Trigonométrie et nombres complexes

Prérequis
Nombres complexes, trigonométrie.

Dans toute cette fiche, x désigne une quantité réelle.

Linéarisation

Calcul 17.1

Linéariser :

a) $\cos^3(x)$ .....

b) $\cos(2x)\sin^2(x)$ ....

c) $\cos^2(2x)\sin^2(x)$ ...

d) $\cos(3x)\sin^3(2x)$ ...

e) $\cos^3(2x)\cos(3x)$ ..

f) $\sin^2(4x)\sin(3x)$ ...

Arc moitié, arc moyen

Calcul 17.2

Écrire sous forme trigonométrique (c'est-à-dire sous la forme $re^{i\theta}$, avec $r > 0$) :

a) $1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$ .....

b) $1 + e^{i\frac{7\pi}{6}}$ .....

c) $e^{-i\frac{\pi}{6}} - 1$ .....

d) $1 + ie^{i\frac{\pi}{3}}$ .....

e) $-1 - e^{i\frac{\pi}{6}}$ .....

f) $1 - e^{i\frac{\pi}{12}}$ .....

g) $\dfrac{1 + e^{i\frac{\pi}{6}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{12}}}$ .....

h) $\left(1 + e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{27}$ .....

Calcul 17.3

Écrire sous forme trigonométrique (c'est-à-dire sous la forme $re^{i\theta}$, avec $r > 0$) :

a) $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{2}}$ .....

b) $e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{2}}$ .....

Délinéarisation

Calcul 17.4

Exprimer en fonction des puissances de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$:

a) $\cos(3x)$ .....

b) $\sin(4x)$ .....

Factorisation

Calcul 17.5

Factoriser :

a) $\cos(x)+\cos(3x)$ .....

c) $\cos(x)-\cos(3x)$ .....

b) $\sin(5x)-\sin(3x)$ .....

d) $\sin(3x)+\sin(5x)$ .....

Calcul 17.6

Factoriser :

a) $\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x)$ .....

b) $\cos(x)+\cos(3x)+\cos(5x)+\cos(7x)$ .....

c) $\cos(x)+\cos\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\dfrac{4\pi}{3}\right)$ .....

Intégrales

Calcul 17.7

Calculer :

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{x}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ .....

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2x}\cos(x)\,\mathrm{d}x$ .....

Réponses mélangées

$-\dfrac{1}{8}\cos(6x)+\dfrac{1}{4}\cos(4x)-\dfrac{3}{8}\cos(2x)+\dfrac{1}{4}$ $\quad$ $\dfrac{1}{4}\cos(3x)+\dfrac{3}{4}\cos(x)$ $\quad$ $4\cos^3(x)-3\cos(x)$

$2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}$ $\quad$ $2\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}}$ $\quad$ $-\dfrac{1}{4}\cos(4x)+\dfrac{1}{2}\cos(2x)-\dfrac{1}{4}$ $\quad$ $2\cos(4x)\sin(x)$

$\dfrac{\cos(9x)}{8}+\dfrac{3\cos(5x)}{8}+\dfrac{\cos(3x)}{8}+\dfrac{3\cos(x)}{8}$ $\quad$ $4\cos^3(x)\sin(x)-4\cos(x)\sin^3(x)$ $\quad$ $2\sin\left(\dfrac{\pi}{24}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{11\pi}{24}}$

$\left(-2\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$ $\quad$ $2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$ $\quad$ $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)}\mathrm{e}^{\frac{13\mathrm{i}\pi}{24}}$ $\quad$ $2\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{12}}$

$\dfrac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ $\quad$ $2\cos(2x)\cos(x)$ $\quad$ $2\sin(x)\sin(2x)$ $\quad$ $2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$ $\quad$ $\dfrac{1}{5}(\mathrm{e}^{\pi}-2)$

$2^{27}\cos^{27}\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ $\quad$ $2\sin(4x)\cos(x)$ $\quad$ 0 $\quad$ $\dfrac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{2}$ $\quad$ $-\dfrac{1}{4}\sin(11x)+\dfrac{1}{4}\sin(5x)+\dfrac{1}{2}\sin(3x)$

$\dfrac{\sin(8x)}{2\sin(x)}$ $\quad$ $2\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\frac{-7\mathrm{i}\pi}{12}}$ $\quad$ $-\dfrac{\sin(9x)}{8}+\dfrac{3\sin(5x)}{8}-\dfrac{\sin(3x)}{8}-\dfrac{3\sin(x)}{8}$

▶ Réponses et corrigés page 131

Fiche n° 17. Trigonométrie et nombres complexes

Réponses

17.1 a) $\boxed{\frac{1}{4}\cos(3x)+\frac{3}{4}\cos(x)}$

17.1 b) $\boxed{-\frac{1}{4}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)-\frac{1}{4}}$

