GEO 2D: parabole

On se place dans le plan muni du repère orthonormé usuel $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j})$

On considère $\mathcal{P}$ la parabole paramètrée par $t \mapsto M(t) = (t,t^2/2)$ avec $t \in \mathbb{R}$

On cherche l'ensemble S des points du plan par où passent deux tangentes à $\mathcal{P}$ perpendiculaires entre elles.

1. Pour $t \in \mathbb{R}$ on note (T_t) la droite tangente à $\mathcal{P}$ au point M_t. Donner une équation cartésienne de (T_t)
2. Pour $(t,t') \in \mathbb{R}^2$, écrire la condition sur t et t' pour que les deux tangentes (T_t) et $(T_{t'})$ soient perpendiculaires
3. Trouver alors le point d'intersection de ces deux tangentes lorsque la condition ci-dessus est vérifiée.(On exprimera les coordonnées du point d'intersection en fonction de t)
4. Prouver que S est la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{2}$

Bonus:
Montrer qu'une droite D non parallèle à l'axe des ordonnées est tangente à la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$ ssi $D \cap \mathcal{P}$ est réduit à un point.

$\boxed{\text{CORRECTION}}$

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $M'(t) = (1,t) \neq (0,0)$.
Donc tout point de la parabole est régulier et la tangente T_t est la droite qui passe par le point $M(t) = (t,t^2/2)$ et de vecteur directeur $(1,t)$.
Son équation cartésienne est donc $\begin{vmatrix} x-t & 1 \\ y-t^2/2 & t \end{vmatrix} = 0$ c'est à dire : $\boxed{tx - y - \dfrac{t^2}{2} = 0}$
2. On sait que deux droites sont perpendiculaires ssi leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux (l'orthogonalité étant caractérisée par le produit scalaire).
Ainsi, les droites (T_t) et $T_{t'}$ sont perpendiculaires ssi les vecteurs $(1,t)$ et $(1,t')$ sont orthogonaux, càd $\boxed{1 + tt' = 0}$
3. Comme il existe un réel t' tel que $tt' = -1$ si et seulement si $t \neq 0$, on va considérer un $t \in \mathbb{R}^*$ fixé.
On considère le point d'intersection entre les droites (T_t) et $(T_{-1/t})$.
Ses coordonnées vérifient le système $\begin{cases} tx - y - t^2/2 & = 0 \\ -x/t - y - 1/(2t^2) & = 0 \end{cases}$.
La résolution donne $\boxed{(x,y) = \left(\dfrac{t^2-1}{2t}, -\dfrac{1}{2}\right)}$
4. Nous allons montrer que S est la droite d'équation $y = -1/2$.
On considère l'arc paramétré $t \mapsto I(t) = (x(t),y(t)) = \left(\dfrac{t^2-1}{2t}, -\dfrac{1}{2}\right)$.
On sait déjà le point $I(t)$ est tojuours situé sur la droite d'équation $y = -1/2$.
Pour justifier que lorsque t varie dans $\mathbb{R}^*$ le point $I(t)$ décrit toute la droite, il suffit de montrer que l'ensemble image de la fonction x est égal à $\mathbb{R}$ tout entier.
Pour cela, on étudie les variations de cette fonction.
La fonction x est impaire et l'on a $\forall t \neq 0, x'(t) = \dfrac{1+t^2}{2t^2} > 0$.
Le tableau de variation est simple:

Comme la fonction x est continue sur $\mathbb{R}^*$ et que $\lim\limits_{0^+} x = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} x = +\infty$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires on peut affirmer que $x(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}$! cqfd!

BONUS:

Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$.

- Commençons par déterminer l'équation des droites tangentes à $\mathcal{P}$.
  Soit $M(x_0,x_0^2)$ un point de $\mathcal{P}$.

  Notons $F : (x,y) \mapsto x^2 - y$.

  On a $\nabla_{(x_0,y_0)}F = \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ donc tout point de $\mathcal{P}$ est régulier.
  L'équation cartésienne $\mathcal{T}_{x_0}$ de la tangente au point $M(x_0,x_0^2)$ est donc
  $$\begin{pmatrix} 2x_0 \\ 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - x_0^2 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow y = 2x_0.x - x_0^2$$

- Considérons une droite D non parallèle à l'axe des ordonnées.
  Elle possède donc une équation du type $y = mx + p$
  L'intersection entre D et $\mathcal{P}$ est caractérisée par le système
  $$\begin{cases} y & = x^2 \\ y & = mx + p \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - mx - p & = 0 \\ y & = x^2 \end{cases}$$
  L'intersection est donc réduit à un unique point ssi l'équation du second degré $x^2 - mx - p = 0$, càd lorsque le discriminant $\Delta = m^2 + 4p$ est nul.
  Ainsi, les droites D qui intersecte la parabole en un et un seul point sont les droites d'équation $y = mx - \dfrac{m^2}{4}$, notons D_m cette droite.

- On remarque que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ on a $\mathcal{T}_{x_0} = D_{2x_0}$
  Donc **toute droite tangente à $\mathcal{P}$ possède un unique point d'intersection avec $\mathcal{P}$**

- On remarque que pour tout $m \in \mathbb{R}$ on a $D_m = \mathcal{T}_{m/2}$
  Donc **toute droite qui possède un unique point d'intersection avec $\mathcal{P}$ est une droite tangente à $\mathcal{P}$**. cqfd!