Sommes de Riemann (1A)

exercice 1 (*)

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{k^2+2nk+n^2}$

exercice 2 (*)

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\left(\dfrac{k}{n}\right)$

exercice 3 (*)

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$

exercice 4 (***)

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{(2n)!}{n^n.n!}\right)^{1/n}$

exercice 5

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\dfrac{k}{n}+1\right)$

Solutions

résolution 1 • Posons pour tout $n \geqslant 1, u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{k^2+nk+n^2}$

- Pour $n \geqslant 1$ on a

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\dfrac{k}{n}\right)^2 + 2\dfrac{k}{n} + 1}$$

- Considérons $\boxed{\begin{array}{rcl} f : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{t^2+2t+1} \end{array}}$

  Notons $a = 0$ et $b = 1$

  Comme f est une fonction continue sur le segment $[a,b] = [0,1]$,
  on sait par théorème sur les sommes de Riemann que

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a + k.\frac{b-a}{n}) \longrightarrow \int_a^b f(t)dt$$

- On a

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^2} = \left[\frac{-1}{1+t}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

- On a prouvé que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+2nk+n^2} = \frac{1}{2}}$$

$\boxed{\textbf{résolution 2}}$ • Posons pour tout $n \geqslant 1, u_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \sin\left(\dfrac{k}{n}\right)$

• Considérons $\boxed{\begin{array}{rcl} f : [0{,}1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sin(t) \end{array}}$

Notons $a = 0$ et $b = 1$

Comme f est une fonction continue sur le segment $[a{,}b] = [0{,}1]$,
on sait par théorème sur les sommes de Riemann que

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a + k.\frac{b-a}{n}) \longrightarrow \int_a^b f(t)dt$$

• On a

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \sin(t)dt = [-\cos(t)]_0^1 = 1 - \cos(1)$$

• On a prouvé que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) = 1 - \cos(1)}$$

résolution 3 • Posons pour tout $n \geqslant 1, u_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$

- Considérons $\boxed{\begin{array}{rcl} f : [0{,}1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sin(\pi.t) \end{array}}$

  Notons $a = 0$ et $b = 1$

  Comme f est une fonction continue sur le segment $[a{,}b] = [0{,}1]$,
  on sait par théorème sur les sommes de Riemann que

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a + k.\frac{b-a}{n}) \longrightarrow \int_a^b f(t)dt$$

- On a

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \sin(\pi.t)dt = \left[-\frac{\cos(\pi.t)}{\pi}\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}$$

- On a prouvé que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k.\pi}{n}\right) = \frac{2}{\pi}}$$

résolution 4 • Notons pour tout $n \geqslant 1, u_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n^n.n!}\right)^{1/n}$ et $v_n = \ln u_n$

- Commençons par remarquer que pour tout $n \geqslant 1$ on a

$$\frac{(2n)!}{n!} = (n+1)(n+2)(n+3)\dots(2n) = \prod_{k=1}^{n}(k+n)$$

et donc

$$\frac{(2n)!}{n^n.n!} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(k+n)}{n^n} = \prod_{k=1}^{n}\frac{k+n}{n} = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}+1\right)$$

- Pour $n \geqslant 1$, on a ainsi

$$v_n = \frac{1}{n}\ln\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}+1\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}+1\right)$$

- Considérons $\boxed{\begin{array}{rcl} f : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \ln(t+1) \end{array}}$

Notons $a = 0$ et $b = 1$

Comme f est une fonction continue sur le segment $[a,b] = [0,1]$,
on sait par théorème sur les sommes de Riemann que

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k.\frac{b-a}{n}\right) \longrightarrow \int_a^b f(t)dt$$

- On réalise une ipp en posant $u(t) = \ln(t+1)$ et $v'(t) = 1$.
(on aura alors $u'(t) = \dfrac{1}{t+1}$ et on choisit (astucieusement!) $v(t) = t+1$)

$$\int_0^1 \ln(t+1)dt = [(t+1)\ln(t+1)]_0^1 - \int_0^1 1.dt = 2\ln 2 - 1$$

- Pour tout $n \geqslant 1$ on a $u_n = e^{v_n}$
Comme la fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$ (donc en particulier en $2\ln 2 - 1$),
on en déduit que

$$\lim u_n = \lim e^{v_n} = e^{2\ln 2 - 1} = \frac{4}{e}$$

- On a prouvé que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(2n)!}{n^n.n!}\right)^{1/n} = \frac{4}{e}}$$

résolution 5 • Pour $n \geqslant 1$, notons

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}+1\right)$$

• Considérons $\boxed{\begin{array}{rcl} f : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \ln(t+1) \end{array}}$

Notons $a = 0$ et $b = 1$

Comme f est une fonction continue sur le segment $[a,b] = [0,1]$,
on sait par théorème sur les sommes de Riemann que

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+k.\frac{b-a}{n}) \longrightarrow \int_a^b f(t)dt$$

• On réalise une ipp en posant $u(t) = \ln(t+1)$ et $v'(t) = 1$.
(on aura alors $u'(t) = \dfrac{1}{t+1}$ et on choisit (astucieusement!) $v(t) = t+1$)

$$\int_0^1 \ln(t+1)dt = [(t+1)\ln(t+1)]_0^1 - \int_0^1 1.dt = 2\ln 2 - 1$$

• Conclusion: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}+1\right) = 2\ln 2 - 1$