17.1 c) $\boxed{-\frac{1}{8}\cos(6x)+\frac{1}{4}\cos(4x)-\frac{3}{8}\cos(2x)+\frac{1}{4}}$

17.1 d) $\boxed{-\frac{\sin(9x)}{8}+\frac{3\sin(5x)}{8}-\frac{\sin(3x)}{8}-\frac{3\sin(x)}{8}}$

17.1 e) $\boxed{\frac{\cos(9x)}{8}+\frac{3\cos(5x)}{8}+\frac{\cos(3x)}{8}+\frac{3\cos(x)}{8}}$

17.1 f) $\boxed{-\frac{1}{4}\sin(11x)+\frac{1}{4}\sin(5x)+\frac{1}{2}\sin(3x)}$

17.2 a) $\boxed{2\cos\Big(\frac{\pi}{12}\Big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}}$

17.2 b) $\boxed{\Big(-2\cos\Big(\frac{7\pi}{12}\Big)\Big)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}}$

17.2 c) $\boxed{2\sin\Big(\frac{\pi}{12}\Big)\mathrm{e}^{\frac{-7\mathrm{i}\pi}{12}}}$

17.2 d) $\boxed{2\cos\Big(\frac{5\pi}{12}\Big)\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{12}}}$

17.2 e) $\boxed{2\cos\Big(\frac{\pi}{12}\Big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}}$

17.2 f) $\boxed{2\sin\Big(\frac{\pi}{24}\Big)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{11\pi}{24}}}$

17.2 g) $\boxed{\frac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)}\mathrm{e}^{\frac{13\mathrm{i}\pi}{24}}}$

17.2 h) $\boxed{2^{27}\cos^{27}\Big(\frac{\pi}{12}\Big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$

17.3 a) $\boxed{2\cos\Big(\frac{\pi}{12}\Big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}}$

17.3 b) $\boxed{2\sin\Big(\frac{\pi}{12}\Big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}}}$

17.4 a) $\boxed{4\cos^3(x)-3\cos(x)}$

17.4 b) $\boxed{4\cos^3(x)\sin(x)-4\cos(x)\sin^3(x)}$

17.5 a) $\boxed{2\cos(2x)\cos(x)}$

17.5 b) $\boxed{2\cos(4x)\sin(x)}$

17.5 c) $\boxed{2\sin(x)\sin(2x)}$

17.5 d) $\boxed{2\sin(4x)\cos(x)}$

17.6 a) $\boxed{\frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}$

17.6 b) $\boxed{\frac{\sin(8x)}{2\sin(x)}}$

17.6 c) $\boxed{0}$

17.7 a) $\boxed{\frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{2}}$

17.7 b) $\boxed{\frac{1}{5}(\mathrm{e}^{\pi}-2)}$

Corrigés

17.1 a) On calcule :

$$\cos^3(x)=\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)^3=\frac{1}{8}\big(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}+3\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}+3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}\big)=\frac{1}{8}\big(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}\big)+\frac{3}{8}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\big)$$
$$=\frac{1}{4}\cos(3x)+\frac{3}{4}\cos x.$$

17.1 b) On calcule :

$$\cos(2x)\sin^2(x)=\left(\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{2}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^2=-\frac{1}{8}\big(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\big)\big(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-2+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\big)$$
$$=-\frac{1}{8}\big(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}-2\big(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\big)+2\big)=-\frac{1}{4}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)-\frac{1}{4}.$$

17.1 d) On calcule :

$$\begin{aligned}\cos(3x)\sin^3(2x) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}}{2}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^3 = -\frac{1}{16\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}\right)\left(\mathrm{e}^{6\mathrm{i}x}-3\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+3\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-6\mathrm{i}x}\right)\\ &= -\frac{1}{16\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{9\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-9\mathrm{i}x}-3(\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}x})+\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}+3(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})\right)\\ &= -\frac{1}{8}\sin(9x)+\frac{3}{8}\sin(5x)-\frac{1}{8}\sin(3x)-\frac{3}{8}\sin(x).\end{aligned}$$

17.2 a) $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\right) = \underbrace{2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{>0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$.

17.2 b) $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\frac{7\mathrm{i}\pi}{12}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{7\mathrm{i}\pi}{12}}+\mathrm{e}^{\frac{7\mathrm{i}\pi}{12}}\right) = \underbrace{2\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)}_{<0}\mathrm{e}^{\frac{7\mathrm{i}\pi}{12}} = \left(-2\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)\mathrm{e}^{\frac{7\mathrm{i}\pi}{12}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi} = \left(-2\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$.

17.2 c) $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}-1 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\right) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\left(-2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{-\frac{7\mathrm{i}\pi}{12}}$.

17.2 d) $1+\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{12}}2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{12}}$

17.2 e) $-1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\right) = \underbrace{-2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{<0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\pi} = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}$.

17.2 f) $1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{24}}\left(-2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{24}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{11\pi}{24}}$.

17.2 g) On fait le quotient de a) et f).

