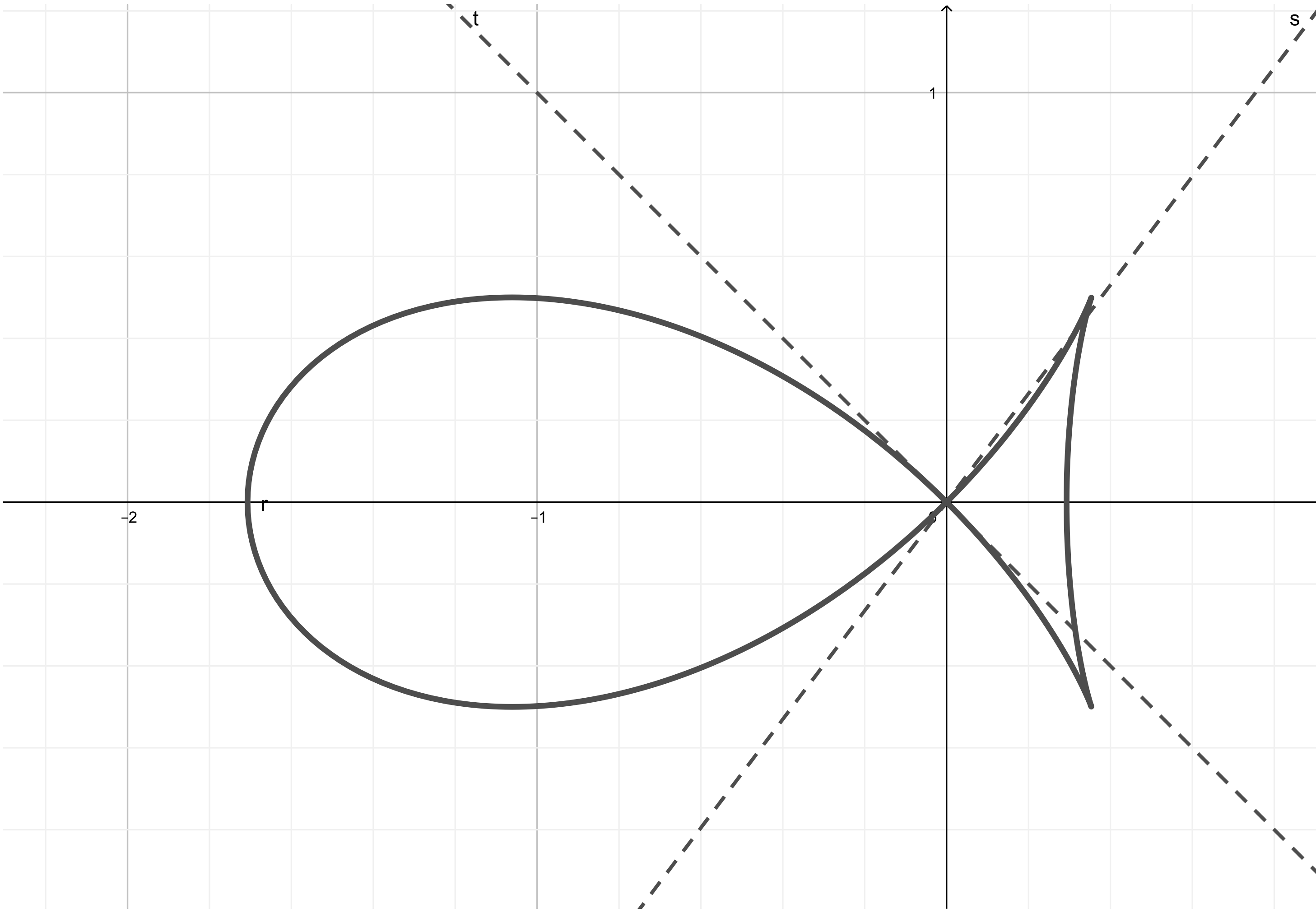
- **Etude du point stationnaire** $M(\pi/4)$
  On effectue un DL de x et de y au voisinage de $\pi/4$ en posant $t = \pi/4 + h$, et on trouve
  i) $x(t) = x(\pi/4 + h) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(1 - h^2 - h^3) + o(h^3)$
  ii) $y(t) = y(\pi/4 + h) = \dfrac{1}{2} - h^2 + o(h^2)$
  Ce que l'on écrit vectoriellement

$$\begin{aligned} M(t) = M(\pi/4 + h) &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + h^2 \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ -1 \end{pmatrix}}_{=\vec{I}} + h^3 \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\vec{J}} + o(h^3) \\ &= M(\pi/4) + h^2.\vec{I} + h^3.\vec{J} + o(h^3) \end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{I}$ et $\overrightarrow{J}$ ne sont pas colinéaires: on fait un petit dessin comme dans le cours et on peut conclure que

i) **La tangente au point $M(1)$ est dirigée par le vecteur $\vec{I} = (-\sqrt{2}/4, -1)$**

ii) **le point $M(1)$ est un point de rebroussement de 1ère espèce.**



remarque pour Léo: ceci n'est pas un poisson d'avril...

