Suites numériques

Prérequis
Suites récurrentes. Suites arithmétiques. Suites géométriques.

Calcul de termes

Calcul 21.1 — Suite explicite.

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2n+3}{5} \times 2^{n+2}$. Calculer :

a) u_0 ....

b) u_1 ....

c) u_{n+1} ....

d) u_{3n} ....

Calcul 21.2 — Suite récurrente.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 3$. Calculer :

a) son troisième terme ....

b) u_3 ....

Calcul 21.3 — Suite récurrente.

On définit la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ par $v_1 = \sqrt{2}$ et $\forall n \geqslant 1,\ v_{n+1} = \sqrt{v_n}$. Calculer :

a) v_3 ....

b) son sixième terme ....

Calcul 21.4 — Suite récurrente.

On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $w_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \dfrac{1}{2}w_n^2$. Calculer :

a) w_2 ....

b) son centième terme ....

Calcul 21.5 — Suite explicite.

Soit la suite $(t_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = \ln\left(\dfrac{n^n}{2^n}\right)$. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

a) t_{2n} ....

b) t_{4n} ....

Suites arithmétiques et géométriques

Calcul 21.6 — Suite arithmétique.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2. Calculer :

a) a_{10} ....

b) $s_{100} = a_0 + a_1 + \ldots + a_{99}$ ....

c) $a_{1\ 000}$ ....

d) $s_{101} = a_0 + a_1 + \ldots + a_{100}$ ....

Calcul 21.7 — **Suite arithmétique.**

La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r vérifiant que $b_{101} = \dfrac{2}{3}$ et $b_{103} = \dfrac{3}{4}$. Calculer :

a) b_{102} ....

b) r ....

Calcul 21.8 — **Suite géométrique.**

La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $g_0 = 3$ et de raison $\dfrac{1}{2}$. Calculer :

a) Son dixième terme est : ....

b) $\sigma_{10} = g_0 + g_1 + \ldots + g_9$ ....

c) g_{10} ....

d) $\sigma_{11} = g_0 + g_1 + \ldots + g_{10}$ ....

Calcul 21.9 — **Suite géométrique.**

La suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q vérifiant que $h_{11} = \dfrac{5\pi}{11}$ et $h_{13} = \dfrac{11\pi}{25}$. Calculer :

a) h_{12} ....

b) q ....

Suites récurrentes sur deux rangs

Calcul 21.10

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par que $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$. Calculer :

a) u_n ....

b) u_5 ....

Calcul 21.11

Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par que $v_0 = 0$, $v_1 = \sqrt{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = 2v_{n+1} + v_n$. Calculer :

a) v_n ....

b) v_2 ....

Calcul 21.12 — **Suite de Fermat.**

Soit la suite $(F_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = 2^{2^n} + 1$. Calculer :

a) F_3 ....

b) F_4 ....

c) $(F_{n-1} - 1)^2 + 1$ ....

d) $F_n \times (F_n - 2)$ ....

e) F_n^2 ....

f) $F_{n+1}^2 - 2(F_n - 1)^2$ ....

Réponses mélangées

$65\,537$ $\quad 2^{\frac{1}{64}}$ $\quad \dfrac{6141}{1024}$ $\quad \dfrac{1}{24}$ $\quad \dfrac{3}{1\,024}$ $\quad 29$ $\quad F_{n+2}$ $\quad 21$ $\quad F_{n+1} + 2^{2^n+1}$

2 $\quad F_{n+1} - 2$ $\quad 10\,000$ $\quad 2n\ln(n)$ $\quad \dfrac{17}{24}$ $\quad \dfrac{3069}{512}$ $\quad 2$ $\quad \dfrac{11\sqrt{5}}{25}$ $\quad 3^n + (-2)^n$

257 $\quad \dfrac{(2n+5)\cdot 2^{n+3}}{5}$ $\quad 211$ $\quad F_n$ $\quad 10\,201$ $\quad \dfrac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2}$ $\quad \dfrac{12}{5}$

$\dfrac{3(2n+1)\cdot 2^{3n+2}}{5}$ $\quad 8$ $\quad \dfrac{\pi\sqrt{5}}{5}$ $\quad \dfrac{3}{512}$ $\quad 2^{\frac{1}{8}}$ $\quad 13$ $\quad 4n\ln(2n)$ $\quad 2\,001$ $\quad 2\sqrt{2}$

