Nature d'une série numérique (2A)

exercice 1

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+8}}$

exercice 2

Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{\cos n}{n.\sqrt{n}}$

exercice 3

Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{n^{20}}{2^n}$

exercice 4

Déterminer la nature de la série $\sum \ln \dfrac{2n(n+4)(n+5)}{(3n^2-1)(n+8)}$

exercice 5

Déterminer la nature de la série $\sum \ln \dfrac{n(n+4)}{(n+2)(n+3)}$

exercice 6

Déterminer la nature de la série $\sum \ln \dfrac{n(n+5)}{(n+2)(n+3)}$

exercice 7

Déterminer la nature de $\sum (-1)^n.n^{10}.e^{-\sqrt{n}}$

exercice 8

Déterminer la nature de la série $\sum (-1)^n.\operatorname{sh}(\dfrac{1}{n}).\sin(\dfrac{1}{n})$

exercice 9

Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{\sqrt{n}}{n.(\sqrt{n}-1)}$

exercice 10 (***)

Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{(-1)^n.\sqrt{n}}{n.(\sqrt{n}-1)}$

(on pourra effectuer un DL à un ordre suffisant)

exercice 11

Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+(-1)^{n+1}}$

(on pourra effectuer un DL à un ordre suffisant)

exercice 12

Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{1}{n^{\ln n}}$

exercice 13

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\sqrt{n+4}}{n!}$

exercice 14

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{\sqrt{n+4}}{n!}$

exercice 15

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n!}$

exercice 16 (**)

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}.\cos(n)}{n!}$

exercice 17 (*)

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n.n+5}{n^3+2n^2+4}$

Solutions

$\boxed{\textbf{résolution 1}}$

- La série $\sum u_n$ est une série alternée
- Il est clair que la suite $(|u_n|) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{n+8}}\right)$ est décroissante et tend vers 0

  On peut donc affirmer d'après le critère spécial de convergence des séries alternées que la série est convergente

résolution 2 • Pour tout $n \geqslant 1$ on note $u_n = \dfrac{\cos n}{n.\sqrt{n}}$

(on note de suite que u_n n'est pas de signe stable)

- Je propose deux solutions:

  1. Soit $n \geqslant 1$.
     On a
     $$0 \leqslant |u_n| = \frac{|\cos n|}{n^{1.5}} \leqslant \frac{1}{n^{1.5}} = v_n$$
     La série $\sum v_n$ est une série de Riemann de référence convergente.

     Le théorème de comparaison des séries à termes positifs permet de conclure que $\sum |u_n|$ est une série convergente.

     On a montré que $\sum u_n$ est une série absolument convergente, ce qui implique qu'elle est convergente.

  2. Comme $(\cos n)$ est une suite bornée, on a $u_n = O(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}) = O(\dfrac{1}{n^{1.5}})$
     Comme la série $\sum \dfrac{1}{n^{1.5}}$ est une série de Riemann ACV,
     par théorème de comparaison avec le O on peut affirmer que $\sum u_n$ est ACV

résolution 3 • Pour tout $n \geqslant 0$ notons $u_n = \dfrac{n^{20}}{2^n}$

On note que le terme général u_n est strictement positif.

- On remarque par exemple que $u_n = o(\dfrac{1}{n^2})$. En effet:

$$\frac{u_n}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^{22}}{2^n} \longrightarrow 0 \quad \text{d'après le théorème des croissances comparées}$$

- On a $u_n = o(\dfrac{1}{n^2})$ et l'on sait que $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann de référence absolument convergente: on peut alors en déduire, d'après un théorème de comparaison, que $\sum u_n$ est une série absolument convergente, ce qui implique que $\boxed{\sum u_n \text{ est une série convergente}}$

- Il était également possible d'utiliser ici la règle de D'Alembert.

