PT* 2021-22
DS 1 du 27 septembre 2021

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte *(extrait de rapport de jury)*

- L'usage de tout matériel électronique est interdit.

- Vos résultats doivent être encadrés, à la règle, de préférence avec une couleur différente de celle d'écriture.

- Les abréviations sont à proscrire tant que on ne les pas clairement définies dans la copie *(on n'écrira pas "mq" mais "montrer que" ...)*
- Nous conseillons fortement aux candidats qui ne savent pas traiter une question d'indiquer qu'ils en admettent le résultat pour la suite. *(Ecrire par exemple: 3) j'admets le résultat de cette question)*

- Ce devoir est constitué de questions de cours, d'un exercice et d'un problème: vous pouvez les traiter dans l'ordre de votre choix.

QUESTIONS DE COURS

1. Enoncer le théorème relatif aux sommes de Riemann.

2. Indiquer la condition suffisante que doit vérifier la fonction f sur l'intervalle I pour que f possède des primitives sur I.

3. Enoncer la règle des équivalents.

EXERCICE

On pose pour tout x réel $g(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{dt}{\sqrt{t^2+7}}$

Partie I: étude de la fonction g sans la déterminer explicitement

1. Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et donner g'.

2. Etudier le signe de g'

3. La fonction g est-elle paire ou impaire? Que valent $g(0)$ et $g'(0)$?

4. Pour $x > 0$ donner un encadrement de $\displaystyle\int_x^{3x} \frac{dt}{t} - g(x)$, puis en déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = \ln 3$

5. Donner l'allure de la courbe représentative de g.

Partie II: calcul de la fonction g

1. Justifier que la fonction $h : x \mapsto \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, puis qu'elle y est dérivable, et donner une expression simple de h'.

2. En déduire, à l'aide du changement de variable $t = \sqrt{7}.\theta$, une expression simple de $g(x)$ en fonction de l'expression $j(x) = \ln\left(\dfrac{3x+\sqrt{9x^2+7}}{x+\sqrt{x^2+7}}\right)$

3. **A l'aide de l'expression ci-dessus**
   (a) Etudier la parité de la fonction j
   (b) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} j(x) = \ln 3$

4. Calculer pour tout x réel $h(\operatorname{sh} x)$ et $\operatorname{sh}(h(x))$.
   Qu'en déduisez-vous sur la fonction h?

PROBLEME

Ce problème est constitué de 4 parties et de 2 questions préliminaires.

Questions préliminaires:

Soit (u_n) une suite numérique.
On suppose que les suites extraites (u_{2n}) et(u_{2n+1}) convergent vers une même limite l.

1. Ecrire avec ε la définition de $\lim u_{2n} = l$ et celle de $\lim u_{2n+1} = l$
2. Prouver avec rigueur que $\lim u_n = l$

Dans la suite, on considère la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $a_n = \displaystyle\int_0^1 t^n e^{-t} dt$

Partie I: étude de la suite (a_n)

1. Calculer a_0
2. Montrer que la suite (a_n) est une suite décroissante.
3. Montrer que $\lim a_n = 0$
4. A l'aide d'un intégration par parties, justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, (n+1).a_n - a_{n+1}$ est une constante que l'on déterminera.
5. En déduire que $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-1}}{n}$

Partie II: une utilisation de la suite (a_n)

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $a_n = \dfrac{n!}{e}\left(e - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$
2. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!}$ est convergente et donner sa limite.
3. Justifier que lorque n tend vers l'infini, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e + o\left(\frac{1}{n!}\right)$
4. Montrer que pour tout entier naturel n on a $0 \leqslant e - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{e-1}{n!}$.
   Sachant que $e \leqslant 3$, indiquer un moyen de déterminer une valeur approchée de e à 10^{-3} près.

