Sommes finies (1A)

exercice 1 (*)

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Déterminer $\sum\limits_{k=0}^{n} 3^{2k+1}$

exercice 2 (*)

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Déterminer $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^{2n+1}$

exercice 3 (, *classique*)**

Soit $n \in \mathbb{N}$ *et* $\theta \in \mathbb{R}$
Calculer $C_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \cos(k.\theta)$ *et* $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \sin(k.\theta)$
Le résultat final sera donné sous forme factorisée

exercice 4 (, *classique*)**

Soit $n \in \mathbb{N}$ *et* $\theta \in \mathbb{R}$
Calculer $C_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . \cos(k.\theta)$ *et* $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . \sin(k.\theta)$
Le résultat final sera donné sous forme factorisée

exercice 5 (*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2^k}{3^{2k+1}}$

exercice 6 (*)

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{3k+1}$

exercice 7 (,*classique*)**

Soit $n \in \mathbb{N}$ *et* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
Calculer $C_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \cos(k.x + y)$ *et* $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \sin(k.x + y)$
Le résultat final sera donné sous forme factorisée

exercice 8 (, *classique*)**

Soit $n \in \mathbb{N}$ *et* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
Calculer $C_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . \cos(k.x + y)$ *et* $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . \sin(k.x + y)$
Le résultat final sera donné sous forme factorisée

exercice 9 (****)

Soit $n \in \mathbb{N}$ *et* $x \in \mathbb{N}$
Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k.\cos(kx)$

exercice 10 (*, procédé télescopique*)**

Pour tout $k \geqslant 1$, *on note* $u_k = \ln(k+3) + \ln(k+2) - 2\ln(k)$.
Calculer $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ *pour* $n \geqslant 1$

exercice 11 (, classique*)**

Soit q *un nombre complexe et* $n \leqslant m$ *deux entier naturels.*
Déterminer $\sum\limits_{k=n}^{m} q^k$

exercice 12 (***)

Soit $q \neq 1$ *un complexe et* $n \in \mathbb{N}$.
Calculer $\sum\limits_{k=0}^{2n} q^{2k}$

exercice 13 (*****)

Pour $x \not\equiv 0[\dfrac{\pi}{2}]$, *montrer que* $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\cos(kx)}{\cos^k x} = \dfrac{\sin(n+1)x}{\sin x.\cos^n x}$

exercice 14 (***)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1)$

exercice 15 (*****)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Calculer $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \min(i,j)$

exercice 16 (***)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} (n-k+1)$

exercice 17 (*****)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Calculer $\sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} 2^{i+j}$

Solutions

résolution 1

- On sait que pour tout k entier on a $3^{2k+1} = 3.(3^2)^k = 3.9^k$

- On a ainsi

$$\sum_{k=0}^{n} 3^{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} 3.9^k = 3.\sum_{k=0}^{n} 9^k = 3.\frac{1-9^{n+1}}{1-9} = \frac{3}{8}(9^{n+1}-1)$$

$\boxed{\textbf{résolution 2}}$

- On a évidemment

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{2n+1} = (n+1).2^{2n+1}$$

résolution 3 • Nous allons passer en complexe pour introduire une suite géométrique.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
  On a

$$\begin{aligned} C_n + i.S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k.\theta) + i.\sum_{k=0}^{n} \sin(k.\theta) &= \sum_{k=0}^{n} (\cos(k.\theta) + i.\sin(k.\theta) \\ &= \sum_{k=0}^{n} e^{ik.\theta)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (e^{i\theta})^k \end{aligned}$$

On reconnait une somme géométrique de raison $e^{i\theta}$.