17.2 h) $\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^{27} = \left(2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\right)^{27} = 2^{27}\cos^{27}\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

17.3 a) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}}{2}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}}{2}}\right) = \underbrace{2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{>0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$.

17.3 b) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}}{2}}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}}{2}}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{i}\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \underbrace{2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{>0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}}$.

17.4 a) On calcule :

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}) = \mathrm{Re}\left((\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^3\right) = \mathrm{Re}\left((\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x))^3\right)\\ &= \mathrm{Re}(\cos^3(x)+3\mathrm{i}\cos^2(x)\sin(x)-3\cos(x)\sin^2(x)-\mathrm{i}\sin^3(x))\\ &= \cos^3(x)-3\cos(x)\sin^2(x) = \cos^3(x)-3\cos(x)(1-\cos^2(x))\\ &= 4\cos^3(x)-3\cos(x).\end{aligned}$$

17.4 b) On calcule :

$$\begin{aligned}\sin(4x) &= \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}) = \mathrm{Im}\left((\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^4\right) = \mathrm{Im}\left((\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x))^4\right)\\ &= \mathrm{Im}(\cos^4(x)+4\mathrm{i}\cos^3(x)\sin(x)-6\cos^2(x)\sin^2(x)-4\mathrm{i}\cos(x)\sin^3(x)+\sin^4(x))\\ &= 4\cos^3(x)\sin(x)-4\cos(x)\sin^3(x).\end{aligned}$$

17.5 a) $\cos(x)+\cos(3x) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x+3x}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-x)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)\right) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}2\cos(x)\right) = 2\cos(2x)\cos(x)$.

17.5 b) $\sin(5x)-\sin(3x)=\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x})=\mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})\big)=\mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}2\mathrm{i}\sin(x)\big)=2\cos(4x)\sin(x).$

.....

17.5 c) $\cos(x)-\cos(3x)=\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x})=\mathrm{Re}\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x+3x}{2}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-x)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})\Big)=\mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}(-2\mathrm{i})\sin(x)\big)=2\sin(x)\sin(2x).$

.....

17.5 d) $\sin(3x)+\sin(5x)=\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x})=\mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})\big)=\mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}2\cos(x)\big)=2\sin(4x)\cos(x).$

.....

17.6 a) Si $x\in 2\pi\mathbb{Z}$, alors cette somme vaut 0. Sinon, $\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x)=\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x})$

$=\mathrm{Im}\big(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^2+(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^3\big)$. Or, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\neq 1$ donc $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^2+(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^3=\dfrac{1-\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}$.

On utilise maintenant l'astuce de l'arc moitié. On obtient,

$$\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x)=\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}}\frac{-2\mathrm{i}\sin(2x)}{-2\mathrm{i}\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)=\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3x}{2}}\frac{\sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)=\frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

.....

17.6 b) Si $x\in 2\pi\mathbb{Z}$, alors cette somme vaut 4.

Si x est de la forme $\pi+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$, la somme vaut -4.

Sinon, on calcule :

$$\begin{aligned}\cos(x)+\cos(3x)+\cos(5x)+\cos(7x)&=\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{7\mathrm{i}x})\\&=\mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\big(1+(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})+(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})^2+(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})^3\big)\big).\end{aligned}$$

Or, $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\neq 1$ donc

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\big(1+(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})+(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})^2+(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})^3\big)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\frac{1-(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})^4}{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\frac{1-(\mathrm{e}^{8\mathrm{i}x})}{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\frac{\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\frac{-2\mathrm{i}\sin(4x)}{-2\mathrm{i}\sin(x)}=\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}\frac{\sin(4x)}{\sin(x)}.$$

Finalement, on a

$$\cos(x)+\cos(3x)+\cos(5x)+\cos(7x)=\frac{\cos(4x)\sin(4x)}{\sin(x)}=\frac{\sin(8x)}{2\sin(x)}.$$

.....

17.6 c) On calcule :

$$\cos(x)+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=\mathrm{Re}\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+\frac{2\pi}{3})}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+\frac{4\pi}{3})}\Big)=\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\underbrace{\big(1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2\big)}_{=0}\right)=0.$$

.....

17.7 a) On calcule :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \mathrm{e}^x\sin(x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^\pi \mathrm{e}^x\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})\,\mathrm{d}x=\int_0^\pi \mathrm{Im}(\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})\,\mathrm{d}x=\mathrm{Im}\left(\int_0^\pi \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\,\mathrm{d}x\right)\\&=\mathrm{Im}\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}}{1+\mathrm{i}}\right]_0^\pi\right)\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{\pi+\mathrm{i}\pi}-1}{1+\mathrm{i}}\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{-\mathrm{e}^\pi-1}{1+\mathrm{i}}\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{(-\mathrm{e}^\pi-1)(1-\mathrm{i})}{2}\right)\\&=\frac{\mathrm{e}^\pi+1}{2}.\end{aligned}$$

.....