Sommes de séries numériques (1A)

exercice 1 (***différence entre terme général et somme partielle (fondamental)***)

1. *On considère la série de terme général* $u_n = n$ *pour tout entier* $n \geqslant 0$.
   Donner la somme partielle d'indice n
2. *On considère la série dont la somme partielle d'indice* n *est* $S_n = n$ *pour tout entier* $n \geqslant 0$.
   Donner son terme général.

exercice 2 (***très classique***)

Déterminer la somme partielle d'indice n *de la série de terme général* $u_n = \ln(1 + \dfrac{1}{n})$ *avec* $n \geqslant 1$.
Indiquer alors la nature de la série.

exercice 3

Justifier la convergence et déterminer la somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{2}{(n+3)(n+5)}$

exercice 4

Justifier la convergence et déterminer la somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln \frac{n^2}{(n+1)(n-1)}$

exercice 5 (**)

On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^3 - n}$ *avec* $n \geqslant 2$.
Déterminer sa somme partielle d'indice n*, puis justifier que la érie* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ *converge en précisant sa somme.*

exercice 6

Prouver la convergence puis déterminer la somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{2^{4n-3}}$

exercice 7

Prouver la convergence puis déterminer la somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\cos(n\pi/2)}{2^n}$

exercice 8 (*)

Soit q *un complexe tel que* $|q| < 1$.
Donner la nature et la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} q^{3n+4}$

exercice 9 (*)

Soit $z \in \mathbb{C}$.
Donner la nature et la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^{3n+8}}{(n+1)!}$

exercice 10 (**, procédé télescopique*)**

1. *Décomposer en éléments simples*

$$\frac{X^3-2X^2+3X+2}{X^2(1-X)(X+1)^2}$$

On cherchera la décomposition sous la forme $\dfrac{a}{X}+\dfrac{b}{X^2}+\dfrac{c}{X-1}+\dfrac{d}{X+1}+\dfrac{e}{(X+1)^2}$

2. *Calculer* $S_n=\sum_{k=2}^{n}\dfrac{k^3-2k^2+3k+2}{k^2.(1-k).(k+1)^2}$ *pour tout* $n\geqslant 2$
3. *En déduire que la série* $\sum_{k\geqslant 2}\dfrac{k^3-2k^2+3k+2}{k^2.(1-k).(k+1)^2}$ *est convergente et donner sa somme*

exercice 11 (*, procédé télescopique*)**

1. *Décomposer en éléments simples*

$$\frac{5X+9}{X(X+1)(X+3)}$$

On cherchera une décomposition sous la forme $\dfrac{a}{X}+\dfrac{b}{X+1}+\dfrac{c}{X+3}$

2. *Calculer* $S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{5k+9}{k(k+1)(k+3)}$ *pour* $n\geqslant 1$
3. *En déduire que la série* $\sum_{k\geqslant 1}\dfrac{5k+9}{k(k+1)(k+3)}$ *converge et donner sa somme*

exercice 12 (, procédé télescopique*)**

1. *Décomposer en éléments simples*

$$\frac{1}{4X^2-1}$$

On pourra chercher une décomposition sous la forme $\dfrac{a}{2X-1}+\dfrac{b}{2X+1}$

2. *Calculer* $\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{4k^2-1}$ *pour* $n\geqslant 0$
3. *En déduire la nature de la série* $\sum_{k\geqslant 0}\dfrac{1}{4k^2-1}$ *et donner sa somme*

exercice 13 (****)

Soit $z\in\mathbb{C}$.

Donner la nature et la somme de la série $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{z^{3n+1}}{(n+1)!}$

exercice 14

Justifier la convergence et déterminer la somme de $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{4.(-1)^n}{3^{2n+1}}$

exercice 15

Justifier la convergence et déterminer la somme de $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{n+3}{(n-1)!}$

exercice 16 (*, procédé télescopique*)**

On note $u_n = \dfrac{2n-1}{n(n^2-4)}$ *et* $S_n = \sum_{k=3}^{n} u_k$ *pour tout* $n \geqslant 3$.