Partie III: nature de la suite de terme général $(-1)^n.a_n$

1. Déterminer la nature de la série de terme général a_n.
   Que peut-on dire de $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$ et pourquoi?
2. On s'intéresse à la nature de la série de terme général $(-1)^n.a_n$.
   Pour tout $n \geqslant 0$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$ ainsi que $U_n = S_{2n}$ et $V_n = S_{2n+1}$
   (a) La série $\sum (-1)^n a_n$ est-elle absolument convergente?
   (b) Montrer que les suites (U_n) et (V_n) sont deux suites adjacentes
   (c) A l'aide du préliminaire, conclure sur la nature de la série de terme général $(-1)^n a_n$

Partie IV: recherche d'un équivalent d'une somme partielle

1. (a) A l'aide de la question 4 de la partie I, exprimer a_n en fonction de n et de a_{n+2} pour $n \in \mathbb{N}$

   (b) En déduire qu'il existe deux constantes réelles K et L (que l'on déterminera) telles que

$$a_n = \frac{K}{n} + \frac{L}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

   Que peut-on dire de la série de terme général $a_n - \dfrac{e^{-1}}{n}$?

   (c) Après avoir rappelé la définition de $o(\dfrac{1}{n^2})$, montrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geqslant N, -\frac{1}{n^2} \leqslant a_n - \frac{e^{-1}}{n} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad , \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad , \quad C_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

   (a) une majoration de la suite (C_n)

      i. Expliquer pourquoi la suite (C_n) est majorée.

      ii. Montrer que pour $n \geqslant 2$ on a $C_n - 1 \leqslant \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k(k-1)}$

      iii. En déduire que $\forall n \geqslant 1, C_n \leqslant 2$

   (b) un encadrement de la suite (B_n)

      i. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{n}$

      ii. En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, on a $\ln n \leqslant B_n \leqslant 1 + \ln n$

   (c) la détermination d'un équivalent de A_n

      i. A l'aide de la question 1(c) de cette partie, montrer qu'il existe deux réels M_1 et M_2 tels que pour tout n assez grand

$$-C_n + M_1 \leqslant A_n - e^{-1}.B_n \leqslant C_n + M_2$$

      ii. En déduire que $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \underset{+\infty}{\sim} e^{-1}. \ln n$.

CORRECTION DU PROBLEME

question préliminaire

1. Par définition, on a
   - $\lim u_{2n} = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, |u_{2n} - l| \leqslant \varepsilon$
   - $\lim u_{2n+1} = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, |u_{2n+1} - l| \leqslant \varepsilon$

2. Soit $\varepsilon > 0$ fixé.
   Avec les notations ci-dessus, considérons $n_2 = \max(2.n_0, 2.n_1 + 1)$
   Soit n un entier supérieur ou égal à n_2.
   Deux cas se présentent
   i) si n est pair, il existe un entier p tel que $n = 2p$.
   Comme $n \geqslant n_2$, on en particulier $2p \geqslant 2n_0$, càd $p \geqslant n_0$.
   On peut donc écrire que $|u_{2p} - l| \leqslant \varepsilon$ càd $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$
   ii) si n est impair, il existe un entier p tel que $n = 2p + 1$.
   Comme $n \geqslant n_2$, on en particulier $2p + 1 \geqslant 2n_1 + 1$, càd $p \geqslant n_1$.
   On peut donc écrire que $|u_{2p+1} - l| \leqslant \varepsilon$ càd $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$
   on vient de montrer que dans les deux cas $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$

   Conclusion: $\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, |u_n - l| \leqslant \varepsilon}$ on a prouvé que $\boxed{\lim u_n = l}$