En effet, pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(n+1)^{20}}{2.n^{20}} = \frac{1}{2}.\left(\frac{n+1}{n}\right)^{20} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

Ce qui permet bien d'affirmer que $\sum u_n$ est une série convergente.

résolution 4 • Pour tout $n \geqslant 1$ on note $u_n = \ln \dfrac{2n(n+4)(n+5)}{(3n^2-1)(n+8)}$

- On remarque que
$$\frac{2n(n+4)(n+5)}{(3n^2-1)(n+8)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2n^3}{3n^3} = \frac{2}{3}$$
On vient de prouver que
$$\lim \frac{2n(n+4)(n+5)}{(3n^2-1)(n+8)} = \frac{2}{3}$$
- Le théorème de composition des limites permet de dire que: $\lim u_n = \ln \dfrac{2}{3} \neq 0$
- Ceci prouve que la série $\sum u_n$ est une série grossièrement divergente, ce qui implique qu'elle soit divergente

résolution 5 • Pour tout $n \geqslant 1$ on note $u_n = \ln \dfrac{n(n+4)}{(n+2)(n+3)}$

- Soit $n \geqslant 1$.
  En divisant chaque facteur par n, on obtient l'écriture

$$u_n = \ln \frac{\left(1+\dfrac{4}{n}\right)}{\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\left(1+\dfrac{3}{n}\right)} = \ln\left(1+\frac{4}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{3}{n}\right)$$

  Il est alors tentant d'effectuer un développement limité pour obtenir un équivalent

$$\begin{aligned} u_n &= \left[\frac{4}{n} + o(\frac{1}{n})\right] - \left[\frac{2}{n} + o(\frac{1}{n})\right] - \left[\frac{3}{n} + o(\frac{1}{n})\right] \\ &= -\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}) \\ &\underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{n} = v_n \end{aligned}$$

- On a
  i) $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$
  ii) v_n de signe stable car négatif pour tout $n \geqslant 1$
  iii) $\sum v_n$ est une série de Riemann de référence divergente

  La règle des équivalents permet d'en déduire que $\sum u_n$ est une série divergente.

résolution 6 • Pour tout $n \geqslant 1$ on note $u_n = \ln \dfrac{n(n+5)}{(n+2)(n+3)}$

- Soit $n \geqslant 1$.
  En divisant chaque facteur par n, on obtient l'écriture

$$u_n = \ln \frac{\left(1+\frac{5}{n}\right)}{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)} = \ln\left(1+\frac{5}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{3}{n}\right)$$

  Il est alors tenant d'effectuer un développement limité pour obtenir un équivalent

$$\begin{aligned} u_n &= \left[\frac{5}{n} - \frac{5^2}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right] - \left[\frac{2}{n} - \frac{2^2}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right] - \left[\frac{3}{n} - \frac{3^2}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right] \\ &= -\frac{6}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \\ &\underset{+\infty}{\sim} -\frac{6}{n^2} = v_n \end{aligned}$$

- On a
  i) $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$
  ii) v_n de signe stable car négatif pour tout $n \geqslant 1$
  iii) $\sum v_n$ est une série de Riemann de référence convergente

  La règle des équivalents permet d'en déduire que $\sum u_n$ est une série convergente.

résolution 7 • Pour tout $n \geqslant 0$ on note $u_n = (-1)^n.n^{10}.e^{-\sqrt{n}}$

(on note de suite que u_n n'est pas de signe stable)

- On remarque par exemple que $u_n = o(\dfrac{1}{n^2})$. En effet:

$$\frac{u_n}{\dfrac{1}{n^2}} = (-1)^n.n^{12}.e^{-\sqrt{n}} \longrightarrow 0$$

car:
  - $((-1)^n)$ est une suite bornée
  - $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{12}.e^{-\sqrt{n}} = \lim\limits_{X\to+\infty} (X^2)^{12}e^{-X} = \lim\limits_{X\to+\infty} X^{24}e^{-X} = 0$ *(on a posé $X = \sqrt{n}$)*
  (c'est le théorème des croissances comparées qui nous donne cette limite)

- On a $u_n = o(\dfrac{1}{n^2})$ et l'on sait que $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann de référence absolument convergente: on peut alors en déduire, d'après un théorème de comparaison, que $\sum u_n$ est une série absolument convergente, ce qui implique que $\boxed{\sum u_n \text{ est une série convergente}}$

résolution 8 • On a $u_n = (-1)^n \operatorname{sh}(\frac{1}{n}).\sin(\frac{1}{n})$ pour tout $n \geqslant 1$

- Comme $\lim \frac{1}{n} = 0$ et que l'on sait que $\sin x \underset{0}{\sim} x$ et $\operatorname{sh} x \underset{0}{\sim} x$, on peut dire que $\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n^2}}$
- On a $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{n^2}$ qui est de signe stable, on peut donc affirmer par la règle des équivalents que les séries $\sum |u_n|$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ sont de même nature.
  Or $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann notoirement convergente,
  donc on en déduit que $\sum |u_n|$ est une série convergente.