1. *Déterminer* S_n *pour tout* $n \geqslant 3$.
2. *Justifier que la série* $\sum_{n\geqslant 3} u_n$ *converge, et donner sa somme*

exercice 17 (***)

Justifier la convergence et déterminer la somme de $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{n^2+4n-5}{n!}$

Solutions

résolution 1 1. Par définition, on a pour tout $n \geqslant 0$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. • Notons u_n le terme général
   • On a $u_0 = S_0 = 0$
   • Pour $n \geqslant 1$ on a

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = S_n - S_{n-1} = n - (n-1) = 1$$

   • Conclusion: le terme général u_n est défini par $u_n = \begin{cases} 0 & = \text{ si } n = 0 \\ 1 & = \text{ sinon} \end{cases}$

remarque: il a fallu isoler le cas $n = 0$ car S_{n-1} n'a alors pas de sens

résolution 2 On commence par remarquer sur les premiers termes que

- $S_1 = \ln 2$
- $S_2 = \ln 2 + \ln(1 + \frac{1}{2}) = \ln 2 + \ln \frac{3}{2} = \ln 3$
- $S_3 = \ln 2 + \ln(1 + \frac{1}{2}) + \ln(1 + \frac{1}{3}) = \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} = \ln 4$

Il semble ici que l'on puisse expliciter très simplement S_n en fonction de n pour tout $n \geqslant 1$!

Soit $n \geqslant 1$.
On a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \frac{1}{k}) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln k) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n} \ln k = \ln(n+1)$$

On a utilisé ce que l'on appelle *le procédé télescopique*

La suite des sommes partielles $(S_n)_{n \geqslant 1}$ n'est donc rien d'autre que la suite $(\ln(n+1))_{n \geqslant 1}$.

On a clairement $\lim S_n = +\infty$, ce qui prouve que la série de terme général u_n diverge

résolution 3 • Pour tout $n \geqslant 0$, notons $u_n = \dfrac{2}{(n+3)(n+5)}$

- Notons pour tout $n \geqslant 0, S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ la somme partielle d'indice n.
- Une décomposition en éléments simples donne

$$\frac{2}{(X+3)(X+5)} = \frac{1}{X+3} - \frac{1}{X+5}$$

On en déduit que pour $n \geqslant 0$ on a

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(k+3)(k+5)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+5} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+3} - \sum_{n=0}^{n} \frac{1}{k+5} \end{aligned}$$

En effectuant le changement d'indice $p \leftarrow k+3$ dans la première somme et $p \leftarrow k+5$ dans la seconde, on reconnait **un procédé télescopique**

$$S_n = \sum_{p=3}^{n+3} \frac{1}{p} - \sum_{p=5}^{n+5} \frac{1}{p} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5}$$

Il est clair que $\lim S_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{12}$ (limite finie).

- On a montré que $\boxed{\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{2}{(n+3)(n+5)} \text{ converge et que sa somme vaut } \dfrac{7}{12}}$

remarque: autre moyen de justifier la convergence

- Le terme général u_n est toujours positif et on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^2} = v_n$
  la règle des équivalents permet alors d'affirmer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
- Comme $\sum v_n$ est une série de référence de Riemman convergente, on en déduit que $\sum u_n$ est une série convergente

résolution 4 • Pour tout $n \geqslant 2$, notons $u_n = \ln \dfrac{n^2}{(n+1)(n-1)}$

- Notons pour tout $n \geqslant 2, S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} u_k$ la somme partielle d'indice n.
- Pour tout $n \geqslant 2$ on a

$$u_n = \ln \frac{n^2}{(n+1)(n-1)} = 2\ln n - \ln(n+1) - \ln(n-1)$$

- On en déduit que pour $n \geqslant 2$ on a

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n} \ln \frac{k^2}{(k+1)(k-1)} \\ &= \sum_{k=2}^{n} 2\ln k - \ln(k+1) - \ln(k-1) \\ &= 2\sum_{k=2}^{n} \ln k - \sum_{k=2}^{n} \ln(k+1) - \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1) \end{aligned}$$

