équivalents, limites

exercice 1 (*)

Donner le DL à l'ordre 3 en 0 de $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$

exercice 2 (*)

Donner le DL à l'ordre 4 en 0 de $\dfrac{1}{1+x^2}$

exercice 3 (*)

Donner le DL à l'ordre 5 en 0 de $x\cos(x) - x^2.\sin(x)$

exercice 4 (*)

Donner le DL à l'ordre 2 en 3 de e^x

exercice 5 (*)

Déterminer en $+\infty$ *le développement asymptotique de* $\dfrac{x}{x+3}$ *à la précision* $o(x^{-2})$

exercice 6 (*équivalent d'un produit ou d'un quotient*)

Déterminer un équivalent en 0 *de* $\dfrac{\sin x}{\ln(1+x)}.e^x$

exercice 7 (*équivalent d'une puissance*)

Déterminer un équivalent en 0 *de* $\sqrt{\ln(1+x)}$

exercice 8 (*équivalent d'une puissance*)

Déterminer un équivalent en 0 *de* $(1+x)^{1/x^2}$

exercice 9 (*équivalent d'une somme ou d'une différence*)

Déterminer un équivalent en 0 *de* $\sin x - \ln(1+x^2)$

exercice 10 (*équivalent d'une somme ou d'une différence*)

Déterminer un équivalent en 0 *de* $\sin x - \mathrm{sh}(x) + x^2$

exercice 11 (*)

Déterminer un équivalent en 4 de $\dfrac{x^2-5x}{x-4}$

exercice 12 (*)

Déterminer un équivalent en 0 *de* $x + \ln x$

exercice 13 (*)

Déterminer un équivalent en $+\infty$ *de* $x + \ln x$

exercice 14 (*)

Déterminer le DL à l'ordre 5 en $\dfrac{\pi}{2}$ *de* $\cos(x)$

exercice 15 (**)

Déterminer le DL à l'ordre 2 en 2 de $\sqrt{x}$

exercice 16 (**)

Déterminer un équivalent quand $x \to +\infty$ *de* $\cos(1/x) + \sin(1/x) - \exp(1/x)$

exercice 17 (*)

Déterminer un équivalent en 1 *de* $\dfrac{x^4 - 4x^2 + 2x + e}{x^{10} - 3x}$

exercice 18 (*)

Déterminer la limite de $\ln n + \ln \sin \dfrac{1}{n}$ *quand* $n \to +\infty$

exercice 19 (**)

Déterminer un équivalent de $\ln n + \ln \sin \dfrac{1}{n}$ *quand* $n \to +\infty$

exercice 20 (*)

Donner le DL à l'ordre 5 en 0 de $\cos^2 x$

exercice 21 (**)

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ *puis un équivalent, toujours en* $+\infty$ *de* $e - \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

exercice 22 (**)

Donner le DL à l'ordre 4 en 0 de $\dfrac{\cos x}{1 - x}$

exercice 23 (**)

Donner le DL à l'ordre 2 en 0 de $\sqrt{1 + \sin(x)}$

exercice 24 (*)

Déterminer un équivalent en 0 *de* $f(x) = \dfrac{3\ln(1+x) - \ln(1+x^3)}{3x} - 1 + \dfrac{x}{2}$

exercice 25 (**)

Déterminer un équivalent en $\pi/2$ *de* $\dfrac{3}{\cos(3t)} + \dfrac{2}{\sin(2t)}$

exercice 26 (*)

Déterminer un équivalent en 0 *de* $f(x) = \dfrac{1}{x}\ln\dfrac{e^x-1}{x} - \dfrac{1}{2}$

exercice 27 (**)

Déterminer le DL à l'ordre 1 en $\dfrac{\pi}{6}$ *de* $\dfrac{2\cos(t)-\sqrt{3}}{2\sin(t)-1}$

exercice 28 (*)

Déterminer un équivalent en $+\infty$ *de* $u_n = \dfrac{2n^2+e^n}{3n^2+\sin(n)}$

exercice 29 (**)

Déterminer un équivalent en $\dfrac{\pi}{2}$ *de* $\tan(t) + \dfrac{2}{2t-\pi}$

exercice 30 (**)

Donner le DL à l'ordre 2 en $\dfrac{\pi}{2}$ *de* $e^{\cos x}$

exercice 31 (***)

Déterminer un équivalent en 1 de $t^{\frac{1}{t-1}} - e$

exercice 32 (**)

Déterminer un équivalent en 0*, puis le DL à l'ordre 3 de* $\dfrac{x-\sin x}{1-\cos x}$

exercice 33 (*)

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+\sqrt{n^2+1}}{\ln n}$

exercice 34 (*)

Déterminer un équivalent en $+\infty$ *de* $u_n = \dfrac{\ln(n+1)-\ln n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

exercice 35 (***)

Donner un équivalent de $\ln(\cos x)$ *quand* $x \to 0$*, quand* $x \to (\pi/4)$ *et quand* $x \to (\pi/2)^-$

exercice 36 (*)

Donner en 1 un équivalent de $\dfrac{e^x}{x^2-1}$

exercice 37 (**)

Déterminer en 1 le développement asymptotique de $\dfrac{1}{\tan(x-1)}$ *à la précision* $o(x-1)$

exercice 38 (**)

Déterminer le développement asymptotique de $\sqrt{n^2+2n-1}$ *à l'ordre* $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ *quand* $n \to +\infty$

exercice 39 (*)

Donner le DL à l'ordre 3 en 0 de $\sqrt{1+\cos(x)}$

exercice 40 (*)

Donner un équivalent en $+\infty$ *de* $\ln(n+\ln n)$

exercice 41 (*)