Une discussion commence.

i) Si $\theta \equiv 0[2\pi]$ on a $e^{i\theta} = 1$ et ainsi $C_n + i.S_n = n + 1$
On a simplement $C_n = \Re(n+1) = n+1$ et $S_n = \Im(n+1) = 0$

ii) Si $\theta \not\equiv 0[2\pi]$.
On a

$$C_n + i.S_n = \sum_{k=0}^{n} (e^{i\theta})^k = \frac{1 - (e^{i\theta})^{n+1}}{1 - e^{i\theta}}$$

On va utilise l'astuce de l'angle moitié

$$\begin{aligned} C_n + i.S_n = a &= \frac{1 - (e^{i\theta})^{n+1}}{1 - e^{i\theta}} \\ &= \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \\ &= \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} \\ &= \frac{e^{i(n+1)\theta/2}.\left(e^{i(n+1)\theta/2} - e^{-i(n+1)\theta/2}\right)}{e^{i\theta/2}.\left(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}\right)} \\ &= e^{in\theta/2}.\frac{2.i.\sin((n+1)\theta/2)}{2.i.\sin(\theta/2)} \\ &= e^{in\theta/2}.\frac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \end{aligned}$$

On a donc

$$C_n = \Re(e^{in\theta/2}.\frac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}) = \cos(n\theta/2).\frac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$$

et

$$S_n = \Im(e^{in\theta/2}.\frac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}) = \sin(n\theta/2).\frac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$$

résolution 4 • Nous allons passer en complexe pour introduire un binôme de Newton.

- Soit $n \in \theta$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
  On a

$$\begin{aligned}C_n + i.S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . \cos(k.\theta) + i. \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . \sin(k.\theta) &= \sum_{k=0}^{n} (\cos(k.\theta) + i. \sin(k.\theta) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} .e^{ik.\theta)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} .(e^{i\theta})^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} .(e^{i\theta})^k.1^{n-k} \\ &= (e^{i\theta}+1)^n\end{aligned}$$

  On va utiliser l'astuce de l'angle moitié

$$C_n + i.S_n = (e^{i\theta}+1)^n = \left[e^{i\theta/2}.\left(e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}\right)\right]^n = \left[e^{i\theta/2}.2.\cos(\theta/2)\right]^n = 2^n.\cos^n(\theta/2).e^{in\theta/2}$$

- On en déduit que

$$C_n = \Re(2^n.\cos^n(\theta/2).e^{in\theta/2}) = 2^n.\cos^n(\theta/2).\cos(n\theta/2)$$

  et

$$S_n = \Im(2^n.\cos^n(\theta/2).e^{in\theta/2}) = 2^n.\cos^n(\theta/2).\sin(n\theta/2)$$

résolution 5 • On commence par écrire que pour tout entier k on a

$$\frac{2^k}{3^{2k+1}} = \frac{2^k}{3.(3^2)^k} = \frac{1}{3}.\left(\frac{2}{9}\right)^k$$

- Première idée possible:

  On a ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{3^{2k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3}.\left(\frac{2}{9}\right)^k &= \frac{1}{3}\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{9}\right)^k - 1\right] \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1-(2/9)^{n+1}}{1-2/9} - 1\right) \\ &= \frac{1}{21}.\left(2 - 9\left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}\right) \\ &= \frac{2}{21}\left(1 - \left(\frac{2}{9}\right)^n\right)\end{aligned}$$

- Seconde idée possible:

  On a ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{3^{2k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3}.\left(\frac{2}{9}\right)^k &= \frac{1}{3}.\frac{2}{9}.\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{9}\right)^{k-1} \\ &= \frac{2}{3.9}\sum_{p=0}^{n-1}\left(\frac{2}{9}\right)^p \qquad \textit{on pose } p = k-1 \\ &= \frac{2}{3.9}.\frac{1-\left(\frac{2}{9}\right)^n}{1-\frac{2}{9}} \\ &= \frac{2}{21}\left(1 - \left(\frac{2}{9}\right)^n\right)\end{aligned}$$

résolution 6

- On commence par remarquer que pour tout entier k on a

$$2^{3k+1} = 2.(2^3)^k = 2.8^k$$

- Nous allons utiliser la formule du binôme de Newton.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{3k+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.2.8^k &= 2.\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.8^k \\ &= 2.\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.8^k.1^{n-k} \\ &= 2.(8+1)^n \\ &= 2.9^n\end{aligned}$$

résolution 7

- Nous allons passer en complexe pour introduire une suite géométrique.