En effectuant le changement d'indice $p \leftarrow k+1$ dans la deuxième somme et $p \leftarrow k-1$ dans la troisième, on reconnait **un procédé télescopique**

$$\begin{aligned} S_n &= 2\sum_{p=2}^{n} \ln p - \sum_{p=3}^{n+1} \ln p - \sum_{p=1}^{n-1} \ln p \qquad \textit{(les termes d'indices } p \in [\![3,n-1]\!] \textit{ se simplifient)} \\ &= (2\ln 2 + 2\ln n) - (\ln(n) + \ln(n+1)) - (\ln 1 + \ln 2) \\ &= \ln 2 + \ln n - \ln(n+1) \\ &= \ln 2 - \ln \frac{n+1}{n} = \ln 2 - \ln(1 + \frac{1}{n}) \end{aligned}$$

Il est clair sous cette forme que $\lim S_n = \ln 2$ (limite finie)

- On a montré que $\boxed{\sum\limits_{n\geqslant 2} \ln \dfrac{n^2}{(n+1)(n-1)} \text{ converge et que sa somme vaut } \ln 2}$

remarque: autre moyen de justifier la convergence

- On note que

$$u_n = \ln \frac{n^2}{(n+1)(n-1)} = \ln \frac{n^2}{n^2-1} = -\ln \frac{n^2-1}{n^2} = -\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\left(\frac{-1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} = v_n$$

- Comme $v_n > 0$ pour tout $n \geqslant 1$ et que $u_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$, la règle des équivalents permet d'affirmer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries de même nature.
- Comme $\sum v_n$ est une série de référence de Riemann convergente, on en déduit que $\sum u_n$ est une série convergente

résolution 5 • Les racines du polynômes $X^3 - X = X(X-1)(X+1)$ sont $0, -1$ et 1

- Une recherche de décomposition en éléments simples donne

$$u_n = \frac{1/2}{n-1} + \frac{1/2}{n+1} - \frac{1}{n}$$

- Soit $n \geqslant 2$ un entier fixé. :
  Ces trois sommes possèdent le même terme général:
  on va les regrouper dans un seul signe Σ, en laissant de côtés certains termes...

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n-1}\frac{1}{k}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} + \sum_{k=3}^{n-1}\frac{1}{k}) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \sum_{k=3}^{n-1}\frac{1}{k}) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}) + \underbrace{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1)}_{=0}.\sum_{k=3}^{n-1}\frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}) \end{aligned}$$

- On trouve alors facilement que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{4}$
- Ainsi on dit que la série $\sum \dfrac{1}{n^3-n}$ converge et la somme de cette série est $\dfrac{1}{4}$.
  On écrit $\boxed{\sum_2^{\infty} \dfrac{1}{n^3-n} = \dfrac{1}{4}}$

résolution 8

- On commence par écrire que que pour tout entier n on a

$$q^{3n+4} = q^4.(q^3)^n$$

On reconnait un terme général géométrique de raison q^3

- On a $|q^3| = |q|^3 < 1$ (car $|q| < 1$).
Ceci nous assure la convergence de cette série géométrique

- Et l'on peut ainsi écrire

$$\sum_{n=2}^{\infty} q^{3n+4} = \sum_{n=2}^{\infty} q^4.(q^3)^n = q^4.\sum_{n=2}^{\infty}(q^3)^n$$

