Primitives (1A)

exercice 1 (*, à savoir refaire*)**

Calculer une primitive de $f : t \mapsto t^2.\sin(2t)$ *sur* $\mathbb{R}$

exercice 2 (*, à savoir refaire*)**

Calculer une primitive de $f : t \mapsto \cos^4(t)$ *sur* $\mathbb{R}$

exercice 3 (*, à savoir refaire*)**

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+\sin x}$ *sur l'intervalle* $]-\pi,+\pi[$ *(on pourra poser* $t = \tan\dfrac{x}{2}$*)*

exercice 4 (***)

Donner une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{(t-1)(t-2)(t-3)}$ *en précisant l'intervalle de validité*

exercice 5 (****)

Calculer une primitive de $f : t \mapsto \cos^3(t)$ *sur* $\mathbb{R}$

exercice 6 (***)

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{3+x^2}}$ *en précisant l'intervalle de validité*

exercice 7 (, à savoir refaire*)**

Déterminer la primitive de la fonction $f : t \mapsto e^{2t}.(t+3)$ *qui s'annule en 3*

exercice 8 (****)

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \ln(1+x^2)$ *en précisant l'intervalle de validité*

exercice 9 (***)

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}$ *(en posant* $\theta = \sqrt{x}$*) en précisant l'intervalle de validité*

exercice 10 (, à savoir refaire*)**

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto e^x.\cos x$ *en précisant l'intervalle de validité*

exercice 11 (***)

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2-1}$ *sur l'intervalle* $]-1,+1[$

exercice 12 (****)

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \cos^8 x.\sin^3 x$ *en précisant l'intervalle de validité (on pourra poser* $t = \cos x$*)*

exercice 13 (*)

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$ *en précisant l'intervalle de validité (on pourra poser* $t = \ln x$*)*

exercice 14 (**)

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{-1}{\sqrt{4x - x^2}}$ *en précisant l'intervalle de validité (on pourra poser* $x = 2t + 2$*)*

exercice 15 (*)

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{x+1}$ *en précisant l'intervalle de validité*

exercice 16 (**)

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{e^x + 4e^{-x}}$ *en précisant l'intervalle de validité (on pourra poser* $t = e^x$*)*

exercice 17 (***)

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto e^{-x}\ln(1+e^x)$ *en précisant l'intervalle de validité (on pourra poser* $t = e^x$*)*

exercice 18 (*)

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{2\ln x}{x(1+\ln^4 x)}$ *en précisant l'intervalle de validité (on pourra poser* $t = \ln(x)$ *puis* $u = t^2$*)*

Solutions

résolution 1 • La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle possède une primitive sur cet intervalle, notons la F

- On va procéder à une double ipp.

  On commence par poser $u(t) = t^2$ et $v'(t) = \sin(2t)$
  (on aura donc $u'(t) = 2t$ et on choisira $v(t) = \dfrac{-\cos(2t)}{2}$)

$$F(x) = \int^x t^2.\sin(2t)dt = -x^2.\frac{\cos(2x)}{2} + \int^x t.\cos(2t)dt$$

- Puis on refait une ipp en posant $u(t) = t$ et $v'(t) = \cos(2t)$.
  (On aura donc $u'(t) = 1$ et on choisira $v(t) = \dfrac{\sin(2t)}{2}$).

  Ce qui donne:

$$F(x) = -x^2\frac{\cos(2x)}{2} + x.\frac{\sin(2x)}{x} - \int^x \frac{\sin(2t)}{2}dt = -x^2\frac{\cos(2x)}{2} + x.\frac{\sin(2x)}{x} + \frac{\cos(2x)}{4} + cste$$

- On trouve donc que les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F définies par

$$\boxed{F : x \mapsto -x^2\frac{\cos(2x)}{2} + x.\frac{\sin(2x)}{x} - \int^x \frac{\sin(2t)}{2}dt = -x^2\frac{\cos(2x)}{2} + x.\frac{\sin(2x)}{x} + \frac{\cos(2x)}{4} + cste}$$

résolution 2

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle possède une primitive sur cet intervalle.