- Soit $n \in \theta$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
  On a

$$\begin{aligned}
C_n + i.S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k.x+y) + i.\sum_{k=0}^{n} \sin(k.x+y) &= \sum_{k=0}^{n} (\cos(k.x+y) + i.\sin(k.x+y) \\
&= \sum_{k=0}^{n} e^{(ik.x+y)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} e^{iy}.(e^{ix})^k \\
&= e^{iy}.\sum_{k=0}^{n} (e^{ix})^k
\end{aligned}$$

On reconnait une somme géométrique de raison e^{ix}.

Une discussion commence.

i) Si $x \equiv 0[2\pi]$ on a $e^{ix} = 1$ et ainsi $C_n + i.S_n = e^{iy}.(n+1)$
On a simplement $C_n = \Re(e^{iy}.(n+1)) = (n+1)\cos y$ et $S_n = \Im(e^{iy}.(n+1)) = (n+1)\sin y$

ii) Si $x \not\equiv 0[2\pi]$.
On a

$$C_n + i.S_n = e^{iy}.\sum_{k=0}^{n} (e^{ix})^k = e^{iy}.\frac{1-(e^{ix})^{n+1}}{1-e^{ix}}$$

On va utilise l'astuce de l'angle moitié

$$\begin{aligned}
C_n + i.S_n &= e^{iy}.\frac{1-(e^{ix})^{n+1}}{1-e^{ix}} \\
&= e^{iy}.\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} \\
&= e^{iy}.\frac{e^{i(n+1)x}-1}{e^{ix}-1} \\
&= e^{iy}.\frac{e^{i(n+1)x/2}.\left(e^{i(n+1)x/2} - e^{-i(n+1)x/2}\right)}{e^{ix/2}.\left(e^{ix/2} - e^{-ix/2}\right)} \\
&= e^{i(nx/2+y)}.\frac{2i.\sin((n+1)x/2)}{2i.\sin(x/2)} \\
&= e^{i(nx/2+y)}.\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}
\end{aligned}$$

On a donc

$$C_n = \Re(e^{i(nx/2+y)}.\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}) = \cos(nx/2+y).\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$$

et

$$S_n = \Im(e^{i(nx/2+y)}.\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}) = \sin(nx/2+y).\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$$

résolution 8 • Nous allons passer en complexe pour introduire un binôme de Newton.

- Soit $n \in \theta$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
  On a

$$\begin{aligned}
C_n + i.S_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . \cos(k.x+y) + i. \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . \sin(k.x+y) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (\cos(k.x+y) + i.\sin(k.x+y) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} .e^{ik.x+y)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{iy}.(e^{ix})^k \\
&= e^{iy}. \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} .(e^{i\theta})^k.1^{n-k} \\
&= e^{iy}.(e^{i\theta}+1)^n
\end{aligned}$$

On va utiliser l'astuce de l'angle moitié

$$\begin{aligned}
C_n + i.S_n = e^{iy}.(e^{ix}+1)^n &= e^{iy}. \left[e^{ix/2}. \left(e^{ix/2} + e^{-ix/2}\right)\right]^n \\
&= e^{iy}. \left[e^{ix/2}.2.\cos(x/2)\right]^n \\
&= 2^n.\cos^n(x/2).e^{inx/2}.e^{iy} \\
&= 2^n.\cos^n(x/2).e^{(inx/2+y)}
\end{aligned}$$

- On en déduit que

$$C_n = \Re(2^n.\cos^n(x/2).e^{(inx/2+y)}) = 2^n.\cos^n(x/2).\cos(nx/2+y)$$

et

$$S_n = \Im(2^n.\cos^n(x/2).e^{(inx/2+y)}) = 2^n.\cos^n(x/2).\sin(nx/2+y)$$

résolution 9 • Nous allons passer en complexe pour introduire une suite géométrique

- Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{N}$
  On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} 2^k . \cos(kx) &= \sum_{k=0}^{n} 2^k . \Re(e^{ikx}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \Re(2^k . e^{ikx}) \\
&= \Re\left(\sum_{k=0}^{n} 2^k . e^{ikx}\right) \\
&= \Re\left(\sum_{k=0}^{n} \left(2 . e^{ix}\right)^k\right) \\
&= \Re\left(\frac{1 - 2^{n+1} . e^{i(n+1)x}}{1 - 2 . e^{ix}}\right)
\end{aligned}$$

- Ici, il n'est pas question d'utiliser l'astuce de l'angle moitié.
  On écrit donc

$$\begin{aligned}
\frac{(1 - 2^{n+1} . e^{i(n+1)x}}{1 - 2 . e^{ix}} &= \frac{1 - 2^{n+1} . \cos((n+1)x) - i . 2^{n+1} . \sin((n+1)x)}{(1 - 2 . \cos x - 2i . \sin x} \\
&= \frac{1 - 2^{n+1} . \cos((n+1)x) - i . 2^{n+1} . \sin((n+1)x))(1 - 2\cos x + 2i . \sin x)}{(1 - 2 . \cos x)^2 + 4 . \sin^2 x}
\end{aligned}$$

Il suffit alors de développer le numérateur et de considérer la partie réelle

résolution 10

- Soit $n \geqslant 1$ fixé.
  On a

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k &= \sum_{k=1}^{n} \ln(k+3) + \ln(k+2) - 2\ln(k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \ln(k+3) + \sum_{k=1}^{n} \ln(k+2) - 2\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \end{aligned}$$

- Dans la première [resp. deuxième] somme,
  on effectue le changement d'indice $k \leftarrow k+3$ [resp. $k \leftarrow k+2$].

  Ce qui donne

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=4}^{n+3} \ln(k) + \sum_{k=3}^{n+2} \ln(k) - 2\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \\ &= \ln 3 - 2(\ln 1 + \ln 2 + \ln 3) \\ &\quad + (1+1-2).\sum_{k=4}^{n} \ln(k) \\ &\quad + 2\left[\ln(n+1) + \ln(n+2)\right] + \ln(n+3) \\ &= -2\ln 2 - \ln 3 + 2\left[\ln(n+1) + \ln(n+2)\right] + \ln(n+3) \end{aligned}$$

résolution 11 • Le cas $q = 1$ donne directement $\sum_{k=n}^{m} q^k = m - n + 1$

On envisage dorénavant le cas $q \neq 1$

- Première idée.
  On effectue le changement d'indice $p \longleftarrow k - n$, et l'on obtient

$$\sum_{k=n}^{m} q^k = \sum_{p=0}^{m-n} q^{n+p} = q^n . \sum_{p=0}^{m-n} q^p = q^n . \frac{1 - q^{m-n+1}}{1 - q} = \frac{q^n - q^{m+1}}{1 - q}$$

- Seconde idée.
  On écrit, dans le cas où $n \geqslant 1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{m} q^k &= \sum_{k=0}^{m} q^k - \sum_{k=0}^{n-1} q^k \\ &= \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q} - \frac{1 - q^n}{1 - q} \\ &= \frac{q^n - q^{m+1}}{1 - q} \end{aligned}$$

  et on constate que cette formule est encore valable pour $n = 0$

- Conclusion

$$\sum_{k=n}^{m} q^k = \begin{cases} m - n + 1 & \text{si } q = 1 \\ \dfrac{q^n - q^{m+1}}{1 - q} & \text{sinon} \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{résolution 12}}$

$$\sum_{k=0}^{2n} q^{2k} = \sum_{k=0}^{2n} (q^2)^k = \frac{1-(q^2)^{2n+1}}{1-q^2} = \frac{1-q^{4n+2}}{1-q^2}$$

remarque: ici, poser le changement d'indice $j \longleftarrow 2k$ serait une catastrophe...

résolution 13 • Soit $x \not\equiv 0[\dfrac{\pi}{2}]$ et $n \in \mathbb{N}$.