Donner un équivalent quand n *tend vers* $+\infty$ *de* $3\ln(n^2+1) - 2\ln(n^3+1)$

exercice 42

Donner le DL à l'ordre 2 en 1 de $\sqrt{4+x}$

exercice 43

Donner le DL à l'ordre 2 en $\frac{\pi}{2}$ *de* $\sqrt{1+\sin x}$

exercice 44

Donner le DL à l'ordre 2 en $\frac{\pi}{2}$ *de* $\sqrt{3-\sin^2 x}$

exercice 45

Déterminer $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{3-\sin^2 x}}{\cos^2 x}$

exercice 46

Déterminer le DL à l'ordre 4 en 0 de $\dfrac{1}{\cos(x)}$

exercice 47

Déterminer le DL à l'ordre 7 en 0 de $\tan(x)$

exercice 48

Déterminer le DL à l'ordre 4 en 0 de $\sin(\ln(1-x)) - \ln(1-\sin(x))$

Les réponses

réponse 1 $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{4} + o_o(x^3)$

réponse 2 $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + (x^2)^2 + o_o((x^2)^2 = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$

réponse 3 $x\cos(x) - x^2.\sin(x) = x - \dfrac{3}{2}x^3 + \dfrac{5}{24}x^5 + o(x^5)$

réponse 4 $e^x = e^3 + e^3.(x-3) + \dfrac{e^3}{2}(x-3)^2 + o((x-3)^2)$

réponse 5 $\dfrac{x}{x+3} = 1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{9}{x^2} + o(\dfrac{1}{x^2})$

réponse 6 1

réponse 7 $\sqrt{x}$

réponse 8 $e^{1/x}.e^{-1/2}$

réponse 9 x

réponse 10 x^2

réponse 11 $\dfrac{x^2-5x}{x-4} \underset{4}{\sim} \dfrac{4}{4-x}$

réponse 12 $x + \ln x \underset{0}{\sim} \ln x$

réponse 13 $x + \ln x \underset{+\infty}{\sim} x$

réponse 14 $\cos(x) = -\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) + \dfrac{\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^3}{6} - \dfrac{\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^5}{120} + o(\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^5)$

réponse 15 $\sqrt{x} = \sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}(x-2) - \dfrac{\sqrt{2}}{32}(x-2)^2 + o((x-2)^2)$

réponse 16 $\cos(1/x) + \sin(1/x) - \exp(1/x) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{x^2}$

réponse 17 $\dfrac{x^4 - 4x^2 + 2x + e}{x^{10} - 3x} \underset{1}{\sim} \dfrac{1-e}{2}$

réponse 18 $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln n + \ln\sin\dfrac{1}{n} = 0$

réponse 19 $\ln n + \ln\sin\dfrac{1}{n} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{6n^2}$

réponse 20 $\cos^2 x = 1 - x^2 + \dfrac{x^4}{3} + o(x^5)$

réponse 21 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ et $e - \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x \sim \dfrac{e}{2x}$

réponse 22 $\dfrac{\cos x}{1-x} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{13}{24}x^4 + o(x^4)$

réponse 23 $\sqrt{1+\sin(x)} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + o(x^2)$

réponse 24 $f(x) = \dfrac{3\ln(1+x) - \ln(1+x^3)}{3x} - 1 + \dfrac{x}{2} \underset{0}{\sim} \dfrac{-x^3}{4}$

réponse 25 $\dfrac{3}{\cos(3t)} + \dfrac{2}{\sin(2t)} \underset{\pi/2}{\sim} \dfrac{5}{6}(t - \dfrac{\pi}{2})$

réponse 26 $f(x) = \dfrac{1}{x}\ln\dfrac{e^x - 1}{x} - \dfrac{1}{2} \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{24}$

réponse 27 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3} - \dfrac{2}{3}(t - \dfrac{\pi}{6}) + o(t - \dfrac{\pi}{6})$

réponse 28 $\dfrac{2n^2 + e^n}{3n^2 + \sin(n)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^n}{3n^2}$

réponse 29 $\tan(t) + \dfrac{2}{2t - \pi} \underset{\pi/2}{\sim} \dfrac{1}{3}(t - \dfrac{\pi}{2})$

réponse 30 $e^{\cos x} = 1 - (t - \dfrac{\pi}{2}) + \dfrac{1}{2}(t - \dfrac{\pi}{2})^2 + o((t - \dfrac{\pi}{2})^2)$

réponse 31 $t^{\dfrac{1}{t-1}} - e \underset{1}{\sim} \dfrac{-e}{2}(t-1)$

réponse 32 l'équivalent est $\dfrac{x}{3}$ et le $DL_3(0)$ est $\dfrac{x}{3} + \dfrac{x^3}{90} + o(x^3)$

réponse 33 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n + \sqrt{n^2+1}}{\ln n} = +\infty$

réponse 34 $\dfrac{\ln(n+1) - \ln n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{\sqrt{n}}$

réponse 35 $\ln(\cos x) \underset{0}{\sim} \dfrac{-x^2}{2}$ et $\ln(\cos x) \underset{\pi/4}{\sim} \dfrac{-\ln 2}{2}$ et $\ln(\cos x) \underset{(\pi/2)^-}{\sim} \ln\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

réponse 36 $\dfrac{e^x}{x^2 - 1} \underset{1}{\sim} \dfrac{e}{2(x-1)}$

réponse 37 $\dfrac{1}{\tan(x-1)} = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{3}(x-1) + o_1(x-1)$

réponse 38 $\sqrt{n^2 + 2n - 1} = n + 1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

réponse 39 $\sqrt{1+\cos(x)} = \sqrt{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{8}x^2 + o(x^3)$

réponse 40 $\ln(n + \ln n) \underset{+\infty}{\sim} \ln n$

réponse 41 $3\ln(n^2+1) - 2\ln(n^3+1) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{3}{n^2}$

réponse 42 $\sqrt{4+x} = \sqrt{5} + \dfrac{\sqrt{5}}{10}(x-1) - \dfrac{\sqrt{5}}{200}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$

réponse 43

réponse 44

réponse 45 $-\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$

réponse 46 $\dfrac{1}{\cos(x)} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5}{24}x^4 + o(x^4)$

réponse 47 $\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \dfrac{17x^7}{315} + o(x^7)$

réponse 48 $\sin(\ln(1-x)) - \ln(1-\sin(x)) = \dfrac{x^4}{12} + o(x^4)$

Détails

résolution 1

- On sait que

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o_o(x^4)$$

- On a ainsi

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o_o(x^3)$$

résolution 2

- On sait que

$$\frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 + o_o(X^2)$$

- Comme $x^2 \to 0$ lorsque $x \to 0$, on peut donc écrire

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + (x^2)^2 + o_o((x^2)^2 = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$$

résolution 3

- On sait que

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o_0(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_0(x^4)$$

et

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o_0(x^4) = x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^4)$$