- On commence par linéariser $f(t)$.
  Pour cela on utilise les nombre complexes et la formule du binôme de Newton.

$$\cos^4 t = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^4}\left(e^{4it} + 4.e^{3it}.e^{-it} + 6.e^{2it}.e^{-2it} + 4.e^{it}.e^{-3it} + e^{-4it}\right)$$

  ce que l'on réordonne:

$$\cos^4 t = \frac{1}{16}\left[e^{4it} + e^{-4it} + 4(e^{2it} + e^{-2it}) + 6\right] = \frac{1}{16}\left(2\cos(4t) + 4\cos(2t) + 6\right)$$

  On trouve donc que $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{8}\cos(4t) + \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{3}{8}}$

- On trouve donc que les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F définies par

$$\boxed{F : t \mapsto \frac{1}{32}\sin(4t) + \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{3}{8}t + Cste}$$

résolution 3 • La fonction f est définie et continue sur $I =]-\pi, +\pi[$ comme quotient de fonctions, le dénominateur ne s'annulant pas

- elle possède des primitives sur cet intervalle
- et les primitives sont égales à une constante près

• Notons F une primitive de f sur I.

On a donc pour tout $y \in I, F(y) = \int^y \dfrac{dx}{1+\sin x}$

• En posant $t = \tan(\dfrac{x}{2})$ on a

- d'une part, $dt = \dfrac{1}{2}\left(1+\tan^2(\dfrac{x}{2})\right) dx$ c'est à dire $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$
- et d'autre part, $\sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$

• Et ainsi

$$\begin{aligned}
F(y) &= \int^{\tan(y/2)} \frac{2dt}{(1+t^2)(1+\dfrac{2t}{1+t^2})} \\
&= \int^{\tan(y/2)} \frac{2dt}{1+2t+t^2} \\
&= 2\int^{\tan(y/2)} \frac{dt}{(1+t)^2} \\
&= \left[\frac{-2}{1+t}\right]^{\tan(y/2)} \\
&= \frac{-2}{1+\tan(\dfrac{y}{2})} + Cste
\end{aligned}$$

• On trouve donc que les primitives de f sur I sont les fonctions F définies par

$$\boxed{F : x \mapsto \frac{-2}{1+\tan(\dfrac{x}{2})} + Cste}$$

résolution 4 • La fonction f est continue sur tout intervalle I ne contenant ni 1, ni 2 , ni 3.
Et donc la fonction f possède une primitive sur ce type d'intervalle

- Une décomposition en éléments simples donne

$$\frac{1}{(X-1)(X-2)(X-3)} = \frac{1}{2}.\frac{1}{X-1} - \frac{1}{X-2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{X-3}$$

- Notons F une primitive de f sur I.
  On a donc pour tout $x \in I$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int^x \frac{dt}{(t-1)(t-2)(t-3)} \\ &= \int^x \frac{1}{2}.\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t-2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{t-3} dt \\ &= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \ln|x-2| + \frac{1}{2}\ln|x-3| + Cste \end{aligned}$$

- On a ainsi prouvé que les primitives de f sur l'intervalle I sont les fonctions F définies par

$$\boxed{F : x \mapsto \frac{1}{2}\ln|x-1| - \ln|x-2| + \frac{1}{2}\ln|x-3| + Cste}$$

- *remarque: les intervalles maximaux I sont* $]-\infty,1[$ *et* $]1,2[$ *et* $]2,3[$ *et* $]3,+\infty[$

résolution 5

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle possède une primitive sur cet intervalle.

- On pourrait bien sûr procéder comme pour le calcul précédent et effectuer une linéarisation...

- Mais ici, comme l'exposant est impair, on peut procéder différemment!

$$F(x) = \int^x \cos^3(t)dt = \int^x \cos(t).\cos^2(t)dt = \int^x \cos(t).(1-\sin^2(t))dt$$

On effectue le changement de variable $u = \sin(t)$ et donc $du = \cos(t).dt$.

Ce qui donne

$$\boxed{F(x) = \int^{\sin x}(1-u^2)du = \left[u - \frac{u^3}{3} + cste\right]^{\sin x} = \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3} + cste}$$

- On trouve donc que les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F définies par

$$\boxed{F : x \mapsto \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3} + cste}$$

résolution 6

- La fonction f est continue sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$ donc
  - elle possède des primitives sur cet intervalle
  - et les primitives sont égales à une constante près

- Notons F une primitive de f sur I.
  On a donc pour tout $x \in I, F(x) = \int^x \dfrac{t}{\sqrt{3+t^2}} dt$