► Réponses et corrigés page 147

Fiche n° 21. Suites numériques

Réponses

21.1 a) $\boxed{\frac{12}{5}}$

21.1 b) $\boxed{8}$

21.1 c) $\boxed{\frac{(2n+5)\cdot 2^{n+3}}{5}}$

21.1 d) $\boxed{\frac{3(2n+1)\cdot 2^{3n+2}}{5}}$

21.2 a) $\boxed{13}$

21.2 b) $\boxed{29}$

21.3 a) $\boxed{2^{\frac{1}{8}}}$

21.3 b) $\boxed{2^{\frac{1}{64}}}$

21.4 a) $\boxed{2}$

21.4 b) $\boxed{2}$

21.5 a) $\boxed{2n\ln(n)}$

21.5 b) $\boxed{4n\ln(2n)}$

21.6 a) $\boxed{21}$

21.6 b) $\boxed{10\,000}$

21.6 c) $\boxed{2\,001}$

21.6 d) $\boxed{10\,201}$

21.7 a) $\boxed{\frac{17}{24}}$

21.7 b) $\boxed{\frac{1}{24}}$

21.8 a) $\boxed{\frac{3}{512}}$

21.8 b) $\boxed{\frac{3069}{512}}$

21.8 c) $\boxed{\frac{3}{1\,024}}$

21.8 d) $\boxed{\frac{6141}{1024}}$

21.9 a) $\boxed{\frac{\pi\sqrt{5}}{5}}$

21.9 b) $\boxed{\frac{11\sqrt{5}}{25}}$

21.10 a) $\boxed{3^n+(-2)^n}$

21.10 b) $\boxed{211}$

21.11 a) $\boxed{\frac{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}{2}}$

21.11 b) $\boxed{2\sqrt{2}}$

21.12 a) $\boxed{257}$

21.12 b) $\boxed{65\,537}$

21.12 c) $\boxed{F_n}$

21.12 d) $\boxed{F_{n+1}-2}$

21.12 e) $\boxed{F_{n+1}+2^{2^n+1}}$

21.12 f) $\boxed{F_{n+2}}$

Corrigés

21.1 a) $u_0 = \dfrac{2\times 0+3}{5}\times 2^{0+2} = \dfrac{12}{5}$.

21.1 b) $u_1 = \dfrac{2\times 1+3}{5}\times 2^{1+2} = \dfrac{5}{5}\times 8 = 8$.

21.1 c) $u_n = \dfrac{2(n+1)+3}{5}\times 2^{(n+1)+2} = \dfrac{(2n+5)\cdot 2^{n+3}}{5}$.

21.1 d) $u_{3n} = \dfrac{2\times 3n+3}{5}\times 2^{3n+2} = \dfrac{3(2n+1)\cdot 2^{3n+2}}{5}$

21.2 a) $u_1 = 2\times 1+3 = 5$ et $u_2 = 2\times 5+3 = 13$.

21.2 b) On calcule : $u_3 = 2\times 13+3 = 29$.

21.3 a) $v_3 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = 2^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2^3}} = 2^{\frac{1}{8}}$.

21.3 b) $v_6 = 2^{\left(\frac{1}{2}\right)^6} = 2^{\frac{1}{2^6}} = 2^{\frac{1}{64}}$.

21.4 a) $w_1 = \dfrac{1}{2}\times 2^2 = \dfrac{4}{2} = 2$ et, de même, $w_2 = 2$.

21.4 b) Il faudrait formaliser une preuve par récurrence.

21.5 a) $t_{2n} = \ln((2n)^{2n}) - \ln(2^{2n}) = 2n\ln(2) + 2n\ln(n) - 2n\ln(2) = 2n\ln(n)$.

21.5 b) $t_{4n} = \ln((4n)^{4n}) - \ln(2^{4n}) = 8n\ln(2) + 4n\ln(n) - 4n\ln(2) = 4n\ln(2) + 4n\ln(n) = 4n\ln(2n)$.

21.6 a) $a_{100} = a_0 + 100 \times 2 = 201$.

21.6 b) $s_{100} = \dfrac{100 \times (1+199)}{2} = \dfrac{100 \times 200}{2} = 100^2 = 10\ 000$.

21.6 c) $a_{1\ 000} = 1 + 1\ 000 \times 2 = 2\ 001$.

