Intégrales (1A)

exercice 1 (*)

Calculer $I = \int_0^1 \left(\frac{t+2}{t+1}\right)^3$ *en posant* $u = t+1$

exercice 2 (*)

Calculer $I = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x(1+\tan^2 x)}{\sin x + \cos x} dx$ *en posant* $u = \tan x$

exercice 3 (**)

Calculer $I = \int_0^{\pi} \sin^5 x . \cos^2 x dx$ *en posant* $u = \cos x$

exercice 4 (*, *épatant*)

Calculer $I = \int_0^{\pi} \frac{\cos^{21} x}{1+\sin^{13} x} dx$ *en posant* $u = \sin x$

exercice 5 (*)

Calculer $I = \int_0^1 \frac{e^t}{e^{-t}+1} dt$ *en posant* $u = e^t$

exercice 6 (**)

Calculer $I = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1-\cos x}} dx$ *en posant* $u = \cos x$

exercice 7 (**)

Calculer $I = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}.\arccos(t)}$

exercice 8 (**)

Calculer $I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} \arctan x \, dx$

exercice 9 (**)

Calculer $I = \int_0^{1/2} \arcsin t \, dt$

Solutions

résolution 1 • L'intégrale I est bien définie car la fonction $t \mapsto \left(\dfrac{t+2}{t+1}\right)^3$ est continue sur le *segment* $[0{,}1]$

- En effectuant le changement de variable $u = t+1$ (et donc $du = dt$), on obtient

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \frac{(u+1)^3}{u^3} du \\ &= \int_1^2 \left(1 + \frac{3}{u} + \frac{3}{u^2} + \frac{1}{u^3}\right) du \\ &= \left[u + 3\ln|u| - \frac{3}{u} - \frac{1}{2u^2}\right]_1^2 \\ &= \frac{23}{8} + 3\ln 2 \end{aligned}$$

résolution 2 • L'intégrale I est bien définie car la fonction $t \mapsto \dfrac{\cos x(1+\tan^2 x)}{\sin x + \cos x}$ est continue sur le *segment* $[0,\pi/4]$,
(car c'est le quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas)

- En effectuant le changement de variable $u = \tan x$ (et donc $du = (1+\tan^2 x)dx$), on obtient

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{(1+\tan^2 x)dx}{1+\tan x} = \int_0^1 \frac{du}{1+u} = [\ln|1+u|]_0^1 = \ln 2$$

résolution 3 • L'intégrale I est bien définie car la fonction $x \mapsto \sin^5 x.\cos^2 x$ est continue sur le *segment* $[0,\pi]$

- On commence par remarquer que

$$\forall x \in [0,\pi],\ \sin^5 x.\cos^2 x = \sin x.\sin^4 x.\cos^2 x = \sin x.(1-\cos^2 x)^2.\cos^2 x$$

- En effectuant le changement de variable $u = \cos x$ (et donc $du = -\sin x dx$) on obtient

$$I = \int_0^{\pi} \sin x.(1-\cos^2 x)^2 \cos^2 x dx = -\int_1^{-1} (1-u^2)^2 u^2 du$$

En développant

$$I = \int_{-1}^{1} (u^2 - 2u^4 + u^6) du = \left[\frac{u^3}{3} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7}\right]_{-1}^{+1} = \frac{16}{105}$$

résolution 4 • L'intégrale I est bien définie car la fonction $x \mapsto \dfrac{\cos^{21} x}{1+\sin^{13} x}$ est continue sur le *segment* $[0,\pi]$

- On commence par remarquer que

$$\forall x \in [0,\pi], \frac{\cos^{21} x}{1+\sin^{13} x} = \frac{\cos x . \cos^{20} x}{1+\sin^{13} x} = \frac{\cos x .(1-\sin^2 x)^{10}}{1+\sin^{13} x}$$

- En effectuant le changement de variable $u = \sin x$ (et donc $du = \cos x \, dx$),

  on obtient
$$I = \int_0^{\pi} \frac{\cos x(1-\sin^2 x)^{10}}{1+\sin^{13} x} dx = \int_0^{0} \frac{(1-u^2)^{10}}{1+u^{13}} = 0$$
  remarque: dans une intégrale non généralisée (ie intégrale de première année) le changement de variable n'est pas nécessairement bijectif!

résolution 5 • L'intégrale I est bien définie car la fonction $t \mapsto \dfrac{e^t}{e^{-t}+1}$ est continue sur le *segment* [0,1]

•
En effectuant le changement de variable $u = e^t$ (et donc $du = e^t dt$),

on obtient

$$I = \int_1^e \frac{du}{\dfrac{1}{u}+1} = \int_1^e \frac{u.du}{u+1} = \int_1^e \frac{u+1-1}{u+1} du = \int_1^e \left(1 - \frac{1}{u+1}\right) du$$

ainsi

$$I = [u - \ln|u+1|]_1^e = e - 1 + \ln(2) - \ln(1+e)$$

résolution 6 • L'intégrale I est bien définie car la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{1-\cos x}}$ est continue sur le *segment* $[\pi/2,\pi]$

- En effectuant le changement de variable $u = \cos x$ (et donc $dx = \dfrac{-du}{\sqrt{1-u^2}}$),

  on obtient

$$I = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1-\cos^2 x}{\sqrt{1-\cos x}} dx = \int_0^{-1} \frac{1-u^2}{\sqrt{1-u}} . \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}} = \int_{-1}^{0} \sqrt{1+u}\, du = \left[\frac{2}{3}(1+u)^{3/2}\right]_{-1}^{0} = \frac{2}{3}$$

$\boxed{\textbf{résolution 7}}$ • L'intégrale I est bien définie car la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}.\arccos(t)}$ est continue sur le *segment* $[-1/2{,}1/2]$

- On reconnait directement une forme $-\dfrac{u'}{u}$ on a donc

$$I = [-\ln|\arccos t|]_{-1/2}^{+1/2} = -\ln\frac{\pi}{3} + \ln\frac{2\pi}{3} = \ln 2$$

résolution 8 • L'intégrale I est bien définie car la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^2}\arctan x$ est continue sur le *segment* [0,1]

- On commence par l'astuce classique

$$I = \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\arctan x\,dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\arctan x = \int_0^1 \arctan(x)\,dx - \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$$

- La première intégrale(classique) se calcule par parties

$$\int_0^1 \arctan(x)\,dx = [x.\arctan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \left[x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$

- La seconde intégrale se calcule directement

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}dx = \left[\frac{1}{2}(\arctan x)^2\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{32}$$

- Au final

$$I = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} - \frac{\ln 2}{2}$$

résolution 9 • L'intégrale I est bien définie car la fonction $t \mapsto \arcsin t$ (càd la fonction arcsin) est continue sur le *segment* [0,1/2]

- Nous allons réaliser une intégration par parties en posant

$$u(t) = t \quad \text{et} \quad v(t) = \arcsin(t) \quad ; \text{ on a alors } u'(t) = 1 \quad \text{et} \quad v'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

D'où

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} \arcsin t\, dt &= [t.\arcsin t]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \frac{1}{2}.\frac{\pi}{6} + \left[\sqrt{1-t^2}\right]_0^{1/2} \\ &= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1\end{aligned}$$