  $\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ est ACV donc CV}}$

résolution 9 • Pour tout $n \geqslant 2$, on note $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n.(\sqrt{n}-1)}$

- On remarque directement que

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}.n} = \frac{1}{n}$$

- On a

  i) $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$

  ii) $\dfrac{1}{n}$ est toujours positif

  iii) $\sum \dfrac{1}{n}$ est une série de Riemann de référence divergente

  La règle des équivalents permet d'en déduire que $\sum u_n$ est une série divergente.

résolution 10 • Pour tout $n \geqslant 2$ on note $u_n = \dfrac{(-1)^n.\sqrt{n}}{n.(\sqrt{n}-1)}$

- Soit $n \geqslant 2$, on a

$$\frac{\sqrt{n}}{n.(\sqrt{n}-1)} = \frac{1}{n}.\frac{1}{1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{n}.\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}+o(\frac{1}{\sqrt{n}})\right) = \frac{1}{n}+\frac{1}{n^{3/2}}+o(\frac{1}{n^{3/2}})$$

Ainsi $\boxed{u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}+\dfrac{(-1)^n}{n^{3/2}}+o(\dfrac{1}{n^{3/2}})}$

- On sait que:
  - la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n}$ est convergente(c'est une série alternée qui vérifie le critère spécial)
  - la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n^{3/2}}$ est ACV
  - la série de terme général $o(\dfrac{1}{n^{3/2}})$ est ACV (théo 18)
- Ainsi, on peut affirmer que

$$\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ est une série convergente}}$$

car somme de 3 séries convergente

résolution 11 • Pour tout $n \geqslant 0$ on note $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+(-1)^{n+1}}$

- Comme indiqué, on effectue un développement limité.
  Pour $n \geqslant 0$ on a

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{(-1)^{n+1}}{n}.\frac{1}{1-\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{n}.\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+o(\frac{(-1)^{n+1}}{n})\right] \\
&= \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}}{n}}_{=x_n}+\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{=y_n}+\underbrace{o(\frac{1}{n^2})}_{=z_n}
\end{aligned}$$

- Regardons chaque terme maintenant!

  i) $\sum x_n$ est un série convergente (série alternée qui vérifie le critère spécial)

  ii) $\sum y_n$ est une série de Riemann convergente

  iii) $\sum z_n$ est une série absolument convergente d'après le théorème 18

  On peut affirmer que $\boxed{\sum u_n \text{ est une série convergente}}$, comme somme de 3 séries convergentes!

- **remarque:**
  on peut aussi en alternative, plutôt que de considérer séparément les séries de terme général y_n et z_n, considérer la série de terme général $y_n + z_n$.
  Ce qui donne
  - On a $y_n + z_n = \dfrac{1}{n^2} + o(\dfrac{1}{n^2}) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$
    Comme $\dfrac{1}{n^2}$ est toujours positif et que la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente, on peut affirmer d'après la règle des équivalents que la série de terme général $y_n + z_n$ converge.

  - On conclut cette fois en disant que $\boxed{\sum u_n \text{ est une série convergente}}$, comme somme de deux séries convergentes ($\sum x_n$ et $\sum y_n + z_n$)

résolution 12 • On note $u_n = \dfrac{1}{n^{\ln n}}$ pour tout $n \geqslant 1$
On remarque de suite(ah!ah!) que u_n est toujours positif