- On a donc

$$\begin{aligned} x\cos(x) - x^2.\sin(x) &= x.(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_0(x^4)) - x^2.(x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^4)) \\ &= x - \frac{3}{2}x^3 + \frac{5}{24}x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

résolution 4 On propose ici deux solutions

1. On sait que en 0 on a
$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + o_(h^2)$$
On pose ici $x = 3 + h$ (ainsi quand $x \to 3$ on a $h \to 0$)

   et l'on peut donc écrire
$$\begin{aligned} e^x = e^{3+h} = e^3.e^h &= e^3.(1 + h + \frac{h^2}{2} + o_(h^2)) \\ &= e^3.(1 + (x-3) + \frac{(x-3)^2}{2} + o((x-3)^2) \\ &= e^3 + e^3.(x-3) + \frac{e^3}{2}(x-3)^2 + o((x-3)^2) \end{aligned}$$

2. Comme la fonction $\exp : x \mapsto e^x$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$,

   on sait d'après le théorème de Taylor-Young que cette fonction admet en tout point $a \in \mathbb{R}$ un DL à tout ordre.

   Comme la dérivée de exp est la fonction exp elle-même, on a la formule
$$\exp(x) = \exp(3) + \exp(3).\frac{(x-3)^1}{1!} + \exp(3).\frac{(x-3)^2}{2!} + o((x-3)^2)$$
On retrouve directement le DL précédent

résolution 5

- On sait qu'en 0 on a le DL
$$\frac{1}{1+X}=1-X+X^2+o(X^2)$$

- On écrit $\dfrac{x}{x+3}=\dfrac{1}{1+\dfrac{3}{x}}$

  On pose alors $X=\dfrac{3}{x}$ (ainsi quand $x\to+\infty$ on a $X\to 0$)

  et l'on peut écrire
$$\begin{aligned}\frac{x}{x+3}&=\frac{1}{1+\dfrac{3}{x}}\\&=\frac{1}{1+X}\\&=1-X+X^2+o(X^2)\\&=1-\frac{3}{x}+\left(\frac{3}{x}\right)^2+o(\left(\frac{3}{x}\right)^2)\end{aligned}$$

  On trouve ainsi
$$\frac{x}{x+3}=1-\frac{3}{x}+\frac{9}{x^2}+o(\frac{1}{x^2})$$

$\boxed{\textbf{résolution 6}}$ • **Règle:**
"L'équivalent d'un produit(resp. d'un quotient) est le produit (resp. le quotient) des équivalents"

- On sait que

$$\sin x \underset{0}{\sim} x$$

et

$$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$$

et

$$e^x \underset{0}{\sim} 1$$

- D'où

$$\frac{\sin x}{\ln(1+x)}.e^x \underset{0}{\sim} \frac{x}{x}.1 = 1$$

$\boxed{\textbf{résolution 7}}$ • **Règle:**
"Si $f \sim g$ et si α est <u>une constante</u> alors $f^\alpha \sim g^\alpha$ "

- On sait que
$$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$$
- D'où
$$\sqrt{\ln(1+x)} \underset{0}{\sim} \sqrt{x}$$

résolution 8 • **Règle:**
"Comme l'exposant n'est pas une constante, on revient en logarithme-exponentielle et on fait un DL"

- On a

$$\begin{aligned}(1+x)^{1/x^2} &= e^{\frac{\ln(1+x)}{x^2}} \\ &= e^{\frac{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2}} \\ &= e^{1/x-1/2+o(1)} \\ &= e^{1/x}.e^{-1/2}.e^{o(1)}\end{aligned}$$

Comme

$$\lim_0 e^{o(1)} = 1$$

on en déduit que

$$(1+x)^{1/x^2} \underset{0}{\sim} e^{1/x}.e^{-1/2}$$

résolution 9 • **Règle:**

"Si dans une somme, un terme est prépondérant sur tous les autres, ce sera lui l'équivalent!"

- On a
$$\sin x \underset{0}{\sim} x$$
et
$$\ln(1+x^2) \underset{0}{\sim} x^2$$
ainsi, en 0, $\sin x$ est prépondérant sur $\ln(1+x^2)$
(on pourrait écrire $\ln(1+x^2) = o_0(\sin x)$*)*
donc d'après la règle énoncée, on a
$$\sin x - \ln(1+x^2) \underset{0}{\sim} \sin x \underset{0}{\sim} x$$

résolution 10 • **Règle:**
"Si dans une somme il n'y a pas un terme de prépondérant alors on fait un DL!"

- On a

$$\sin x \underset{0}{\sim} x \underset{0}{\sim} \mathrm{sh}(x)$$

et

$$x^2 \underset{0}{\sim} x^2$$

ainsi, en 0, il n'y a pas un terme qui est prépondérant

- On effectue alors un DL

$$\begin{aligned}\sin x - \mathrm{sh}(x) + x^2 &= (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) - (x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)) + x^2 \\ &= x^2 - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\sin x - \mathrm{sh}(x) + x^2 \underset{0}{\sim} x^2$$

- remarque: on aurait pu faire uniquement un DL à l'ordre 2 est écrire

$$\sin x - \mathrm{sh}(x) + x^2 = (x + o(x^2)) - (x + o(x^2)) + x^2 = x^2 + o(x^2)$$

$\boxed{\textbf{résolution 11}}$ • Comme il s'agit d'un quotient, on va déterminer l'équivalent du numérateur et celui du dénominateur.