Partie I

1. $a_0 = \int_0^1 e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^1 = 1 * e^{-1}$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   On a
   $$a_n - a_{n+1} = \int_0^1 t^n e^{-t} dt - \int_0^1 t^{n+1} e^{-t} dt = \int_0^1 (t^n - t^{n+1}) e^{-t} dt = \int_0^1 t^n (1-t) e^{-t} dt$$
   La fonction $t \mapsto t^n(1-t)e^{-t}$est clairement positive sur le segment $[0,1]$, on en déduit par positivé de l'intégrale que
   $$a_n - a_{n+1} = \int_0^1 t^n (1-t) e^{-t} dt \geqslant 0$$
   On a prouvé que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geqslant a_{n+1}$, càd que $\boxed{\text{la suite } (a_n) \text{ est décroissante}}$
3. Soit $n \geqslant 0$ fixé.
   Pour tout réel $t \in [0,1]$, on a $0 \leqslant t^n e^{-t} \leqslant t^n$ car $0 \leqslant e^{-t} \leqslant 1$ et $t^n \geqslant 0$
   Et donc par croissance de l'intégrale, en intégrant sur le segment $[0,1]$ cela nous donne
   $$\int_0^1 0 dt \leqslant \int_0^1 t^n e^{-t} dt \leqslant \int_0^1 t^n dt, \text{ soit } \boxed{0 \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{n+1}}$$
   Reste alors à utiliser le théorème de convergence par encadrement (ex "des gendarmes") pour en déduire que $\boxed{\lim a_n = 0}$

4. Soit $n \geqslant 0$ fixé.
   On effectue une intégration par parties en posant $u(t) = t^{n+1}$ et $v(t) = e^{-t}$, ce qui donne

$$(n+1)a_n = \int_0^1 (n+1).t^n.e^{-t}dt = \left[t^{n+1}e^{-t}\right]_0^1 + \int_0^1 t^{n+1}e^{-t} = e^{-1} + a_{n+1}$$

   On a montré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)a_n - a_{n+1} = e^{-1}}$ càd $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \dfrac{1}{n+1}(e^{-1} + a_{n+1})}$

5. – Si l'on n'est pas à l'aise avec les équivalents et o,
   on revient à la définition et on forme le quotient

$$\frac{a_n}{e^{-1}/n} = e.n.a_n = \frac{n}{n+1}(1 + e.a_{n+1})$$

   puis l'on fait tendre $n \to \infty$, et comme $\lim \dfrac{n}{n+1} = 1$ et $\lim a_{n+1} = 0$,
   on trouve que $\lim \dfrac{a_n}{e^{-1}/n} = 1$ càd $a_n \sim \dfrac{e^{-1}}{n}$

   – Si on est à l'aise, on écrit les choses suivantes:
     i) on a $n+1 \underset{+\infty}{\sim} n$
     ii) comme $\lim a_{n+1} = 0$ on a $a_{n+1} = o(e^{-1})$ et donc $e^{-1} + a_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} e^{-1}$
     iii) on en déduit que $a_n = \dfrac{1}{n+1}(e^{-1} + a_{n+1}) \underset{+\infty}{\sim} n.e^{-1}$

   Bref, on a montré que $\boxed{a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-1}}{n}}$

Partie II:

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$ la proposition $a_n = \dfrac{n!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}\right)$

   – **initialisation:** $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   En effet on a vu que $a_0 = 1 - e^{-1}$, et l'on a $\dfrac{0!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{0} \dfrac{1}{k!}\right) = \dfrac{1}{e}(e-1) = 1 - e^{-1}$

   – **hérédité:** On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque. On sait d'après Q.I.4) que $a_{n+1} = (n+1).a_n - e^{-1}$
   On peut donc écrire, en utilisant l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= (n+1).a_n - e^{-1} \\
&= (n+1).\frac{n!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) - e^{-1} \\
&= \frac{(n+1)!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) - e^{-1}.\frac{(n+1)!}{(n+1)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) \\
&= \frac{(n+1)!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}\right)
\end{aligned}$$

   ce qui prouve qu'alors $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- **conclusion:** par le principe de récurrence, on a montré que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n entier.

2. On vient de prouver que $\forall n \geqslant 0, e - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} = e.\dfrac{a_n}{n!}$.

   On sait d'après Q.I.3) que $\lim a_n = 0$, ce qui permet d'affirmer que $\lim \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} = e$.

   On a prouvé que la série de terme général $\dfrac{1}{k!}$ converge et que $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k!} = e$

   rem: ceci, on le sait déjà, car ce n'est qu'un cas particulier de la série de l'exponentielle.

