

Droites, Cercles, Projeté orthogonal (1A)

exercice 1

Écrire une représentation paramétrique de la droite passant par le point $A(2,4)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = (3, -1)$

exercice 2

Écrire une représentation paramétrique de la droite d'équation cartésienne $x = 3$

exercice 3

Écrire une représentation paramétrique de la droite d'équation cartésienne $2x + 3y - 4 = 0$

exercice 4

Déterminer une équation cartésienne de la droite qui passe par les points $A(1,2)$ et $B(2, -3)$

exercice 5

Déterminer une équation cartésienne de la droite qui passe par le point $A(2, -3)$ et de coefficient directeur 4

exercice 6

Déterminer une équation paramétrique de la droite passant par le point $A(2,3)$ et de vecteur normal $\vec{n} = (1,5)$

exercice 7

Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par le point $A(2, -1)$ et de vecteur normal $\vec{n} = (1,3)$

exercice 8

Donner une équation cartésienne de la droite (D) parallèle à la droite (Δ) d'équation $3x + 2y + 9 = 0$ et passant par $A(1, -2)$

exercice 9

Donner une représentation paramétrique de la droite (D) qui passe par le point $A(4, -1)$ et qui est perpendiculaire à la droite (Δ) d'équation $2x - 3y + 5 = 0$

exercice 10 (**)

On considère la droite (D) qui passe par le point $A(1,3)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = (-1,2)$
Déterminer le projeté orthogonal du point $B(0,7)$ sur la droite (D) .

exercice 11 (**)

On considère la droite (D) d'équation cartésienne $x + y - 4 = 0$
Déterminer le projeté orthogonal du point $B(5,2)$ sur la droite (D) .

Solutions

résolution 1

- On écrit directement

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto A + t\vec{d} = (2 + 3t, 4 - t) \end{aligned}$$

- Ce qui peut se présenter aussi sous la forme

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 - t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

résolution 2

C'est tout simplement

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

résolution 3

- On peut paramétrer par exemple par x , ce qui donne

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

- On peut aussi paramétrer par y , ce qui donne

$$\begin{cases} x = 2 - \frac{3}{2}t \\ y = t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

résolution 4

• Il s'agit de la droite qui passe par le point $A(1,2)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = \overrightarrow{AB} = (1, -5)$.

- Son équation cartésienne est donnée par le déterminant

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ y-2 & -5 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{soit } 5x + y - 7 = 0$$

résolution 5

1. Il s'agit de la droite qui passe par le point $A(2, -3)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = (1, 4)$

2. Son équation cartésienne est donnée par le déterminant

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ y+3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{soit } {}_{quad}4x - y - 11 = 0 \quad \text{ou encore } y = 4x - 11$$

3. Une autre idée consiste à dire que l'équation est du type $y = 4x + p$

Comme $A(2, -3)$ est sur la droite, on a $-3 = 4 \times 2 + p$ ce qui donne $p = -11$

On retrouve

$$y = 4x - 11$$

résolution 6

- On peut dire que c'est la droite passant par le point $A(2,3)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = (-5,1)$

- Une équation paramétrique possible est donc

$$\begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 3 + t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

résolution 7

- Son équation cartésienne est donnée par le produit scalaire

$$\begin{pmatrix} x - 2 \\ y - (-1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

ce qui donne

$$x + 3y + 1 = 0$$

résolution 8

- première idée:

Comme la droite (D) a la même direction que la droite (Δ) elle possèdera une équation du type

$$3x + 2y + c = 0$$

où c est une constante que l'on détermine en disant que $A(1, -2)$ passe par (D)

Cela donne la condition

$$c = 1$$

Ainsi l'équation cartésienne de (D) est

$$3x + 2y + 1 = 0$$

- seconde idée:

Comme (Δ) a pour équation $3x + 2y + 9 = 0$, on sait qu'un vecteur normal est $\vec{n} = (3,2)$.

(D) est ainsi la droite qui passe par le point $A(1, -2)$ et de vecteur normal $\vec{n} = (3,2)$.

Son équation est ainsi donnée par le produit scalaire

$$\begin{pmatrix} x - 1 \\ y - (-2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

ce qui donne

$$3x + 2y + 1 = 0$$

- troisième idée:

Comme (Δ) a pour équation $3x + 2y + 9 = 0$, on sait qu'un vecteur directeur est $\vec{d} = (-2,3)$.

(D) est ainsi la droite qui passe par le point $A(1, -2)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = (-2,3)$.

Son équation est ainsi donnée par le déterminant

$$\begin{vmatrix} x - 1 & -2 \\ y - (-2) & 3 \end{vmatrix} = 0$$

ce qui donne $3x + 2y + 1 = 0$

résolution 9

1. La droite (Δ) d'équation $2x - 3y + 5 = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n} = (2, -3)$

2. Ce vecteur $\vec{n} = (2, -3)$ est un vecteur directeur de (D) .

3. Ainsi (D) est la droite qui passe par le point $A(4, -1)$ et de vecteur directeur $\vec{n} = (2, -3)$, son équation paramétrique est ainsi

$$\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -1 - 3t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

résolution 10

- Faire un dessin-schéma pour visualiser la situation

- Notons K le projeté orthogonal du point $B(0,7)$ sur la droite (D) .

D'après la formule du projeté orthogonal, on a

$$\overrightarrow{AK} = \frac{\langle \overrightarrow{AB}, \vec{d} \rangle}{\|\vec{d}\|^2} \cdot \vec{d}$$

c'est à dire encore

$$K = A + \frac{\langle \overrightarrow{AB}, \vec{d} \rangle}{\|\vec{d}\|^2} \cdot \vec{d}$$

Le calcul donne

$$\begin{aligned} - \|\vec{d}\|^2 &= (-1)^2 + 2^2 = 5 \\ - \langle \overrightarrow{AB}, \vec{d} \rangle &= \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle = 9 \end{aligned}$$

D'où

$$K = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{9}{5} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 33/5 \end{pmatrix}$$

résolution 11

- Faire un dessin-schéma pour visualiser la situation

- On commence par déterminer un point et un vecteur directeur de (D) .
On prend par exemple $A(4,0)$ et $\vec{d} = (1, -1)$

- Notons K le projeté orthogonal du point $B(5,2)$ sur la droite (D) .

D'après la formule du projeté orthogonal, on a

$$\overrightarrow{AK} = \frac{\langle \overrightarrow{AB}, \vec{d} \rangle}{\|\vec{d}\|^2} \cdot \vec{d}$$

c'est à dire encore

$$K = A + \frac{\langle \overrightarrow{AB}, \vec{d} \rangle}{\|\vec{d}\|^2} \cdot \vec{d}$$

Le calcul donne

$$\begin{aligned} - \|\vec{d}\|^2 &= 1^2 + (-1)^2 = 2 \\ - \langle \overrightarrow{AB}, \vec{d} \rangle &= \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle = -1 \end{aligned}$$

D'où

$$K = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$