- On a $\lim_{x \to 4} x^2 - 5x = -4$ donc
$$x^2 - 5x \underset{4}{\sim} -4$$
- L'équivalent le plus simple de $x - 4$ est... $(x - 4)$ (!)
$$x - 4 \underset{4}{\sim} x - 4$$
- On en déduit ainsi
$$\frac{x^2 - 5x}{x - 4} \underset{4}{\sim} \frac{-4}{x - 4} = \frac{4}{4 - x}$$

résolution 12 • $x + \ln x$ est une somme: on regarde donc si un terme est prépondérant sur l'autre.

Comme $\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$, on en déduit que $x = o_0(\ln x)$ (lire "x est négligeable devant $\ln x$", et l'on note $\ln x = o_{+\infty}(x)$

On a donc

$$x + \ln x \underset{0}{\sim} \ln x$$

résolution 13 • $x + \ln x$ est une somme: on regarde donc si un terme est prépondérant sur l'autre.

D'après le théorème des croissances comparées, on sait que "$\ln x$ est négligeable devant x", et l'on note $\ln x = o_{+\infty}(x)$

On a donc

$$x + \ln x \underset{+\infty}{\sim} x$$

résolution 14 • On pose $x=\dfrac{\pi}{2}+h$ (quand $x\to\dfrac{\pi}{2}$ on a $h\to 0$

• On a $\cos(x)=\cos(\dfrac{\pi}{2}+h)=-\sin(h)$

et on sait que

$$\sin(h)=h-\frac{h^3}{3!}+\frac{h^5}{5!}+o(h^5)$$

On a donc ici

$$\begin{aligned}\cos(x)=-\sin(h)&=-h+\frac{h^3}{3!}-\frac{h^5}{5!}+o(h^5)\\&=-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3}{6}-\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^5}{120}+o(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^5)\end{aligned}$$

résolution 15 • On sait que pour h proche de zéro on a

$$\sqrt{1+h} = (1+h)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}.h + \left(\frac{1}{2}\right).\left(\frac{1}{2}-1\right).\frac{h^2}{2!} + o(h^2) = 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + o(h^2)$$

- Posons $x = 2 + X$ (quand $x \to 2$ on a $X \to 0$)
  On a

$$\sqrt{x} = \sqrt{2+X} = \sqrt{2.\left(1+\frac{X}{2}\right)} = \sqrt{2}.\sqrt{1+\frac{X}{2}}$$

Or

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\frac{X}{2}} &= 1 + \frac{\frac{X}{2}}{2} - \frac{\left(\frac{X}{2}\right)^2}{8} + o\left(\frac{X}{2}\right)^2 \\ &= 1 + \frac{X}{4} - \frac{X^2}{32} + o(X^2)\end{aligned}$$

On en déduit ainsi que

$$\begin{aligned}\sqrt{x} &= \sqrt{2}.\left(1 + \frac{x-2}{4} - \frac{(x-2)^2}{32} + o((x-2)^2)\right) \\ &= \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(x-2) - \frac{\sqrt{2}}{32}(x-2)^2 + o((x-2)^2)\end{aligned}$$

résolution 16 • $\cos(1/x)+\sin(1/x)-\exp(1/x)$ est une somme on va donc regarder si un terme est prépondérant sur tous les autres.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos(1/x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\exp(1/x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin(1/x) = 0$

Il n'y a donc pas de terme prépondérant, nous allons nécessairement effectuer un DL

- On pose $h = 1/x$ (quand $x \to +\infty$ on a $h \to 0$)
  et l'on a
  i) $\cos(1/x) = \cos(h) = 1 - \dfrac{h^2}{2} + o(h^2)$

  ii) $\sin(1/x) = \sin(h) = h + o(h^2)$

  iii) $\exp(1/x) = \exp(h) = 1 + h + \dfrac{h^2}{2} + o(h^2)$

  d'où

$$\begin{aligned}\cos(1/x)+\sin(1/x)-\exp(1/x) &= \left(1-\frac{h^2}{2}+o(h^2)\right) + \big(h+o(h^2)\big) - \left(1+h+\frac{h^2}{2}+o(h^2)\right)\\ &= -h^2+o(h^2)\\ &\underset{h\to0}{\sim} -h^2 = -\frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{résolution 17}}$ • Comme $\dfrac{x^4-4x^2+2x+e}{x^{10}-3x}$ est un quotient, on va déterminer un équivalent du numérateur et un équivalent du dénominateur.

- Comme $\lim\limits_{x\to 1} x^4-4x^2+2x+e = e-1 \neq 0$ on a

$$x^4-4x^2+2x+e \underset{1}{\sim} e-1$$

- Comme $\lim\limits_{x\to 1} x^{10}-3x = -2 \neq 0$ on a

$$x^{10}-3x \underset{1}{\sim} -2$$

- On en déduit tout simplement que

$$\frac{x^4-4x^2+2x+e}{x^{10}-3x} \underset{1}{\sim} \frac{e-1}{-2} = \frac{1-e}{2}$$

$\boxed{\textbf{résolution 18}}$ Pour $n \geqslant 1$ on a

$$\ln n + \ln \sin \frac{1}{n} = \ln \left(n.\sin \frac{1}{n} \right)$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et que $\sin x \underset{0}{\sim} x$, on a

$$\sin \frac{1}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

et donc

$$n.\sin \frac{1}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{n} = 1$$

Ceci permet d'affirmer que

$$\lim_{n \to +\infty} n.\sin \frac{1}{n} = 1$$

Comme la fonction ln est continue sur $]0, +\infty[$, elle est donc en particulier continue en 1 et l'on a

$$\lim_{n \to +\infty} \ln n + \ln \sin \frac{1}{n} = \lim_{n \to +\infty} \ln(n.\sin \frac{1}{n}) = \ln 1 = 0$$

résolution 19

- Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et que $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o_0(x^3)$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\ln\sin\frac{1}{n} &= \ln\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&= \ln\left[\frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right] \\
&= \ln\frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&= -\ln n + \ln\left(1 - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)
\end{aligned}$$

- On a ainsi déjà

$$\ln n + \ln\sin\frac{1}{n} = \ln\left(1 - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

- Posons $u = -\dfrac{1}{6n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$