A ce niveau, on a deux possibilités pour conclure:

i) première idée:
On écrit que

$$\sum_{n=2}^{\infty}(q^3)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(q^3)^n - 1 - q^3 = \frac{1}{1-q^3} - 1 - q^3 = \cdots = \frac{q^6}{1-q^3}$$

ii) seconde idée:
On effectue le changement d'indice $p = n - 2$, cela donne

$$\sum_{n=2}^{\infty}(q^3)^n = \sum_{p=0}^{\infty}(q^3)^{p+2} = \sum_{p=0}^{\infty}(q^3)^p.(q^3)^2 = q^6.\sum_{p=0}^{\infty}(q^3)^p = q^6.\frac{1}{1-q^3}$$

Au final, on trouve que

$$\sum_{n=2}^{\infty} q^{3n+4} = \frac{q^{10}}{1-q^3}$$

résolution 9 • On montre, par exemple avec la règle de D'Alembert, que cette série numérique converge pour tout complexe z.

- On commence par effectuer le changement d'indice $p = n + 1$, cela donne

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n+8}}{(n+1)!} &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{z^{3p+5}}{p!} \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{z^5.(z^3)^p}{p!} \\ &= z^5.\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(z^3)^p}{p!} \\ &= z^5.\left[\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(z^3)^p}{p!} - 1\right] \\ &= z^5.\left(e^{z^3} - 1\right)\end{aligned}$$

résolution 10

1. La décomposition donne

$$\frac{X^3-2X^2+3X+2}{X^2(1-X)(X+1)^2}=\frac{1}{X}+\frac{2}{X^2}-\frac{1}{X-1}-\frac{2}{(X+1)^2}$$

2. Soit $n\geqslant 2$.
   On a

$$\begin{aligned}
S_n&=\sum_{k=2}^{n}\frac{k^3-2k^2+3k+2}{k^2.(1-k).(k+1)^2}\\
&=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}+\frac{2}{k^2}-\frac{1}{k-1}-\frac{2}{(k+1)^2}\\
&=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}+2.\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}-2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}\\
&=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}+2.\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}-2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}
\end{aligned}$$

   Dans la deuxième [resp. quatrième somme],
   on effectue le changement d'indice $k\longleftarrow k-1$ [resp. $k\longleftarrow k+1$].

   Ce qui donne

$$\begin{aligned}
S_n&=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}+2.\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}-2\sum_{k=3}^{n+1}\frac{1}{k^2}\\
&=\frac{1}{n}-1+(1-1).\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k}+2.\frac{1}{2^2}-2.\frac{1}{(n+1)^2}+(2-2).\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k^2}\\
&=-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}-\frac{2}{(n+1)^2}
\end{aligned}$$

3. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=-\dfrac{1}{2}$ (limite finie), on peut en déduire que la série $\sum\limits_{k\geqslant 2}\dfrac{k^3-2k^2+3k+2}{k^2.(1-k).(k+1)^2}$ est convergente et que sa somme vaut $\dfrac{-1}{2}$

résolution 11 1. La décomposition donne

$$\frac{5X+9}{X(X+1)(X+3)} = \frac{3}{X} - \frac{2}{X+1} - \frac{1}{X+3}$$

2. Soit $n \geqslant 1$.
   On a

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{5k+9}{k(k+1)(k+3)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{k} - \frac{2}{k+1} - \frac{1}{k+3} \\ &= 3\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+3} \end{aligned}$$

   Dans la deuxième [resp. troisième] somme,
   on effectue le changement d'indice $k \longleftarrow k+1$ [resp. $k \longleftarrow k+3$].
   Ce qui donne

$$\begin{aligned} S_n &= 3\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=4}^{n+3} \frac{1}{k} \\ &= 3\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \\ &\quad + (3-2-1).\sum_{k=4}^{n} \frac{1}{k} \\ &\quad - 2.\frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right) \\ &= \frac{23}{6} - \frac{3}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \end{aligned}$$

3. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{23}{6}$ (limite finie), on peut en déduire que la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} \dfrac{5k+9}{k(k+1)(k+3)}$ converge et que sa somme vaut $\dfrac{23}{6}$

résolution 12 1. On a la décomposition

$$\frac{1}{4X^2-1}=\frac{1/2}{2X-1}-\frac{1/2}{2X+1}$$

2. Soit $n \geqslant 0$ fixé.
   On a par procédé télescopique

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k^2-1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1/2}{2k-1}-\frac{1/2}{2k+1}=\frac{1}{2}.\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2}.\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}$$

