Equivalents, o et O de suites (1A)

exercice 1

Déterminer un équivalent en $+\infty$ *de* $u_n = \dfrac{(n+1)^2}{2.(n-5)^4}$

exercice 2

Déterminer un équivalent de $u_n = \dfrac{4^n}{\ln(1+\dfrac{1}{n})}$

exercice 3

λ *est une constante réelle.*
Déterminer un équivalent de $u_n = \lambda - 1 - \dfrac{3}{n}$

exercice 4

Déterminer un équivalent de $u_n = 3 + e^{-n}$

exercice 5

Déterminer un équivalent de $u_n = e^n + n + 4$

exercice 6

Déterminer un équivalent en $+\infty$ *de* $u_n = \ln(1+\dfrac{2}{n^2}) + \dfrac{1}{n}$

exercice 7

Déterminer un équivalent en $+\infty$ *de* $u_n = \ln(1+\dfrac{2}{n^2}) - \dfrac{2}{n^2}$

exercice 8

Déterminer un équivalent de $u_n = \dfrac{\cos(1/n) - n.\sin(1/n)}{\mathrm{sh}(1/n)}$

exercice 9

Déterminer un équivalent de $u_n = 3\ln(n^2+1) - \ln(n^6+2)$

exercice 10

Déterminer un équivalent de $u_n = \sqrt{n^4+n}$

exercice 11

Déterminer un équivalent de $u_n = \sqrt{n^4+n} - n^2$

exercice 12

Déterminer un équivalent de $u_n = |-2n^3 + \ln(n)|$

exercice 13

Soient a et b deux réels non nuls.
A quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on respectivement

$$a)\ a^n = o(b^n) \qquad b)\ a^n = O(b^n) \qquad c)\ \frac{1}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^b}\right) \qquad d)\ \frac{1}{n^a} = O\left(\frac{1}{n^b}\right)$$

exercice 14

Déterminer un équivalent de $u_n = \dfrac{4^n + 3^n}{\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{4}{n}}$

exercice 15

Solutions

$\boxed{\textbf{résolution 1}}$ • L'équivalent d'un quotient est égal au quotient des équivalents

- On a

$$(n+1)^2 \sim n^2$$

- et

$$(n-5)^4 \sim n^4$$

- donc

$$u_n \sim \frac{n^2}{2.n^4} = \frac{1}{2n^2}$$

résolution 2 • L'équivalent d'un quotient est égal au quotient des équivalents

- On sait que
$$\ln(1+x) = x + o(x) \underset{0}{\sim} x$$
- donc
$$\ln(1+\frac{1}{n}) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$
- et ainsi
$$u_n \underset{\infty}{\sim} \frac{4^n}{\dfrac{1}{n}} = n.4^n$$

résolution 3 • SI u_n POSSÈDE UNE LIMITE FINIE NON NULLE l ALORS $u_n \sim l$

- On a ici
$$\lim u_n = \lambda - 1$$
- on en déduit que
  i) premier cas $\lambda \neq 1$

  On a alors
$$u_n \sim \lambda - 1$$

  ii) second cas $\lambda = 1$

  On a alors
$$u_n = -\frac{3}{n} \sim \frac{-3}{n}$$

résolution 4 • SI u_n POSSÈDE UNE LIMITE FINIE NON NULLE l ALORS $u_n \sim l$

- On a

$$\lim u_n = 3$$

- donc

$$u_n \sim 3$$

résolution 5 • Si il y a un terme prépondérant dans une somme, c'est lui l'équivalent de la somme

• On a donc ici

$$u_n \sim e^n$$

résolution 6 Je propose deux solutions

1. 1ère idée:
   - Si il y a un terme prépondérant dans une somme, c'est lui l'équivalent de la somme
   - On a
   $$\ln(1+\frac{2}{n^2}) \sim \frac{2}{n^2}$$
   - et $\frac{1}{n}$ est prépondérant sur $\frac{2}{n^2}$
   - donc
   $$u_n \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$
2. 2nde idée:
   - On fait un DL puis on gardera le terme prépondérant
   - On a
   $$\ln(1+\frac{2}{n^2}) = \frac{2}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$
   - donc
   $$u_n = \frac{2}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}) + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$
   (on écrit toujours un DL par ordre décroissant de prépondérance)
   - Ainsi
   $$u_n \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

résolution 7 • **Ici, contrairement à l'exercice précédent, les deux termes de la somme sont du mÃªme ordre (pas de terme prépondérant), donc on effectue nécessairement un DL !**