  On a $u \to 0$ lorsque $n \to \infty$ et l'on sait que $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$

  On a ainsi ici

$$\ln\left(1 - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \ln(1+u) \underset{u\to0}{\sim} u = -\frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

  Finalement cela donne

$$\ln n + \ln\sin\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{6n^2}$$

résolution 20 Nous allons proposer deux méthodes

1. On commence par utiliser une formule de trigonométrie
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^2(x) = \frac{\cos(2x)+1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2}$$
Ainsi que le DL de référence
$$\cos X = 1 - \frac{X^2}{2!} + \frac{X^4}{4!} + o_0(X^5) = 1 - \frac{X^2}{2} + \frac{X^4}{24} + o_0(X^5)$$
D'où
$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} + o_0(x^4)\right)^2 = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^5)$$
2. On élève directement au carré!
$$\begin{aligned}\cos^2(x) &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^2 \\ &= 1 - x^2 + \frac{x^4}{12} + \frac{x^4}{4} + o(x^5) \\ &= 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^5)\end{aligned}$$

résolution 21 On sait que pour $x > 0$ on a $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \exp\left[x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

1. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et que $\ln(1+h) \underset{0}{\sim} h$, on en déduit que

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

et ainsi

$$x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{x} = 1$$

On a ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1.$

Comme la fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier en 1, on peut en déduire que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \exp(1) = e$$

2. On sait que pour h proche de 0 on a $\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)$
On a donc

$$x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = x.\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x}\right)^2\right) = 1 - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ainsi

$$\exp\left[x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \exp\left(1 - \frac{1}{2x} + o(\left(\frac{1}{x}\right))\right) = e.\exp\left(-\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Posons $u = -\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$
On sait que lorsque u est proche de 0 on a le DL

$$\exp(u) = 1 + u + o(u)$$

donc ici

$$\begin{aligned}\exp\left(-\frac{1}{2x} + o(\left(\frac{1}{x}\right))\right) &= 1 + \left(-\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) + o\left(-\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\ &= 1 - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

On a ainsi

$$\exp\left[x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = e.\left(1 - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = e - \frac{e}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

D'où

$$e - \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \frac{e}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e}{2x}$$

résolution 22 • On utilise les DL de référence en 0

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4)$$

• On a ainsi

$$\begin{aligned}\frac{\cos x}{1-x} = &\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)\left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4)\right)\\ =&1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\\ &+ x - \frac{x^3}{2}\\ &+ x^2 - \frac{x^4}{2}\\ &+ x^3 + x^4 + o(x^4)\\ =&1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{13}{24}x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

On ainsi

$$\boxed{\frac{\cos x}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{13}{24}x^4 + o(x^4)}$$

résolution 23 • On rappelle qu'on a $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o_0(u^2)$
ainsi que $\sin(x) = x + o_0(x^2)$

- On a ainsi

$$\sqrt{1+\sin(x)} = \sqrt{1+x+o(x^2)}$$

En posant $u = x + o(x^2)$ cela donne

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x+o(x^2)} = \sqrt{1+u} &= 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2)\\ &= 1 + \frac{x+o(x^2)}{2} - \frac{\left(x+o(x^2)\right)^2}{8} + o\left(x+o(x^2)\right)^2\\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\end{aligned}$$

résolution 24

- On sait qu'au voisinage de 0 on a

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

- On a donc

$$\ln(1+x^3) = x^3 + o(x^4)$$

- Et donc

$$\frac{3\ln(1+x) - \ln(1+x^3)}{3x} = \frac{3(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}) - x^3 + o(x^4)}{3x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)$$

- Ainsi

$$f(x) = \frac{3\ln(1+x) - \ln(1+x^3)}{3x} - 1 + \frac{x}{2} = -\frac{x^3}{4} + o(x^3) \underset{0}{\sim} -\frac{x^3}{4}$$

résolution 25 • On pose $t = \frac{\pi}{2} + h$

- On a
$$\cos(3t) = \cos(\frac{3\pi}{2} + 3h) = \sin(3h) \qquad \text{et} \qquad \sin(2t) = \sin(\pi + 2h) = -\sin(2h)$$
- On a ainsi
$$\begin{aligned}\frac{3}{\cos(3t)} + \frac{2}{\sin(2t)} &= \frac{3}{\sin(3h)} - \frac{2}{\sin(2h)} \\ &= \frac{3\sin(2h) - 2\sin(3h)}{\sin(2h).\sin(3h)}\end{aligned}$$

On va maintenant déterminer un équivalent du numérateur et du dénominateur
- Pour le numérateur on doit passer par les DLs
$$\begin{aligned}3\sin(2h) - 2\sin(3h) &= 3\left(2h - \frac{(2h)^3}{6} + o(h^3)\right) - 2\left(3h - \frac{(3h)^3}{6} + o(h^3)\right) \\ &= -4h^3 + 9h^3 + o(h^3) = 5h^3 + o(h^3)\end{aligned}$$

On a donc
$$3\sin(2h) - 2\sin(3h) \underset{h\to 0}{\sim} 5h^3$$
- Pour le dénominateur c'est plus simple car $\sin(2h) \underset{h\to 0}{\sim} 2h$ et $\sin(3h) \underset{h\to 0}{\sim} 3h$ et donc
$$\sin(2h).\sin(3h) \underset{h\to 0}{\sim} 6h^2$$
- Au final, cela donne
$$\frac{3\sin(2h) - 2\sin(3h)}{\sin(2h).\sin(3h)} \underset{h\to 0}{\sim} \frac{5h^3}{6h^2} = \frac{5}{6}h$$

Conclusion: $\boxed{\frac{3}{\cos(3t)} + \frac{2}{\sin(2t)} \underset{\pi/2}{\sim} \frac{5}{6}(t - \frac{\pi}{2})}$

résolution 26

- On sait qu'en 0 on a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

On a donc

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

- On sait qu'en 0 on a le DL $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$, en remplaçant u par $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{6}$ cela donne

$$\begin{aligned}
\ln \frac{e^x - 1}{x} &= \ln\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) \\
&= \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right)^2 + o(x^2) \\
&= \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right) - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) \\
&= \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^2)
\end{aligned}$$