3. Notons pour tout $n, S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$

   D'après Q.II.1), on a $e - S_n = e.\dfrac{a_n}{n!}$ càd $S_n = e - e.a_n.\dfrac{1}{n!}$.

   Comme $\lim e.a_n = 0$, on a $-e.a_n.\dfrac{1}{n!} = o\left(\dfrac{1}{n!}\right)$.

   On a bien montré que $S_n = e + o\left(\dfrac{1}{n!}\right)$

   rem: ceci prouve que la suite (S_n) converge très rapidement vers e.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   On sait que $e - S_n = e.\dfrac{a_n}{n!}$
   (a) On sait que $a_n \geqslant 0$ et donc $0 \leqslant e - S_n$
   (b) Comme la suite (a_n) est décroissante, on a $a_n \leqslant a_0 = 1 - e^{-1}$

   On a bien prouvé que $0 \leqslant e - S_n \leqslant e.\dfrac{1-e^{-1}}{n!} = \dfrac{e-1}{n!} \leqslant \dfrac{2}{n!}$

   L'encadrement précédent indique que S_n est une valeur approchée de e par défaut à $\dfrac{2}{n!}$ près.

   Pour obtenir une valeur approchée de e à 10^{-3} près, il suffit donc de choisir un n tel que $\dfrac{2}{n!} \leqslant 10^{-3}$ càd $n! \geqslant 2000$.
   Comme $6! = 720$ et que $7! = 5040$, on en déduit que S_7 est une v.a de e à 10^{-3} près.

Partie III:

1. D'après **la Règle des équivalents**, comme $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-1}}{n}$ et que $\dfrac{e^{-1}}{n} > 0$ pour tout n,

   on peut affirmer que $\sum a_n$ et $\sum \dfrac{e^{-1}}{n}$ sont de même nature.

   Comme $\sum \dfrac{e^{-1}}{n}$ est une série de Riemann divergente, on en déduit que $\boxed{\sum a_n \text{ est une série divergente}}$.
   On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}, a_n \geqslant 0$ (prouvé en Q.I.2), ainsi la série de terme général a_n étant à termes positifs, on sait que la suite de ses sommes partielles est croissante, et comme la série est divergente, on a forcément $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k = +\infty$

2. (a) Pour tout n on a $|(-1)^n a_n| = a_n$, et l'on vient de voir que la série $\sum a_n$ est divergente.
   Conclusion $\boxed{\sum (-1)^n a_n \text{ n'est pas une série absolument convergente}}$

   (b) – La suite (U_n) est décroissante
   En effet.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a

$$U_{n+1} - U_n = S_{2n+2} - S_{2n} = (-1)^{2n+2} a_{2n+2} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leqslant 0$$

car la suite (a_n) est décroissante d'après 1a)

- La suite (V_n) est décroissante
  En effet.
  Soit $n \in \mathbb{N}$.
  On a

$$V_{n+1} - V_n = S_{2n+3} - S_{2n+1} = (-1)^{2n+3} a_{2n+3} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2} = -a_{2n+2} + a_{2n+1} \geqslant 0$$

  car la suite (a_n) est décroissante
- $\lim V_n - U_n = 0$
  En effet,

$$V_n - U_n = S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1}.a_{2n+1} = -a_{2n+1} \to 0$$

  car $\lim a_n = 0$ d'après 1b)

(c) Le raisonnement se fait en deux temps.
- D'après **le théorème des suites adjacentes**, on peut affirmer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers la même limite
- D'après le préliminaire, on peut maintenant affirmer que la suite (S_n) est convergente.