   En effectuant le changement d'indice $k \longleftarrow k-1$ dans la première somme, cela donne

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}.\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2}.\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}&=\frac{1}{2}.\sum_{k=-1}^{n-1}\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2}.\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}\\&=\frac{1}{2}.\frac{1}{2.(-1)+1}-\frac{1}{2}.\frac{1}{2n+1}\\&=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}.\frac{1}{2n+1}\end{aligned}$$

3. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{4k^2-1}=-\frac{1}{2}$ (limite finie), on en déduit que $\sum\limits_{k\geqslant 0}\frac{1}{4k^2-1}$ est une série convergente, de somme $\frac{-1}{2}$

résolution 13 • On montre, par exemple avec la règle de D'Alembert, que cette série numérique converge pour tout complexe z.

- On commence par effectuer le changement d'indice $p = n + 1$, cela donne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n+1}}{(n+1)!} = \sum_{p=2}^{\infty} \frac{z^{3p-2}}{p!}$$

Ici, on va distinguer le cas $z = 0$ et la cas $z \neq 0$

i) cas $z = 0$
Il est clair qu'alors $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n+1}}{(n+1)!} = \sum_{p=2}^{\infty} \frac{z^{3p-2}}{p!} = 0$

ii) cas $z \neq 0$
On écrit alors

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n+1}}{(n+1)!} = \sum_{p=2}^{\infty} \frac{z^{3p-2}}{p!} &= \sum_{p=2}^{\infty} \frac{z^{-2}.(z^3)^p}{p!} \\ &= \frac{1}{z^2}.\sum_{p=2}^{\infty} \frac{(z^3)^p}{p!} \\ &= \frac{1}{z^2}.\left[\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(z^3)^p}{p!} - 1 - z^3\right] \end{aligned}$$

- Pour conclure, on trouve donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n+1}}{(n+1)!} = \begin{cases} 0 & \text{si } z = 0 \\ \dfrac{e^{z^3} - 1 - z^3}{z^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

résolution 14 • Pour tout $n \geqslant 0$, notons $u_n = \dfrac{4.(-1)^n}{3^{2n+1}}$

- Pour tout $n \geqslant 0$ on remarque que

$$u_n = \frac{4.(-1)^n}{3^{2n+1}} = \frac{4}{3}.\frac{(-1)^n}{(3^2)^n} = \frac{4}{3}.\left(\frac{-1}{9}\right)^n$$

Ainsi $\sum u_n$ est une série géométrique de raison $\dfrac{-1}{9}$.

Comme $\left|\dfrac{-1}{9}\right| < 1$, on peut affirmer que $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$.

- On peut écrire

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{3}.\left(\frac{-1}{9}\right)^n = \frac{4}{3}.\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{9}\right)^n = \frac{4}{3}.\frac{1}{1-\left(\dfrac{-1}{9}\right)} = \frac{4}{3}.\frac{9}{10} = \frac{6}{5}$$

Et l'on vient de prouver que $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \dfrac{6}{5}}$

résolution 15 • Pour tout $n \geqslant 2$ notons $u_n = \dfrac{n+3}{(n-1)!}$

- Nous allons utiliser la règle de D'Alembert pour prouver la convergence.
  Comme $u_n > 0$ pour tout $n \geqslant 2$, on peut former

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+4}{n!}.\frac{(n-1)!}{n+3} = \frac{n+4}{n(n+3)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

  On en déduit que $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \dfrac{1}{n} = 0 < 1$.
  La règle de D'Alembert permet de conclure que $\boxed{\sum u_n \text{ est une série convergente}}$

- Considérons maintenant la somme $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n+3}{(n-1)!}$
  Le changement d'indice $p \leftarrow n-1$ permet d'écrire