- Et ainsi

$$\frac{1}{x} \ln \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{2} + \frac{x}{24} + o(x)$$

- On trouve finalement que

$$\frac{1}{x} \ln \frac{e^x - 1}{x} - \frac{1}{2} = \frac{x}{24} + o(x) \underset{0}{\sim} \frac{x}{24}$$

résolution 27

- On pose $t = \frac{\pi}{6} + h$
- On a alors

$$\cos(t) = \cos(\frac{\pi}{6} + h) = \cos(\frac{\pi}{6}).\cos(h) - \sin(\frac{\pi}{6}).\sin(h) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(h) - \frac{1}{2}\sin(h)$$

et

$$\sin(t) = \sin(\frac{\pi}{6} + h) = \cos(\frac{\pi}{6}).\sin(h) + \sin(\frac{\pi}{6}).\cos(h) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(h) + \frac{1}{2}\cos(h)$$

- On va utiliser ensuite les DLs de référence

$$\cos(h) = 1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2) \qquad \text{et} \qquad \sin(h) = h + o(h^2)$$

- Ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{2\cos(t) - \sqrt{3}}{2\sin(t) - 1} &= \frac{\sqrt{3}\cos(h) - \sin(h) - \sqrt{3}}{\sqrt{3}\sin(h) + \cos(h) - 1} \\
&= \frac{\sqrt{3}(1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2)) - (h + o(h^2)) - \sqrt{3}}{\sqrt{3}(h + o(h^2)) + (1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2)) - 1} \\
&= \frac{-h - \frac{\sqrt{3}}{2}h^2 + o(h^2)}{\sqrt{3}h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)} \\
&= \frac{-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}h + o(h)}{\sqrt{3} - \frac{h}{2} + o(h)} \\
&= -\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}h + o(h)\right).\frac{1}{\sqrt{3} - \frac{h}{2} + o(h)}
\end{aligned}$$

Or

$$\frac{1}{\sqrt{3} - \frac{h}{2} + o(h)} = \frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{1}{1 - \frac{h}{2\sqrt{3}} + o(h)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 + \frac{h}{2\sqrt{3}} + o(h)\right)$$

Finalement

$$\begin{aligned}
\frac{2\cos(t) - \sqrt{3}}{2\sin(t) - 1} &= -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}h + o(h)\right)\left(1 + \frac{h}{2\sqrt{3}} + o(h)\right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3}h + o(h) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3}(t - \frac{\pi}{6}) + o(t - \frac{\pi}{6})
\end{aligned}$$

résolution 28

- u_n est un quotient: on va donc déterminer un équivalent du numérateur et un du dénominateur
- $2n^2 + e^n$ est une somme: on regarde donc si un terme est prépondérant sur les autres.
  D'après le théorème des croissances comparées, on sait que $2n^2 = o(e^n)$ (lire "$2n^2$ est négligeable devant e^n), on peut donc affirmer que $2n^2 + e^n \sim e^n$
- $3n^2 + \sin n$ est une somme: on regarde donc si un terme est prépondérant sur les autres.
  On a $\lim\limits_{n \to +\infty} 3n^2 = +\infty$ et la suite $(\sin n)$ est une suite bornée, donc $\sin n = o(3n^2)$. On en déduit que $3n^2 + \sin n \sim 3n^2$
- En conclusion, on trouve que $u_n \sim \dfrac{e^n}{3n^2}$

résolution 29 • On pose $t = \dfrac{\pi}{2} + h$

- On a

$$\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + h)}{\cos(\frac{\pi}{2} + h)} = \frac{-\cos(h)}{\sin(h)}$$

- On va utiliser ensuite les DLs de référence

$$\cos(h) = 1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2) \qquad \text{et} \qquad \sin(h) = h - \frac{h^3}{6} + o(h^3)$$

- On a ainsi

$$\tan(t) + \frac{2}{2t - \pi} = \frac{-\cos(h)}{\sin(h)} + \frac{1}{h} = \frac{\sin(h) - h.\cos(h)}{h.\sin(h)}$$

- On détermine maintenant un équivalent du numérateur et du dénominateur

$$\sin(h) - h.\cos(h) = h - \frac{h^3}{6} + o(h^3) - h\left(1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right) = \frac{h^3}{3} + o(h^3) \underset{h\to 0}{\sim} \frac{h^3}{3}$$

  On sait que $\sin(h) \underset{h\to 0}{\sim} h$ et donc $h.\sin(h) \underset{h\to 0}{\sim} h^2$

  On en déduit que

$$\frac{\sin(h) - h.\cos(h)}{h.\sin(h)} \underset{h\to 0}{\sim} \frac{h^3/3}{h^2} = \frac{h}{3} = \frac{1}{3}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

- Au final, on trouve donc

$$\tan(t) + \frac{2}{2t - \pi} \underset{t\to\frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{1}{3}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

résolution 30 • On pose $x = \frac{\pi}{2} + h$

On a $\cos(x) = \cos(\frac{\pi}{2} + h) = -\sin(h)$

- Au voisinage de $h = 0$ on sait que
$$\sin(h) = h + o(h^2)$$
et donc
$$e^{\cos x} = e^{-\sin(h)} = \exp(-h + o(h^2))$$
- On sait qu'au voisinage de 0 on a $\exp(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$.
Nous allons donc utiliser ce DL en posant $u = -h + o(h^2)$ ce qui donne
$$\exp(-h + o(h^2)) = 1 + (-h + o(h^2)) + \frac{(-h + o(h^2))^2}{2} + o((-h + o(h^2))^2)$$
c'est à dire
$$\exp(-h + o(h^2)) = 1 - h + \frac{h^2}{2} + o(h^2)$$
- On conclut en revenant en x, ce qui donne
$$e^{\cos x} = 1 - \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + o(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2)$$

résolution 31

- On a $t^{\frac{1}{t-1}} = \exp\left(\dfrac{\ln t}{t-1}\right)$
- On pose $t = 1+h$, on a $\dfrac{\ln t}{t-1} = \dfrac{\ln(1+h)}{h}$
- On sait que $\ln(1+h) = h - \dfrac{h^2}{2} + o(h^2)$ et donc

$$\frac{\ln(1+h)}{h} = 1 - \frac{h}{2} + o(h)$$

Ainsi

$$\exp\left(\frac{\ln t}{t-1}\right) = \exp(1 - \frac{h}{2} + o(h) = e.\exp(-\frac{h}{2} + o(h))$$