On a montré que la suite des sommes partielles de la série de terme général $(-1)^n a_n$ était une suite convergente, ce qui est la définition de:

$$\boxed{\text{la série de terme général } (-1)^n a_n \text{ est convergente}}$$

Partie IV

1. (a) On a vu en Q.I.d)que $\forall n \geqslant 0, (n+1)a_n = e^{-1} + a_{n+1}$
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Sachant que $(n+1)a_n = e^{-1} + a_{n+1}$ et que $(n+2)a_{n+1} = e^{-1} + a_{n+2}$, on a

$$\begin{aligned}(n+1)(n+2)a_n &= (n+2)e^{-1} + (n+2)a_{n+1} \\ &= (n+2)e^{-1} + e^{-1} + a_{n+2}\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\forall n \geqslant 0, a_n = \dfrac{e^{-1}}{n+1} + \dfrac{e^{-1}}{(n+1)(n+2)} + \dfrac{a_{n+2}}{(n+1)(n+2)}}$

(b) On regarde chaque terme
- $\dfrac{e^{-1}}{n+1} = \dfrac{e^{-1}}{n}.\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}} = \dfrac{e^{-1}}{n}(1 - \dfrac{1}{n} + o(\dfrac{1}{n})) = e^{-1}.\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})\right)$
- $\dfrac{e^{-1}}{(n+1)(n+2)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-1}}{n^2}$ et donc $\dfrac{e^{-1}}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{e^{-1}}{n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})$
- Comme $\lim a_{n+2} = 0$ on a $\dfrac{a_{n+2}}{(n+1)(n+2)} = o(\dfrac{1}{n^2})$

Au final, on trouve $\boxed{a_n = \frac{e^{-1}}{n} + o(\frac{1}{n^2})}$

Avec les notations de l'énoncé, on a $\boxed{(K,L) = (e^{-1},0)}$

Comme $a_n - \frac{e^{-1}}{n} = o(\frac{1}{n^2})$ et que $\sum \frac{1}{n^2}$ est un série **absolument** convergente, on peut affirmer d'après le théorème de comparaison avec le o, que la série de terme général $a_n - \frac{e^{-1}}{n}$ est absolument convergente, donc convergente.

(c) Par définition de o,

on peut dire qu'il existe une suite (ε_n) de limite nulle telle que $a_n - \frac{e^{-1}}{n} = \frac{1}{n^2}.\varepsilon_n$

Comme $\lim \varepsilon_n = 0$, on peut affirmer que pour n assez grand on a $-1 \leqslant \varepsilon_n \leqslant 1$.
autrement dit, on sait qu'il existe un rang N à partir duquel $-1 \leqslant \varepsilon_n \leqslant 1$.

On a bien justifié que $\boxed{\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N,\ -\frac{1}{n^2} \leqslant a_n - \frac{e^{-1}}{n} \leqslant \frac{1}{n^2}}$

2. (a) un encadrement de la suite (C_n)

i. C_n est la somme partielle d'indice n de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$.
Comme on sait que cette série de référence est convergente, on sait que la suite (C_n) est convergente.
Et par théorème, on sait qu'une suite convergente est toujours bornée.
Conclusion: (C_n) est une suite majorée.

ii. On sait que pour tout $k \geqslant 2$, on a $1 \leqslant k^2 - k \leqslant k^2$.
comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$, on en déduit que pour tout $k \geqslant 2, \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k^2 - k}$
Soit $n \geqslant 2$,
d'après ce que l'on a montré ci-dessus, on peut dire que

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2 - k}$$

On a donc $\forall n \geqslant 2, C_n - 1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2 - k}$

iii. une décomposition classique en éléments simples donne

$$\frac{1}{X^2 - X} = \frac{1}{X(X-1)} = \frac{1}{X-1} - \frac{1}{X}$$

Soit $n \geqslant 2$.
On a donc par procédé télescopique

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n}$$

Ceci prouve avec la question précédente que

$$\forall n \geqslant 2, C_n = 1 + C_n - 1 \leqslant 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2$$

Et comme $C_1 = 1$, on a bien montré que $\forall n \geqslant 1, C_n \leqslant 2$

(b) un encadrement de la suite (B_n)

i. On considère la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ définie sur $[1, +\infty[$.
Il est immédiat que f est une fonction continue et décroissante sur son ensemble de définition.
Soit $n \geqslant 1$ et $t \in [n,n+1]$
Par décroissance de la fonction f sur $[n,n+1]$, on a $f(n+1) \leqslant f(t) \leqslant f$