En passant en complexe, cela donne

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Re(e^{ikx})}{\cos^k x} = \sum_{k=0}^{n} \Re\left(\frac{(e^{ix})^k}{\cos^k x}\right) = \Re\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{e^{ix}}{\cos x}\right)^k\right]$$

- On remarque que

$$\frac{e^{ix}}{\cos x} = \frac{\cos x + i\sin x}{\cos x} = 1 + i.\frac{\sin x}{\cos x}$$

Or par hypothèse, on a $x \not\equiv 0[\dfrac{\pi}{2}]$, et donc $\sin x \neq 0$.

On vient de prouver que $\dfrac{e^{ix}}{\cos x} \neq 1$, et on a donc la formule

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{e^{ix}}{\cos x}\right)^k &= \frac{1-\left(\dfrac{e^{ix}}{\cos x}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{e^{ix}}{\cos x}} \\ &= \frac{1}{\cos^n x}.\frac{\cos^n x - e^{i(n+1)x}}{\cos x - e^{ix}} \\ &= \frac{1}{\cos^n x}.\frac{\cos^n x - \cos((n+1)x) - i\sin((n+1)x)}{-i\sin x} \\ &= \frac{i}{\cos^n x}..\frac{\cos^n x - \cos((n+1)x) - i\sin((n+1)x)}{\sin x}\end{aligned}$$

On en déduit bien que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k x} = \Re\left(\frac{i}{\cos^n x}..\frac{\cos^n x - \cos((n+1)x) - i\sin((n+1)x)}{\sin x}\right) = \frac{\sin(n+1)x}{\sin x.\cos^n x}$$

résolution 14

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a

$$\sum_{k=1}^{n} 2k-1 = 2.\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = 2.\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$$

- **remarque:** ici, poser le changement d'indice $j \longleftarrow 2k-1$ serait une catastrophe...

$\boxed{\textbf{résolution 15}}$

résolution 16 • Soit $n \in \mathbb{N}^*$ (fixé)

Le changement d'indice $j \longleftarrow n-k+1$ donne

$$\sum_{k=1}^{n} n-k+1 = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$$

résolution 17 • Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a
$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} 2^{i+j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} 2^{i+j} = \sum_{i=1}^{n} 2^i \sum_{j=i}^{n} 2^j$$

• Pour $i \leqslant n$ fixés, on a
$$\sum_{j=i}^{n} 2^j = 2^i . \sum_{j=i}^{n} 2^{j-i} = 2^i . \sum_{k=0}^{n-i} 2^k = 2^i . \frac{1 - 2^{n-i+1}}{1-2} = 2^i.(2^{n-i+1} - 1) = 2^{n+1} - 2^i$$

• Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on en déduit donc
$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} 2^{i+j} &= \sum_{i=1}^{n} 2^i.(2^{n+1} - 2^i) \\
&= 2^{n+1} . \sum_{i=1}^{n} 2^i - \sum_{i=1}^{n} 2^i . 2^i \\
&= 2^{n+1} . \sum_{i=1}^{n} 2^i - \sum_{i=1}^{n} 4^i \\
&= 2^{n+1}.(2^{n+1} - 2) - \frac{4^{n+1} - 4}{3} \\
&= 4^{n+1} - 2^{n+2} - \frac{4^{n+1}}{3} + \frac{4}{3} \\
&= \frac{2}{3}.4^{n+1} - 2^{n+2} + \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

car en effet:
- $\sum_{i=1}^{n} 2^i = \sum_{i=0}^{n} 2^i - 1 = \dfrac{1 - 2^{n+1}}{1-2} - 1 = 2^{n+1} - 2$
- $\sum_{i=1}^{n} 4^i = \sum_{i=0}^{n} 4^i - 1 = \dfrac{1 - 4^{n+1}}{1-4} - 1 = \dfrac{4^{n+1} - 4}{3}$