- On sait qu'en 0 on a $\exp(u) = 1 + u + o(u)$.
On va utiliser ce DL en posant $u = -\dfrac{h}{2} + o(h)$, ce qui donne

$$\exp(-\frac{h}{2} + o(h)) = 1 + (-\frac{h}{2} + o(h)) + o(-\frac{h}{2} + o(h)) = 1 - \frac{h}{2} + o(h)$$

en revenant en t cela donne

$$\exp\left(\frac{\ln t}{t-1}\right) = e(1 - \frac{t-1}{2} + o(t-1)) = e - \frac{e(t-1)}{2} + o(t-1)$$

- On a donc

$$t^{\frac{1}{t-1}} - e = -\frac{e(t-1)}{2} + o(t-1) \underset{1}{\sim} \frac{-e}{2}(t-1)$$

résolution 32 On pose $f(x) = \dfrac{x - \sin x}{1 - \cos x}$.

1. Déterminons un équivalent de f en 0.
   - On sait que $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o_0(x^3)$ et $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o_0(x^2)$
   - On a ainsi
   $$f(x) = \frac{\dfrac{x^3}{6} + o_0(x^3)}{\dfrac{x^2}{2} + o_0(x^2)} \underset{0}{\sim} \frac{x^3/6}{x^2/2} = \frac{x}{3}$$
2. Déterminons le $DL_3(0)$
   - On sait que $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} o_0(x^5)$ et $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} o_0(x^5)$
   - On a ainsi

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{x - \sin x}{1 - \cos x} &= \frac{\dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^5}{120} + o_0(x^5)}{\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24} + o_0(x^5)} \\
&= \frac{\dfrac{x}{6} - \dfrac{x^3}{120} + o_0(x^3)}{\dfrac{1}{2} - \dfrac{x^2}{24} + o_0(x^3)} \\
&= \frac{\dfrac{x}{3} - \dfrac{x^3}{60} + o_0(x^3)}{1 - \dfrac{x^2}{12} + o_0(x^3)} \\
&= \left(\frac{x}{3} - \frac{x^3}{60} + o_0(x^3)\right) . \frac{1}{1 - \dfrac{x^2}{12} + o_0(x^3)} \\
&= \left(\frac{x}{3} - \frac{x^3}{60} + o_0(x^3)\right) . \left(1 + \frac{x^2}{12} + o_0(x^3)\right) \qquad = \frac{x}{3} - \frac{x^3}{60} + \frac{x^3}{36} + o_0(x^3) \\
&= \frac{x}{3} + \frac{x^3}{90} + o_0(x^3)
\end{aligned}$$

résolution 33

- La chose la plus simple est de mettre n en facteur au numérateur

$$\frac{n+\sqrt{n^2+1}}{\ln n}=\frac{n\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}\right)}{\ln n}=\frac{n}{\ln n}.\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)$$

  - On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}=2$ (ce n'est pas une forme indéterminée)
  - On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\ln n}=+\infty$ d'après le théorème des croissantes comparées
  - On obtient donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+\sqrt{n^2+1}}{\ln n}=+\infty$
  - A noter que comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}=2$ on a prouvé que

$$\frac{n+\sqrt{n^2+1}}{\ln n}\sim\frac{2n}{\ln n}$$

résolution 34

- Comme u_n est un quotient, nous allons déterminer l'équivalent du numérateur et celui du dénominateur
- $\ln(n+1)-\ln n$ est une somme: on regarde si un terme est prépondérant sur l'autre... ce qui n'est pas le cas. On écrit alors par exemple que

$$\ln(n+1)-\ln n = \ln\frac{n+1}{n} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

car on sait que $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$

- $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ est la différence de termes du même ordre on ne peut donc conclure rapidement sur l'équivalent. Ici deux méthodes s'offrent à nous:

i) $\sqrt{n+1} = \sqrt{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} = \sqrt{n}.\left(1+\dfrac{1}{n})\right)^{1/2} = \sqrt{n}\left(1+\dfrac{1}{2n}+o(n)\right) = \sqrt{n}+\dfrac{1}{2\sqrt{n}}+o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

et donc $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \sqrt{n}+\dfrac{1}{2\sqrt{n}}+o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)-\sqrt{n} = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}+o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

ii) Ou bien on utilise la quantité conjuguée:

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1\right)}$$

Comme $\lim \sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1 = 2$ on en déduit que $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \sim \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

- On aboutit donc à $u_n \sim \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \dfrac{2}{\sqrt{n}}$

résolution 35 1. Equivalent de $\cos(x)$ lorsque $x \to 0$

- On sait que $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o_0(x^2)$ et que $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$.
  Ce qui permet d'écrire

$$\ln(\cos x) = \ln\left(1 \underbrace{- \frac{x^2}{2} + o(x^2)}_{=u}\right) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

  car lorsque $x \to 0$ on a bien $u = -\dfrac{x^2}{2} + o(x^2) \to 0$

2. Equivalent de $\cos(x)$ lorsque $x \to \dfrac{\pi}{4}$
   - C'est le cas le plus simple!
     On a $\displaystyle\lim_{x\to\pi/4} \cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc

$$\ln(\cos x) \underset{\pi/4}{\sim} \ln(\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\ln(2)}{2}$$

3. Equivalent de $\cos(x)$ lorsque $x \to \dfrac{\pi}{2}^-$
   - C'est le cas le plus compliqué!...
     car il faut avoir un peu d'intuition et/ou de culture mathématique

     On va utiliser le résultat général ci-dessous qu'il faut savoir redémontrer

     Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et si $\displaystyle\lim_{x_0} f \to 1$ alors $\ln(f) \underset{x_0}{\sim} \ln(g)$