21.6 d) $s_{101} = \dfrac{101 \times (1+201)}{2} = \dfrac{101 \times 202}{2} = 101^2 = 10\ 201$.

21.7 a) $b_{102} = \dfrac{b_{101} + b_{103}}{2} = \dfrac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}{2} = \dfrac{\frac{8+9}{12}}{2} = \dfrac{17}{24}$.

21.7 b) $r = u_{102} - u_{101} = \dfrac{17}{24} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{24}$.

21.8 a) $g_9 = 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^9 = \dfrac{3}{2^9} = \dfrac{3}{512}$.

21.8 b) $\sigma_{10} = g_0 \times \dfrac{1 - \frac{1}{2^{10}}}{1 - \frac{1}{2}} = 6\dfrac{2^{10}-1}{2^{10}} = \dfrac{3 \times 1\ 023}{512} = \dfrac{3069}{512}$.

21.8 c) $g_{10} = g_0 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{10} = 3 \times \dfrac{1}{2^{10}} = \dfrac{3}{1\ 024}$.

21.8 d) $\sigma_{11} = 6\dfrac{2^{11}-1}{2^{11}} = \dfrac{3 \times 2\ 047}{1\ 024} = \dfrac{6141}{1024}$.

21.9 a) $h_{12} = \sqrt{h_{11} \times h_{13}} = \sqrt{\dfrac{5\pi \times 11\pi}{11 \times 25}} = \sqrt{\dfrac{\pi^2}{5}} = \dfrac{\pi\sqrt{5}}{5}$.

21.9 b) $r = \dfrac{h_{12}}{h_{11}} = \dfrac{\frac{\pi\sqrt{5}}{5}}{\frac{5\pi}{11}} = \dfrac{\pi\sqrt{5} \times 11}{5 \times 5\pi} = \dfrac{11\sqrt{5}}{25}$.

21.10 a) L'équation caractéristique est $r^2 - r - 6 = 0$ dont les racines sont 3 et -2. Ainsi $u_n = \alpha 3^n + \beta(-2)^n$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Les conditions initiales conduisent au système linéaire $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 3\alpha - 2\beta = 1 \end{cases}$ dont les solutions sont $\alpha = \beta = 1$.

21.10 b) D'après le a) : $u_5 = 3^5 + (-2)^5 = 3^5 - 2^5 = 211$.

21.11 a) L'équation caractéristique est ici $r^2 - 2r - 1 = 0$. Ses racines sont $1 + \sqrt{2}$ et $1 - \sqrt{2}$ et $v_n = \lambda 3^n + \mu(-2)^n$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Les conditions initiales donnent ici $\lambda = \dfrac{1}{2}$ et $\mu = -\dfrac{1}{2}$.

21.11 b) Le plus simple (pour un si petit indice) est d'utiliser la relation de récurrence de la suite : $v_2 = 2v_1 + v_0 = 2\sqrt{2}$. Pour travailler les identités remarquables, d'après le a) : $v_2 = \dfrac{(1+\sqrt{2})^2 - (1-\sqrt{2})^2}{2} = \dfrac{3 + 2\sqrt{2} - (3 - 2\sqrt{2})}{2} = 2\sqrt{2}$.

21.12 a) $F_3 = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$.

21.12 b) $F_5 = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65\ 537$.

21.12 c) $(F_{n-1}-1)^2+1=\left(2^{2^{n-1}}\right)^2+1=2^{2^{n-1}\times 2}+1=2^{2^n}+1=F_n.$

....

21.12 d) $F_n\times(F_n-2)=\left(2^{2^n}+1\right)\left(2^{2^n}-1\right)=\left(2^{2^{n+1}}-1\right)=F_{n+1}-2.$

....

21.12 e) $F_n^2=\left(2^{2^n}+1\right)^2=\left(2^{2^n}\right)^2+2\cdot 2^{2^n}+1=2^{2^{n+1}}+1+2^{2^n+1}=F_{n+1}+2^{2^n+1}.$

....

21.12 f) $F_{n+1}^2-2(F_n-1)^2=F_{n+2}+2\cdot 2^{2^{n+1}}-2(F_{n+1}-1)=F_{n+2}+2\cdot 2^{2^{n+1}}-2\cdot 2^{2^{n+1}}=F_{n+2}.$

....