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+3}{(n-1)!} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p+4}{p!} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p}{p!} + \frac{4}{p!} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p}{p!} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{4}{p!} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(p-1)!} + 4\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!}$$

  - Or $\quad \sum\limits_{p=1}^{\infty} \dfrac{1}{p!} = -1 + \sum\limits_{p=0}^{\infty} \dfrac{1}{p!} = -1 + e$
  - et $\quad \sum\limits_{p=1}^{\infty} \dfrac{1}{(p-1)!} = \sum\limits_{q=0}^{\infty} \dfrac{1}{q!} = e \qquad$ *(on a fait le changement d'indice $q \leftarrow p-1$)*

  On a ainsi justifié que

$$\boxed{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+3}{(n-1)!} = e + 4(-1+e) = 5e - 4}$$

résolution 16

- La décomposition en éléments simples donne

$$\frac{2X-1}{X(X^2-4)} = \frac{2X-1}{X(X-2)(X+2)} = \frac{1/4}{X} + \frac{3/8}{X-2} - \frac{5/8}{X+2}$$

- Soit $n \geqslant 3$, on a ainsi

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=3}^{n} u_k &= \sum_{k=3}^{n} \frac{1/4}{k} + \frac{3/8}{k-2} - \frac{5/8}{k+2} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + \frac{3}{8}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k-2} - \frac{5}{8}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k+2} \end{aligned}$$

En effectuant dans la deuxième[resp. troisième] somme
le changement d'indice $k \longleftarrow k-2$ [resp. $k \longleftarrow k+2$], on obtient

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + \frac{3}{8}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k} - \frac{5}{8}\sum_{k=5}^{n+2}\frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) \\ &+ \frac{3}{8}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \\ &- \frac{5}{8}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) \\ &+ \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8} - \frac{5}{8}\right)}_{=0} \cdot \sum_{k=5}^{n-2}\frac{1}{k} \\ &= \frac{89}{96} - \frac{1}{8}\left(\frac{5}{n+2} + \frac{5}{n+1} + \frac{3}{n} + \frac{3}{n-1}\right) \end{aligned}$$

- On trouve alors facilement que $\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{89}{96}$
Ainsi on dit que la série $\sum \dfrac{2n-1}{n(n^2-4)}$ converge et la somme de cette série est $\dfrac{89}{96}$.
On écrit $\boxed{\sum_{3}^{\infty} \dfrac{2n-1}{n(n^2-4)} = \dfrac{89}{96}}$

résolution 17

- La règle de D'Alembert assure sans problème la convergence.

- Considérons maintenant la somme $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+4n-5}{n!}$.

  On a
$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+4n}{n!} - 5\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+4n}{n!} - 5e$$
  Comme le premier terme de la série restante est nul, on a
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+4n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n}{n!}$$
  On peut maintenant simplifier par n (qui est $\neq 0$!) le numérateur et le dénominateur
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{(n-1)!}$$
  On effectue le glissement d'indice $p \longleftarrow n-1$ ce qui donne
$$S = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(p+1)+4}{p!} - 5e = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{p}{p!} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{5}{p!} - 5e = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{p}{p!} + 5e - 5e = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{p}{p!}$$
  Et on répète le raisonnement, comme le premier terme de la série restante est non nul... par glissement d'indice... On obtient successivement
$$S = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{p}{p!} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p}{p!} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(p-1)!} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} = e$$

- On aurait pu écrire d'un coup également
$$\begin{aligned}
S &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+4n-5}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+4n}{n!} - 5\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n}{n!} - 5e \quad \text{on fait partir la somme à 1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{(n-1)!} - 5e \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{p+5}{p!} - 5e \qquad (p \longleftarrow n-1) \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{p}{p!} + 5\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} - 5e \\
&= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p}{p!} + 5e - 5e = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A}{(p-1)!} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} = e
\end{aligned}$$