     On pose $x = \dfrac{\pi}{2} + h$ *(quand $x \to \dfrac{\pi}{2}^-$ on a $h \to 0^-$)*

     On a alors $\cos(x) = \cos(\dfrac{\pi}{2} + h) = -\sin(h) \underset{h\to 0^-}{\sim} -h$

     Comme $\displaystyle\lim_{h\to 0^-} -h = 0 \neq 1$, on peut appliquer le résultat rappelé ci-dessus et ainsi écrire

$$\ln(\cos(x)) = \ln(-\sin(h)) \underset{h\to 0^-}{\sim} \ln(-h) = \ln\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

résolution 36 • On écrit

$$\frac{e^x}{x^2-1} = \frac{e^x}{(x-1)(x+1)}$$

- Comme $\lim\limits_{x\to 1} e^x = e$ on a $e^x \underset{1}{\sim} e$
- Comme $\lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2$ on a $x+1 \underset{1}{\sim} 2$
- D'où

$$\frac{e^x}{x^2-1} = \frac{e^x}{(x-1)(x+1)} \underset{1}{\sim} \frac{e}{2(x-1)}$$

résolution 37

- On pose $x = 1 + h$

- On sait qu'en 0 on a

$$\tan(h) = h + \frac{h^3}{3} + o_0(h^3) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{1-X} = 1 + X + o_0(X)$$

- On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tan(x-1)} = \frac{1}{\tan(h)} &= \frac{1}{h + \dfrac{h^3}{3} + o(h^3)} \\
&= \frac{1}{h}.\frac{1}{\left(1 + \dfrac{h^2}{3} + o(h^2)\right)} \\
&= \frac{1}{h}.\left(1 - \frac{h^2}{3} + o(h^2)\right) \\
&= \frac{1}{h} - \frac{h}{3} + o_0(h) \\
&= \frac{1}{x-1} - \frac{x-1}{3} + o_0(x-1)
\end{aligned}$$

résolution 38 • On va utiliser le DL

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o_0(x^3)$$

• On écrit

$$\sqrt{n^2+2n-1} = \sqrt{n^2.\left(1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)} = n.\sqrt{1+\underbrace{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}_{=x}}$$

(lorsque $n \to +\infty$, on a bien $x \to 0$)

et ainsi

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}} &= 1 + \frac{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{2} - \frac{\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^2}{8} + \frac{\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^3}{16} + o\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^3 \\ &= 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^3} + \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}$$

On obtient au final

$$\sqrt{n^2+2n-1} = n.\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = n+1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

résolution 39 • On va utiliser le DL en 0 de

$$\sqrt{1+X} = 1 + \frac{X}{2} - \frac{X^2}{8} + o(X^2)$$

(on rappelle qu'on le retrouve à partir de celui de $(1+X)^\alpha$*)*

- On sait que l'on a déjà

$$1+\cos(x) = 1+1-\frac{x^2}{2}+o(x^3) = 2-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$$

- On a donc

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\cos x} &= \sqrt{2-\frac{x^2}{2}+o(x^3)}\\ &= \sqrt{2}.\sqrt{1-\frac{x^2}{4}+o(x^3)}\end{aligned}$$

En posant $X = -\frac{x^2}{4} + o(x^3)$ cela permet d'écrire

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\cos x} &= \sqrt{2}.\left[1+\frac{-\frac{x^2}{4}+o(x^3)}{2} - \frac{\left(\frac{x^2}{4}+o(x^3)\right)^2}{8} + o(x^4)\right]\\ &= \sqrt{2}.\left[1-\frac{x^2}{8}+o(x^3)\right]\end{aligned}$$

Au final, on trouve

$$\sqrt{1+\cos(x)} = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{8}x^2 + o(x^3)$$

résolution 40 • Pour $n \geqslant 1$ on peut écrire

$$\ln(n+\ln n) = \ln\left[n\left(1+\frac{\ln n}{n}\right)\right] = \ln n + \ln\left(1+\frac{\ln n}{n}\right)$$

• Comme $\lim \ln n = +\infty$ et $\lim \ln\left(1+\frac{\ln n}{n}\right) = 0$, on en déduit que

$$\ln n + \ln\left(1+\frac{\ln n}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \ln n$$

On a bien prouvé que

$$\ln(n+\ln n) \underset{+\infty}{\sim} \ln n$$

résolution 41 • Dans cet exercice, on utilisera l'équivalent de référence $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$

- Pour tout $n \geqslant 0$ posons $u_n = 3\ln(n^2+1) - 2\ln(n^3+1)$

- Pour tout n on a

$$\ln(n^2+1) = \ln\left[n^2(1+\frac{1}{n^2})\right] = \ln(n^2) + \ln(1+\frac{1}{n^2}) = 2.\ln(n) + \ln(1+\frac{1}{n^2})$$

et

$$\ln(n^3+1) = \ln\left[n^3(1+\frac{1}{n^3})\right] = \ln(n^3) + \ln(1+\frac{1}{n^3}) = 3.\ln(n) + \ln(1+\frac{1}{n^3})$$

- Ainsi, on a la simplification

$$u_n = 3.\ln(1+\frac{1}{n^2}) - 2.\ln(1+\frac{1}{n^3})$$

- On est amené à déterminé l'équivalent d'une somme:
on cherche si un terme est négligeable devant l'autre.

On a

$$\ln(1+\frac{1}{n^3}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3} \qquad \text{et} \qquad \ln(1+\frac{1}{n^2}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

Comme $\frac{1}{n^3}$ est négligeable devant $\frac{1}{n^2}$,
on peut affirmer que $\ln(1+\frac{1}{n^3})$ est négligeable devant $\ln(1+\frac{1}{n^2})$

Ainsi

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} 3.\ln(1+\frac{1}{n^2}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{n^2}$$

$\boxed{\textbf{résolution 42}}$

résolution 43

résolution 44

résolution 45

$\boxed{\textbf{résolution 46}}$

$\boxed{\textbf{résolution 47}}$

résolution 48