- On effectue le changement de variable $u = 3 + t^2$ (et donc $du = 2tdt$). Cela donne

$$F(x) = \int^{3+x^2} \frac{du}{2\sqrt{u}} = \int^{3+x^2} \frac{(u)^{-1/2}}{2} du = \left[u^{1/2}\right]^{3+x^2} = \sqrt{3+x^2} + Cste$$

- On trouve donc que les prmitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F définies par

$$\boxed{F : x \mapsto \sqrt{3+x^2} + Cste}$$

résolution 7 • La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, par théorème, il existe une unique primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en -3, à savoir $F : t \mapsto \displaystyle\int_{-3}^{t} f(x)dx$

- On réalise une intégration par parties en posant

$$u(x) = \frac{e^{2x}}{2} \quad \text{et} \quad v(x) = x+3\,; \quad \text{on a alors} \quad u'(x) = e^{2x} \quad \text{et } v(x) = 1$$

D'où

$$\begin{aligned} F(t) &= \left[\frac{e^{2x}}{2}(x+3)\right]_{-3}^{t} - \int_{-3}^{t} \frac{e^{2x}}{2}dx \\ &= \frac{e^{2t}}{2}(t+3) - \left[\frac{e^{2x}}{4}\right]_{-3}^{t} \\ &= \frac{e^{2t}}{2}(t+3) - \frac{e^{2t}}{4} + \frac{e^{-6}}{4} \end{aligned}$$

résolution 8 • La fonction f est continue sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$ donc

- elle possède des primitives sur cet intervalle
- et les primitives sont égales à une constante près

- Notons F une primitive de f sur I.
  On a donc pour tout $t \in I, F(t) = \int^t \ln(1+x^2)dx$

- Nous allons effectuer une intégration par parties en posant

$$u(x) = x \quad \text{et} \quad v(x) = \ln(1+x^2) \quad ; \quad \text{on a alors } u'(x) = 1 \quad \text{et } v'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

D'où

$$F(t) = t.\ln(1+t^2) - \int^t \frac{2x^2}{1+x^2}dx = t.\ln(1+t^2) - 2\int^t \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx$$

c'est à dire

$$F(t) = t.\ln(1+t^2) - 2\int^t (1 - \frac{1}{1+x^2})dx = t.\ln(1+t^2) - 2t + 2\arctan t + Cste$$

- On trouve donc que les primitives de f sur I sont les fonctions F définies par

$$\boxed{F : t \mapsto t.\ln(1+t^2) - 2t + 2\arctan t + Cste}$$

résolution 9 • La fonction f est définie et continue sur $I =]0, +\infty[$ donc
- elle possède des primitives sur cet intervalle
- et les primitives sont égales à une constante près

- Notons F une primitive de f sur I.
  On a donc pour tout $t \in I, F(t) = \int^t \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x^3}} dx$
- On effectue le changement de variable $\theta = \sqrt{x}$ (on a donc $d\theta = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$) et l'on obtient

$$F(t) = \int^t \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \int^{\sqrt{t}} \frac{2d\theta}{1+\theta^2} = [2\arctan\theta]^{\sqrt{t}} = 2\arctan\sqrt{t} + Cste$$

- On trouve donc que les primitives de f sur I sont les fonctions F définies par

$$\boxed{F : x \mapsto 2\arctan\sqrt{x} + Cste}$$

résolution 10

- La fonction f est définie et continue sur $I = \mathbb{R}$ donc
  - elle possède des primitives sur cet intervalle
  - et les primitives sont égales à une constante près

- Notons F une primitive de f sur I.
  On a donc pour tout $t \in I, F(t) = \int^t e^x . \cos x . dx$

  Nous allons utiliser la fait que $\cos t = \Re(e^{it})$

$$\begin{aligned} F(t) &= \int^t e^x . \cos x . dx \\ &= \Re\left(\int^t e^x . e^{ix} . dx\right) \\ &= \Re\left(\int^t e^{(1+i)x} dx\right) \\ &= \Re\left(\frac{e^{(1+i)t}}{1+i}\right) + Cste \\ &= \Re\left(\frac{1-i}{2} e^{(1+i)t}\right) + Cste \\ &= \Re\left(\frac{1-i}{2} e^t e^{it}\right) + Cste \\ &= \Re\left(\frac{1-i}{2} e^t (\cos(t) + i\sin(t))\right) + Cste \\ &= \frac{e^t}{2}(\cos(t) + \sin(t)) + Cste \end{aligned}$$