- On a

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

- Donc

$$\ln(1+\frac{2}{n^2}) = \frac{2}{n^2} - \frac{\left(\frac{2}{n^2}\right)^2}{2} + o(\frac{1}{n^4}) = \frac{2}{n^2} - \frac{2}{n^4} + o(\frac{1}{n^4})$$

- D'où

$$u_n = \frac{2}{n^2} - \frac{2}{n^4} + o(\frac{1}{n^4}) - \frac{2}{n^2} = -\frac{2}{n^4} + o(\frac{1}{n^4})$$

- Ainsi

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{2}{n^4}$$

résolution 8 • L'ÉQUIVALENT D'UN QUOTIENT EST ÉGAL AU QUOTIENT DES ÉQUIVALENTS

- On a

$$\mathrm{sh}(x) = x + o(x) \underset{0}{\sim} x$$

- donc

$$\mathrm{sh}(1/n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

- On a

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

- donc

$$\begin{aligned} \cos(1/n) - n.\sin(1/n) &= 1 - \frac{(1/n)^2}{2} + o(1/n^2) - n.\left(1/n - \frac{(1/n)^3}{6} + o(1/n^3)\right) \\ &= 1 - \frac{(1/n)^2}{2} + o(1/n^2) - 1 + \frac{(1/n)^2}{6} + o(1/n^2) \\ &= -\frac{(1/n)^2}{3} + o(1/n^2) \\ &\sim -\frac{(1/n)^2}{3} = \frac{-1}{3}.\frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

- On en déduit que

$$u_n \sim \frac{\frac{-1}{3}.\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{-1}{3}.\frac{1}{n}$$

résolution 9

- On sait que, en 0, on a

$$\ln(1+x) = x + o(x)$$

- ON MET EN FACTEUR LE TERME PRÉPONDÉRANT POUR FAIRE APPARAÃ®TRE UNE QUANTITÉ QUI TEND VERS 0

-

$$\begin{aligned}
u_n &= 3.\ln\left(n^2.(1+\frac{1}{n^2})\right) - \ln\left(n^6.(1+\frac{1}{n^6})\right) \\
&= 3.\ln(n^2) + 3.\ln(1+\frac{1}{n^2}) - \ln(n^6) - \ln(1+\frac{1}{n^6}) \\
&= 6.\ln(n) + 3.\ln(1+\frac{1}{n^2}) - 6.\ln(n) - \ln(1+\frac{1}{n^6}) \\
&= 3.\ln(1+\frac{1}{n^2}) - \ln(1+\frac{1}{n^6})
\end{aligned}$$

- On a

$$\ln(1+\frac{1}{n^2}) = \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \qquad \text{et} \qquad \ln(1+\frac{1}{n^6}) = \frac{1}{n^6} + o(\frac{1}{n^6})$$

- Ainsi

$$\begin{aligned}
u_n &= 3\left(\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right) - \frac{1}{n^6} + o(\frac{1}{n^6}) \\
&= \frac{3}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \\
&\sim \frac{3}{n^2}
\end{aligned}$$

résolution 10 • ON NE PEUT COMPOSER LES ÉQUIVALENTS SAUF EXCEPTIONS!... LA FONCTION $\sqrt{}$ EST UNE EXCEPTION !

- On a

$$n^4 + n \sim n^4$$

- donc

$$u_n = \sqrt{n^4 + n} \sim \sqrt{n^4} = n^2$$

résolution 11 Je propose deux solutions

1. 1ère idée: en effectuant un DL
   - On sait **qu'en** 0 on a
   $$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha.x + o(x)$$
   donc
   $$(1+x)^{1/2} = 1 + \alpha.x + o(x) \qquad \text{(au voisinage de 0)}$$
   - On met en facteur le terme principal pour faire apparaÃ®tre une quantité qui tend vers 0
   $$\begin{aligned} u_n = \sqrt{n^4+n} - n^2 &= \sqrt{n^4(1+\frac{1}{n^3}} - n^2 \\ &= n^2.\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{1/2} - n^2 \\ &= n^2.\left(1+\frac{1}{2}.\frac{1}{n^3} + o(\frac{1}{n^3})\right) - n^2 \\ &= n^2 + \frac{1}{2}.\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}) - n^2 \\ &= \frac{1}{2}.\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}) \qquad \textit{(noter la nouvelle précision du DL)} \\ &\sim \frac{1}{2}.\frac{1}{n} = \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

