
bases

exercice 1

Soit $E = \{aX^2 + (3b - a)X + (a + b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$
Déterminer une famille génératrice de E .

exercice 2

Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y = 0\}$ et $E' = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 3y = 0\}$
Déterminer une famille génératrice de E et une de E' .

exercice 3 (*)

Déterminer une base de $F = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a + 2b = 0\}$

exercice 4 (*)

Déterminer une base de $F = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + 2b = 0\}$

exercice 5 (*)

Déterminer une base de $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\}$

exercice 6 (*)

Déterminer une base de $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$

exercice 7 (*)

On note F le sev engendré par les vecteurs $e_1 = (1, 2, 1, 0)$ $e_2 = (2, -1, 1, 1)$ et $e_3 = (-1, 8, 1, -2)$
Déterminer une base de F .

exercice 8 (**)

On note F le sev engendré par les 5 vecteurs suivants

$$e_1 = (1, 1, 1, 1) \quad e_2 = (1, 2, 1, 0) \quad e_3 = (0, -1, 1, 1) \quad e_4 = (2, 2, 3, 2) \quad e_5 = (-0, 2, -1, -2)$$

Déterminer une base de F

exercice 9 (***)

On considère les 3 fonctions suivantes

$$\begin{array}{lll} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos(x) & x \longmapsto \cos(2x) & x \longmapsto \cos(3x) \end{array}$$

Déterminer une base de F , le sev engendré par (f, g, h)

exercice 10 (***)

On considère les 3 fonctions suivantes

$$\begin{array}{lll} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos(2x) & x \longmapsto \sin(2x) & x \longmapsto \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \end{array}$$

Déterminer une base de F , le sev engendré par (f, g, h)

exercice 11

|

exercice 12

|

Solutions

résolution 1 Il suffit d'écrire:

$$E = \{aX^2 + (3b-a)X + (a+b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \{a(X^2 - X) + b(3X + 1) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{vect}(X^2 - X, 3X + 1)$$

Une famille génératrice de E est donc $(X^2 - X, 3X + 1)$

résolution 2 – $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -3y\} = \{(-3y,y,z) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$

Ainsi

$$E = \{y(-3,1,0) + z(0,0,1) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{vect}((-3,1,0), (0,0,1))$$

– $E' = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 3y = 0\} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = -3y\} = \{(-3y,y,z,t) \mid (y,z,t) \in \mathbb{R}^3\}$

Ainsi

$$E' = \{y(-3,1,0,0) + z(0,0,1,0) + t(0,0,0,1) \mid (y,z,t) \in \mathbb{R}^3\} = \text{vect}((-3,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1))$$

rem: E et E' sont des hyperplans: on verra cette année un théorème qui nous permet de donner directement la dimension de ces espaces

résolution 3 – On a

$$\begin{aligned} F &= \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a + 2b = 0\} \\ &= \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a = -2b\} \\ &= \{(-2b,b) \mid b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{b(-2,1) \mid b \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{vect}((-2,1)) \end{aligned}$$

– F est donc la droite vectorielle dirigée par le vecteur $(-2,1)$

résolution 4

– On a

$$\begin{aligned} F &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + 2b = 0\} \\ &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = -2b\} \\ &= \{(-2b,b,c) \mid (b,c) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{b(-2,1,0) + c(0,0,1) \mid (b,c) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{vect}((-2,1,0), (0,0,1)) \end{aligned}$$

Ainsi F est le sev engendré par les vecteurs $(-2,1,0)$ et $(0,0,1)$

- Les deux vecteurs précédents étant clairement non colinéaires, on peut affirmer qu'ils constituent une famille libre.

F est donc un sev qui a pour base $((-2,1,0), (0,0,1))$

F est ainsi un plan vectoriel

résolution 5

– On a

$$\begin{aligned} F &= \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\} \\ &= \{aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X] \mid a + b + c = 0\} \\ &= \{aX^2 + bX + c \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } c = -a - b\} \\ &= \{aX^2 + bX - a - b \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{a(X^2 - 1) + b(X - 1) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{vect}(X^2 - 1, X - 1) \end{aligned}$$

Ainsi F est le sev engendré par les polynômes $X^2 - 1$ et $X - 1$.

– La famille $(X^2 - 1, X - 1)$ est une famille libre car *c'est une famille de polynômes de degrés distincts deux à deux et ne contenant pas le polynôme nul.* (argument classique à connaître)

On en déduit que $\boxed{(X^2 - 1, X - 1)}$ est une base de F

résolution 6

– On a

$$\begin{aligned} F &= \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\} \\ &= \{aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X] \mid a + b + c + d = 0\} \\ &= \{aX^3 + bX^2 + cX + d \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \text{ et } d = -a - b - c\} \\ &= \{aX^3 + bX^2 + cX - a - b - c \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{a(X^3 - 1) + b(X^2 - 1) + c(X - 1) \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \text{vect}(X^3 - 1, X^2 - 1, X - 1) \end{aligned}$$

Ainsi F est le sev qui a pour famille génératrice $(X^3 - 1, X^2 - 1, X - 1)$

– La famille $(X^3 - 1, X^2 - 1, X - 1)$ est une famille libre car *c'est une famille de polynômes de degrés distincts deux à deux et ne contenant pas le polynôme nul.* (argument classique à connaître)

On en déduit que $\boxed{(X^3 - 1, X^2 - 1, X - 1)}$ est une base de F

résolution 7

– Par définition, (e_1, e_2, e_3) est une famille génératrice de F .