On a ainsi
$$\forall t \in [n,n+1], f(n+1) \leqslant f(t) \leqslant f(n)$$
Par croissance de l'intégrale, on obtient
$$\int_0^1 f(n+1)dt \leqslant \int_0^1 f(t)dt \leqslant \int_0^1 f(n)dt$$
c'est à dire
$$\frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{n}$$

ii. *On montre séparément les deux inégalités.*

– Soit $n \geqslant 1$ fixé.
On sait que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ on a $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}$
On a donc par sommation
$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
ce qui donne avec la relation de Chasles
$$\ln(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = B_n$$
Comme la fonction ln est croissante , on a $\ln n \leqslant \ln(n+1)$.
On vient de justifier que $\boxed{\forall n \geqslant 1, \ln n \leqslant B_n}$

– Soit $n \geqslant 1$ fixé.
ici pour bien faire les choses, il faut distinguer $n = 1$ et $n \geqslant 2$.
  – si $n = 1$ on a trivialement $B_n = 1 = 1 + \ln(1)$
  – si $n \geqslant 2$, on sait que pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$ on a $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \dfrac{dt}{t}$
  On a donc par sommation
$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$$
  ce qui donne avec la relation de Chasles
$$B_n - 1 = \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln n$$
On a bien justifié que $\boxed{\forall n \geqslant 1, B_n \leqslant 1 + \ln n}$

(c) i. D'après la Q.IV.1c), on sait qu'il existe un entier $N > 1$ tel que

$$\forall k \geqslant N, -\frac{1}{k^2} \leqslant a_k - \frac{e^{-1}}{k} \leqslant \frac{1}{k^2}$$

Soit $n > N$ un entier fixé.
On a par sommation

$$-\sum_{k=N}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=N}^{n} a_k - \frac{e^{-1}}{k} = \sum_{k=N}^{n} a_k - e^{-1}. \sum_{k=N}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=N}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Ici, il est important de noter que N est un entier fixé, et donc que les sommes $\sum\limits_{k=1}^{N-1} a_k$, $\sum\limits_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k}$ et $\sum\limits_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k^2}$ sont des constantes que nous nommerons respectivement M_3, M_4 et M_5.
L'encadrement précédent s'écrit alors

$$-(C_n - M_5) \leqslant A_n - M_3 - e^{-1}(B_n - M_4) \leqslant C_n - M_5$$

soit encore

$$-C_n + \underbrace{M_5 + M_3 - e^{-1}.M_4}_{=M_1} \leqslant A_n - e^{-1}.B_n \leqslant C_n \underbrace{-M_5 + M_3 - e^{-1}.M_4}_{=M_2}$$

On a bien justifié il existe deux réels M_1 et M_2 tels que pour tout n assez grand

$$-C_n + M_1 \leqslant A_n - e^{-1}.B_n \leqslant C_n + M_2$$

ii. Comme $C_n \leqslant 2$, pour tout $n \geqslant 1$, on a pour tout n assez grand

$$M_1 - 2 \leqslant A_n - e^{-1}.B_n \leqslant M_2 + 2$$

Il suffit de diviser chaque membre de l'encadrement précédent par $e^{-1}. \ln(n) > 0$ puis d'appliquer le théorème des gendarmes pour trouver que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{A_n}{e^{-1}. \ln n} - \frac{B_n}{\ln n} = 0$
Or d'après Q IV.2.b)ii), on a pour tout $n \geqslant 2, 1 \leqslant \frac{B_n}{\ln n} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln n}$,
d'après le même théorème, on en déduit que $\lim \frac{B_n}{\ln n} = 1$
Au final, on a montré que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{A_n}{e^{-1}. \ln n} = 1$ càd que

$$\boxed{A_n \underset{+\infty}{\sim} e^{-1}. \ln n}$$