- **Etude du point double**

Par symétrie, le point double est nécessairement sur l'axe des ordonées. Or $y(\pi/2) = 0$.

On a ainsi $M(+\pi/2) = M(-\pi/2)$: c'est bien notre point double!

- La tangente au point $M(+\pi/2)$ est dirigée par le vecteur $M'(\pi/2) = (-1, -1)$.
- La tangente au point $M(+\pi/2)$ est dirigée par le vecteur $M'(\pi/2) = (+1, -1)$.
- Comme le produit scalaire de ces deux vecteurs est nul, on en déduit que **les tangentes au point double sont perpendiculaires !**

résolution 12

- Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$, et de classe C^∞ sur cet ensemble.

- La fonction x est impaire et la fonction y est paire: on peut donc réduire l'intervalle d'étude à $[0,+\infty[$, puis pour obtenir toute la courbe on réalisera une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

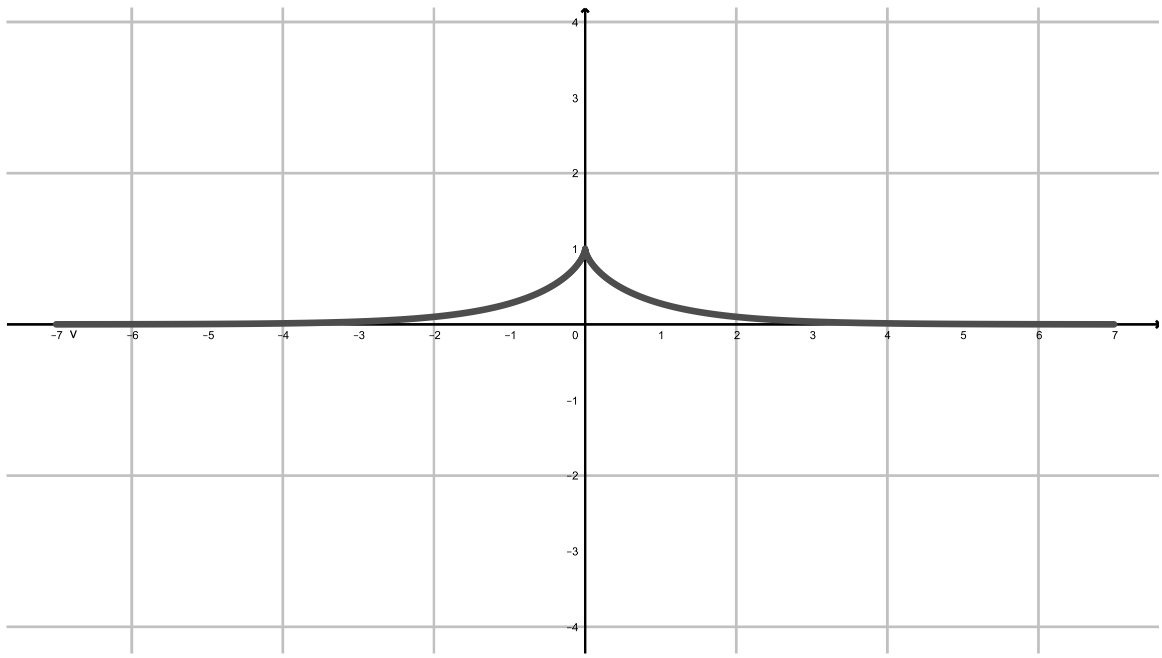
- Le calcul des dérivées donne $\boxed{\forall t \geqslant 0, x'(t) = th^2(t) \geqslant 0}$ et $\boxed{\forall t \geqslant 0, x'(t) = \dfrac{-\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}^2(t)} \leqslant 0}$

  Le TV est simple à écrire:

t	0		$+\infty$
$x'(t)$	0	$+$	
$x(t)$	0	$\nearrow$	∞
$y(t)$	1	$\searrow$	0
$y'(t)$	0	$-$	

  - Il y a un point stationnaire: le point $M(0)$
  - Il y a une branche infinie: une droite asymptote horizontale d'équation $y = 0$

- **Etude du point stationnaire**
  Le calcul des dérivées secondes donne $M''(0) = (x''(0), y''(0)) = (0, -1)$
  Il y a une tangente verticale au point $M(0)$



- Rappel
  - sur $\mathbb{R}$ on a $th' = \left(\dfrac{\text{sh}}{\text{ch}}\right)' = \dfrac{\text{ch}^2 - \text{sh}^2}{\text{ch}^2} = \dfrac{1}{\text{ch}^2} = 1 - th^2$
  - pour tout réel t on a $|th(t)| < 1$ car par inégalité triangulaire

$$|\operatorname{sh}(t)| = \left|\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right| \leqslant \left|\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right| = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \operatorname{ch}(t)$$

On peut préciser que ci-dessus l'égalité est impossible car elle se produirait uniquement si $e^t = 0$ ou $e^{-t} = 0$ ce qui est impossible!

$\boxed{\textbf{résolution 13}}$