- On trouve donc que les primitives de f sur I sont les fonctions F définies par

$$\boxed{F : t \mapsto \frac{e^t}{2}(\cos(t) + \sin(t)) + Cste}$$

- *il était également possible de réaliser une double intégration par parties*

résolution 11

- La fonction f est définie et continue sur $I =]-1, +1[$ donc
  - elle possède des primitives sur cet intervalle
  - et les primitives sont égales à une constante près

- Notons F une primitive de f sur I.
  On a donc pour tout $x \in I, F(x) = \displaystyle\int^x \frac{t}{t^2-1}dt$
- On a tout simplement

$$F(x) = \frac{1}{2}\int^x \frac{2t}{t^2-1}dt = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + Cste = \frac{\ln(1-x^2)}{2} + Cste$$

- On trouve donc que les primitives de f sur I sont les fonctions F définies par

$$\boxed{F : x \mapsto \frac{\ln(1-x^2)}{2} + Cste}$$

résolution 12

- La fonction f est définie et continue sur $I=\mathbb{R}$ donc
  - elle possède des primitives sur cet intervalle
  - et les primitives sont égales à une constante près

- Notons F une primitive de f sur I.
  On a donc pour tout $y\in I$

$$F(y)=\int^{y} y\cos^8 x.\sin^3 x dx=\int^{y}\cos^8 x.\sin^2 x.\sin x dx=\int^{y}\cos^8 x(1-\cos^2 x).\sin x dx$$

  On effectue le changement de variable $t=\cos x$ et donc $dt=-\sin x dx$.

  Ce qui donne

$$F(y)=\int^{\cos y} t^8(1-t^2)(-dt)=\int^{\cos y} t^{10}-t^8 dt=\left[\frac{t^{11}}{11}-\frac{t^9}{9}\right]^{\cos y}=\frac{\cos^{11} y}{11}-\frac{\cos^9 y}{9}+Cste$$

- On trouve donc que les primitives de f sur I sont les fonctions F définies par

$$\boxed{F: x\mapsto\frac{\cos^{11} x}{11}-\frac{\cos^9 x}{9}+Cste}$$

résolution 13 • La fonction f est définie et continue sur $I =]e^{-1}, e[$ donc

- elle possède des primitives sur cet intervalle
- et les primitives sont égales à une constante près

• Notons F une primitive de f sur I.

On a donc pour tout $y \in I, F(y) = \displaystyle\int^{y} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$

On effectue le changement de variable $t = \ln x$. On a donc $dt = \dfrac{dx}{x}$ et cela donne

$$F(y) = \int^{\ln y} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = [\arcsin(t)]^{\ln y} = \arcsin(\ln y) + Cste$$

• On trouve donc que les primitives de f sur I sont les fonctions F définies par

$$\boxed{F : x \mapsto \arcsin(\ln x) + Cste}$$

résolution 14

- Comme

$$4x - x^2 > 0 \iff x(4-x) > 0 \iff 0 < x < 4$$

La fonction f est définie et continue sur $I =]0{,}4[$ donc
 – elle possède des primitives sur cet intervalle
 – et les primitives sont égales à une constante près

- Notons F une primitive de f sur I.

On a donc pour tout $x \in I, F(y) = \displaystyle\int^{y} \frac{-dx}{\sqrt{4x - x^2}}$

Le changement de variable $x = 2t + 2$ (et donc $dx = 2dt$) donne

$$F(y) = \int^{(y-2)/2} \frac{-2dt}{\sqrt{4(2t+2) - (2t+2)^2}} = \int^{(y-2)/2} \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}} = [\arccos t]^{(y-2)/2} = \arccos\left(\frac{y}{2} - 1\right) + Cste$$

- On trouve donc que les primitives de f sur I sont les fonctions F définies par

$$\boxed{F : x \mapsto \arccos\left(\frac{x}{2} - 1\right) + Cste}$$

résolution 15 • La fonction f est définie et continue sur l'intervalle $I =]-\infty, -1[$ ou l'intervalle $I =]-1, +\infty[$ donc

- elle possède des primitives sur chaque intervalle I
- et les primitives y sont égales à une constante près

• Notons F une primitive de f sur I.