– Etudions si cette famille est libre.

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a.e_1 + b.e_2 + c.e_3 = 0$

on a ainsi

$$a(1, 2, 1, 0) + b(2, -1, 1, 1) + c(-1, 8, 1, -2) = 0$$

ce qui aboutit au système
$$\begin{cases} a + 2b - c & = 0 \\ 2a - b + 8c & = 0 \\ a + b + c & = 0 \\ b - 2c & = 0 \end{cases}$$

dont la résolution donne
$$\begin{cases} a & = -3c \\ b & = 2c \end{cases}$$

Ce calcul montre que:

i) *la famille (e_1, e_2, e_3) n'est pas libre* (car on n'aboutit pas à $a = b = c = 0$)

ii) *e_3 est combinaison linéaire de e_1 et e_2 .*

En effet, en prenant $c = 1$ et donc $(a, b) = (-3, 2)$

cela donne $-3e_1 + 2e_2 + e_3 = 0$, c'est-à-dire $e_3 = 3e_1 - 2e_2$

– La famille (e_1, e_2) est clairement une famille libre car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

Conclusion (e_1, e_2) est une base de F

résolution 8

– On sait $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ est une famille génératrice de F

- **première solution:** on effectue des transformations élémentaires sur *les colonnes* de la matrice de la famille de vecteurs.

On considère donc la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

En effectuant les transformations $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_4 \leftarrow C_4 - 2C_1$, on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Puis en effectuant $C_3 \leftarrow C_3 + C_2$ et $C_5 \leftarrow C_5 - 2C_3$, on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Enfin, on effectue $C_4 \leftarrow C_4 - C_3$ et $C_5 \leftarrow C_5 + C_3$, et cela donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en conclut donc que $\boxed{((1,1,1,1), (0,1,0, -1), (0,0,1,0))}$ est une base de F

- **seconde solution:**

On considère la combinaison linéaire $a.e_1 + b.e_2 + c.e_3 + d.e_4 + f.e_5 = 0$ (*) avec $(a,b,c,d,f) \in \mathbb{R}^5$
Ce qui donne le système

$$\begin{cases} a + b + 2d & = 0 \\ a + 2b - c + 2d + 2f & = 0 \\ a + b + c + 3d - f & = 0 \\ a + c + 2d - 2f & = 0 \end{cases}$$

dont la résolution, que je ne détaille pas ici, donne

$$\begin{cases} a & = -d + f \\ b & = -d - f \\ c & = d - f \end{cases}$$

A partir de là on peut en déduire successivement que

- a) e_4 est une combinaison linéaire de (e_1, e_2, e_3) .

En effet, pour $d = -1$ et $f = 0$ (et donc $a = b = 1$ et $c = -1$), on a $e_1 + e_2 - e_3 - e_4 = 0$,
soit $e_4 = e_1 + e_2 - e_3$

b) e_5 est une combinaison linéaire de (e_1, e_2, e_3) .

En effet, pour $d = 0$ et $f = -1$ (et donc $a = -1$ et $b = c = 1$), on a $-e_1 + e_2 + e_3 - e_4 = 0$,
soit $e_4 = e_1 - e_2 - e_3$

c) A ce niveau, on sait que (e_1, e_2, e_3) est une famille génératrice de F .

d) Etudier la liberté de la famille (e_1, e_2, e_3) revient à considérer la combinaison linéaire (*) avec $d = f = 0$.

Or lorsque l'on se fixe $d = f = 0$, la résolution précédente prouve que $a = b = c = 0$.

On a prouvé que (e_1, e_2, e_3) est une famille libre

e) Conclusion: (e_1, e_2, e_3) est une base de F

résolution 9

– Par définition, (f, g, h) est une famille génératrice de F

– Etudions si cette famille est libre.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a.f + b.g + c.h = 0$

On a donc

$$\text{pour tout } x \text{ réel } a.\cos(x) + b.\cos(2x) + c.\cos(3x) = 0.$$

On en déduit en prenant certaines valeurs de x un système vérifié par a, b et c .

- pour $x = 0$, cela donne $a + b + c = 0$
- pour $x = \frac{\pi}{2}$, cela donne $-b = 0$
- pour $x = \frac{\pi}{6}$, cela donne $\frac{\sqrt{3}}{2}.a + \frac{1}{2}.b = 0$

On considère le système

$$\begin{cases} a & + & b & + & c & = & 0 \\ & & -b & & & = & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}.a & + & \frac{1}{2}.b & & & = & 0 \end{cases}$$

dont l'unique solution est à l'évidence $a = b = c = 0$

On vient de montrer que (f, g, h) est une famille libre

– Conclusion: (f, g, h) est une base de F

résolution 10

– Par définition, (f, g, h) est une famille génératrice de F

– D'après les formules de trigonométrie, on sait que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \sin(2x) + \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin(2x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos(2x)$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot g(x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot f(x)$$

On vient de prouver que $h = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot f + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot g$

Comme h est une combinaison linéaire de f et g , on en déduit que (f, g) est une famille génératrice de F

– Regardons si cette famille est libre.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \cdot f + b \cdot g = 0$

On a donc pour tout x réel $a \cdot \cos(2x) + b \cdot \sin(2x) = 0$

En particulier,

– pour $x = 0$, cela donne $a = 0$

– pour $x = \frac{\pi}{4}$, cela donne $b = 0$

On a donc nécessairement $a = b = 0$

On vient de montrer que (f, g) est une famille libre

– Conclusion: (f, g) est une base de F

résolution 11

résolution 12