2. 2nde idée: on utilise l'astuce de la quantité conjuguée
   - On a
   $$u_n = \sqrt{n^4+n} - n^2 = \frac{(n^4+n)-(n^2)^2}{\sqrt{n^4+n}+n^2} = \frac{n}{\sqrt{n^4+n}+n^2}$$
   - On remarque en mettant en facteur le terme dominant que
   $$\sqrt{n^4+n} + n^2 = \sqrt{n^4(1+\frac{1}{n^3})} + n^2 = n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}+1\right)$$
   - On remarque que cette dernière parenthèse tend vers 2, donc est équivalente à 2 !
   - Ainsi
   $$u_n = \frac{n}{n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}+1\right)} \sim \frac{n}{n^2.2} = \frac{1}{2n}$$

résolution 12 • On ne peut composer les équivalents sauf exceptions!... la fonction *valeur absolue* est une exception !

- On a

$$-2n^3 + \ln(n) \sim -2n^3$$

- donc

$$u_n = |-2n^3 + \ln(n)| \sim |-2n^3| = 2n^3$$

résolution 13 a) • Par définition, on a $a^n = o(b^n)$ lorsque $\lim \dfrac{a^n}{b^n} = \lim \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = 0$.

- La suite $\left(\left(\dfrac{a}{b}\right)^n\right)$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{a}{b}$.
- On sait qu'elle converge ssi $\left|\dfrac{a}{b}\right| < 1$
- Conclusion: $\boxed{a^n = o(b^n) \iff |a| < |b|}$

b) • Par définition, on a $a^n = o(b^n)$ lorsque la suite $\left(\left(\dfrac{a}{b}\right)^n\right)$ est bornée, cÃ d ssi la suite $\left(\left|\dfrac{a}{b}\right|^n\right)$ est majorée.

- Conclusion: $\boxed{a^n = o(b^n) \iff |a| \leqslant |b|}$ (*)

* *ici, si on le souhaite, mais ce n'est pas nécessaire, on peut le prouver ainsi:*
i) *si* $\left|\dfrac{a}{b}\right| < 1$ *on a* $\lim \left|\dfrac{a}{b}\right|^n = 0$, *la suite est donc majorée car convergente*
ii) *si* $\left|\dfrac{a}{b}\right| = 1$, *la suite* $\left(\left|\dfrac{a}{b}\right|^n\right)$ *est constante donc majorée*
iii) *si* $\left|\dfrac{a}{b}\right| > 1$, *la suite* $\left(\left|\dfrac{a}{b}\right|^n\right)$ *tend vers* $+\infty$ *donc n'est pas majorée*

c) • Par définition, on a $\dfrac{1}{n^a} = o\left(\dfrac{1}{n^b}\right)$ lorsque $\lim \dfrac{\frac{1}{n^a}}{\frac{1}{n^b}} = \lim \dfrac{n^b}{n^a} = 0$

- Conclusion: $\boxed{\dfrac{1}{n^a} = o\left(\dfrac{1}{n^b}\right) \iff a > b}$

d) • Par définition, on a $\dfrac{1}{n^a} = O\left(\dfrac{1}{n^b}\right)$ lorsque la suite $\left(\dfrac{\frac{1}{n^a}}{\frac{1}{n^b}}\right) = \left(n^{b-a}\right)$ est bornée.

- Conclusion: $\boxed{\dfrac{1}{n^a} = O\left(\dfrac{1}{n^b}\right) \iff a \geqslant b}$ (**)

** *ici, si on le souhaite, mais ce n'est pas nécessaire, on peut le prouver ainsi:*
i) *si* $a > b$ *on a* $\lim n^{b-a} = 0$, *la suite* (n^{b-a}) *est convergente donc bornée*
ii) *si* $a = b$, *la suite* (n^{b-a}) *est constante donc bornée*
iii) *si* $b > a$ *on a* $\lim n^{b-a} = \infty$, *la suite* (n^{b-a}) *n'est donc pas bornée*

résolution 14

- L'équivalent d'un quotient est égal au quotient des équivalents
- S'il y a un terme prépondérant dans une somme, c'est lui l'équivalent de la somme
- ainsi
$$4^n + 3^n \sim 4^n$$
- et
$$\frac{1}{n^2} + \frac{4}{n} \sim \frac{4}{n}$$
- donc
$$u_n \sim \frac{4^n}{\frac{4}{n}} = n.4^{n-1}$$

résolution 15