On a donc pour tout $x \in I, F(x) = \displaystyle\int^x \frac{t^2 dt}{t+1}$

$$F(x) = \int^x \frac{(t^2-1)+1}{t+1} dt = \int^x t - 1 + \frac{1}{t+1} dt = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + Cste$$

• On trouve donc que les primitives de f sur I sont les fonctions F définies par

$$\boxed{F : x \mapsto \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + Cste}$$

résolution 16

- La fonction f est définie et continue sur $I = \mathbb{R}$ donc
  - elle possède des primitives sur cet intervalle
  - et les primitives sont égales à une constante près

- Notons F une primitive de f sur I.

  On a donc pour tout $y \in I, F(y) = \int^y \frac{dx}{e^x + 4e^{-x}}$

- Le changement de variable $t = e^x$ (et donc $dt = e^x dx$) donne

$$\begin{aligned} F(y) &= \int^{e^y} \frac{dt/t}{t + 4/t} \\ &= \int^{e^y} \frac{dt}{t^2 + 4} \\ &= \frac{1}{4} \int^{e^y} \frac{dt}{(t/2)^2 + 1} \end{aligned}$$

- Le changement de variable $u = \frac{t}{2}$ (et donc $dt = 2du$) donne

$$\begin{aligned} F(y) &= \frac{1}{4} \int^{e^y} \frac{dt}{(t/2)^2 + 1} \\ &= \frac{1}{2} \int^{e^y/2} \frac{du}{u^2 + 1} \\ &= \left[\frac{1}{2} \arctan(u) \right]^{e^y/2} \\ &= \frac{1}{2} \arctan(\frac{e^y}{2}) + Cste \end{aligned}$$

- On trouve donc que les primitives de f sur I sont les fonctions F définies par

$$\boxed{F : x \mapsto \frac{1}{2} \arctan(\frac{e^x}{2}) + Cste}$$

résolution 17 • La fonction f est définie et continue sur $I = \mathbb{R}$,
elle possède donc des primitives sur cet intervalle

- Notons F une primitive de f sur I.

  On a donc pour tout $y \in I, F(y) = \displaystyle\int^y e^{-x} \ln(1 + e^x) dx$

- Le changement de variable $t = e^x$ (et donc $dt = e^x dx$) donne

$$F(y) = \int^{e^y} \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt$$

- Nous allons réaliser une intégration par parties en posant

$$u(t) = \ln(1+t) \quad \text{et} \quad v(t) = \frac{-1}{t} \quad ; \text{ on a alors } u'(t) = \frac{1}{1+t} \quad \text{et } v'(t) = \frac{1}{t^2}$$

  D'où

$$\int^{e^y} \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt = \left[-\frac{\ln(1+t)}{t} \right]^{e^y} + \int^{e^y} \frac{dt}{t(t+1)}$$

- On réalise une décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{X(X+1)} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1}$$

  On a ainsi

$$\int^{e^y} \frac{dt}{t(t+1)} = \int^{e^y} \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} dt = [\ln|t| - \ln|t+1|]^{e^y}$$

- Au final cela donne

$$\begin{aligned} F(y) &= -\frac{\ln(1+e^y)}{e^y} + y - \ln(e^y + 1) + Cste \\ &= y - (1 + e^{-y}) \ln(1 + e^y) + Cste \end{aligned}$$

- On trouve ainsi que les primitives de f sur I sont les fonctions F définies par

$$\boxed{F : x \mapsto x - (1 + e^{-x}) \ln(1 + e^x) + Cste}$$

résolution 18 • La fonction f est définie et continue sur $I =]0, +\infty[$,
elle possède donc des primitives sur cet intervalle

- Notons F une primitive de f sur I.

  On a donc pour tout $y \in I, F(x) = \displaystyle\int^y \frac{2\ln x}{x(1+\ln^4 x)}$

- Le changement de variable $t = \ln x$ (et donc $dt = \dfrac{dx}{x}$ donne

$$F(y) = \int^{\ln y} \frac{2tdt}{1+t^4}$$

- Le changement de variable $u = t^2$ (et donc $du = 2tdt$) donne

$$\begin{aligned} F(y) &= \int^{(\ln y)^2} \frac{du}{1+u^2} \\ &= [\arctan(u)]^{(\ln y)^2} \\ &= \arctan((\ln(y))^2) + Cste \end{aligned}$$

- On trouve ainsi que les primitives de f sur I sont les fonctions F définies par

$$\boxed{F : x \mapsto \arctan(\ln^2(x)) + Cste}$$