- Soit $n \geqslant 3$.
  Comme la fonction ln est croissante sur son ensemble de définition on a

$$\ln n \geqslant \ln 3$$

et donc

$$n^{\ln n} \geqslant n^{\ln 3}$$

Comme la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$, on a

$$\frac{1}{n^{\ln n}} \leqslant \frac{1}{n^{\ln 3}}$$

On vient de prouver que

$$\boxed{\forall n \geqslant 3, 0 \leqslant \frac{1}{n^{\ln n}} \leqslant \frac{1}{n^{\ln 3}}}$$

- La série de terme général $\dfrac{1}{n^{\ln 3}}$ est une série de Riemann convergente car $\ln 3 > 1$.
  Le théorème de comparaison des séries à termes positifs nous permet de conclure que

$$\boxed{\sum u_n \text{ est une série convergente}}$$

résolution 13 • On a pour tout n entier $u_n = \dfrac{\sqrt{n+4}}{n!}$.

On va utiliser la règle de D'Alembert.

- Soit $n \geqslant 1$, on a

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{\sqrt{n+5}}{\sqrt{n+4}}.\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{\sqrt{n+5}}{\sqrt{n+4}}.\frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

On en déduit que $\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ est convergente}}$

résolution 14 • On a pour tout n entier $u_n = \dfrac{(-1)^n\sqrt{n+4}}{n!}$.
On va utiliser (encore) la règle de D'Alembert.

- Soit $n \geqslant 1$, on a
$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{\sqrt{n+5}}{\sqrt{n+4}}.\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{\sqrt{n+5}}{\sqrt{n+4}}.\frac{1}{n} \longrightarrow 0$$
On en déduit que la série $\sum v_n$ est convergente

- On vient de prouver que $\boxed{\sum u_n \text{ est une série absolument convergente}}$

résolution 15 • On note pour tout $n \geqslant 0, u_n = \dfrac{\cos(n)}{n!}$

- On remarque que pour tout $n \geqslant 0$ on a $0 \leqslant |u_n| \leqslant \dfrac{1}{n!}$.

  Comme la série $\sum \dfrac{1}{n!}$ est une série de référence convergente,
  on peut affirmer d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs que

$$\boxed{\sum u_n \text{ est une série absolument convergente, donc convergente}}$$

- On aurait pu également utiliser un théorème de comparaison avec un O.

  En effet, comme la suite $((\cos n))$ est bornée, on a

$$u_n = O(\frac{1}{n!})$$

  comme la série $\sum \dfrac{1}{n!}$ est une série ACV, par théorème de comparaison, on peut affirmer que $\sum u_n$ est ACV

résolution 16 • Nous allons établir que $u_n = o(\frac{1}{n^2})$ ce qui suffit pour justifier que $\sum u_n$ est une série ACV donc CV.

- Pour $n \geqslant 3$ on a

$$n^2.u_n = \frac{\sqrt{n+1}.n^2}{n.(n-1)(n-2)}.\frac{1}{(n-3)!}.\cos(n) = \frac{n.\sqrt{n+1}}{(n-1)(n-2)}.\frac{1}{(n-3)!}.\cos n$$

  avec clairement
  - $\lim \frac{n.\sqrt{n+1}}{(n-1)(n-2)} = \lim \frac{n^{3/2}}{n^2} = 0$
  - $\lim \frac{1}{(n-3)!} = 0$
  - $(\cos n)$ est une suite bornée

  On a ainsi bien justifié que $\lim \frac{u_n}{\frac{1}{n^2}} = 0$, c'est à dire que $u_n = o(\frac{1}{n^2})$

- Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série ACV, le théorème de comparaison avec le o permet d'affirmer que $\sum u_n$ est ACV

résolution 17 • On note pour tout n entier $u_n = \dfrac{(-1)^n.n+5}{n^3+2n^2+4}$

- On a
$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n.n}{n^3} = \frac{(-1)^n}{n^2}$$
cependant on ne peut conclure ici avec la règle des équivalents car le signe n'est pas stable!

- On a
$$|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$
Comme $\dfrac{1}{n^2}$ est positif pour tout $n \geqslant 1$
et que la série de terme générale $\dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente,
on peut affirmer grâce à la règles des équivalents que la série $\sum |u_n|$ est convergente.

- Conclusion:
$$\boxed{\sum u_n \text{ est une série absolument convergente, donc convergente}}$$